





LA THEORIE ET LA PRATIQUE
DE LA
COUPE DES PIERRES ET DES BOIS
POUR LA CONSTRUCTION DES VOUTES
Et autres parties des bâtimens civils & militaires.

OU

TRAITÉ DE STEREOTOMIE
A L'USAGE DE L'ARCHITECTURE,

Par M. FREZIER, Chevalier de l'Ordre Militaire de Saint Louis, Directeur des Fortifications de Bretagne.

Nouvelle Edition, revue avec soin, corrigée & augmentée.

TOME TROISIEME.



A PARIS, RUE DAUPHINE,
Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Pere, Libraire du Roi pour l'Artillerie & le Génie, à l'image Notre-Dame.

M. DCC. LXIX.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

AVERTISSEMENT

Sur cette nouvelle édition.

LA premiere édition de ce traité de Stereotomie a été faite à Strasbourg en 1737 & 1738. L'éloignement de l'Auteur, (qui étoit alors Ingénieur en chef à Landaw), joint aux occupations inséparables de son état, l'empêcherent de veiller à la correction du livre & à la gravûre des planches. D'ailleurs comme il a été imprimé dans une ville frontiere d'Alsace où l'Allemand est beaucoup plus familier que le François, il s'y est glissé une grande quantité de fautes, ensorte que de l'aveu même de M. *Frezier*, les unes rendent le discours inintelligible & les autres le raisonnemenr faux. L'Auteur, qui s'en est apperçu, mais trop tard, a tâché d'y remedier par les *Errata* qui se trouvent, dans l'édition précédente, au commencement de chaque volume; mais quelque considérables qu'ils soient, ils ne relevent qu'une partie des fautes les plus essentielles, & il y en reste encore assez pour former des contresens capables d'embarrasser le Lecteur. Cependant l'excellence de l'ouvrage a prévalu sur les défauts de son exécution, & cette premiere édition, malgré ses incorrections, est enfin épuisée. Le sieur *Jombert* se trouvant dans le cas d'en faire une nouvelle, a apporté tous ses soins pour rendre celle-ci la plus exacte & la plus correcte qu'il est possible, soit pour le discours, soit pour les planches, où l'on étoit arrêté à tous instans par quantité d'omissions & de lettres ou chiffres gravés l'un pour l'autre. M. *Frezier* de son côté a bien voulu se prêter aux vues du Libraire, en lui fournissant plusieurs additions considérables, avec les éclaircissemens nécessaires pour reparer les omissions qui lui avoient échappé dans la premiere édition. Ainsi, on a tout lieu d'esperer que celle que l'on offre aujourd'hui au Public sera recue avec d'autant plus d'accueil qu'elle est infiniment superieure à la précédente pour la correction & l'exactitude, ce qui la rend en même tems beaucoup plus intelligible, par la correspondance intime qui regne à présent entre le discours & les figures qui y sont relatives.

TABLE DES TITRES

DU TROISIEME TOME.

SECONDE PARTIE DU IV. LIVRE.

Des Voûtes composées de deux ou de plusieurs Surfaces.

FIN DE LA TABLE.

L'approbation du Cenſeur, & le Privilege général pour cet Ouvrage, ſe trouvent au commencement du Tome premier, réimprimé en 1754, chez le même Libraire, avec des augmentations conſidérables & des corrections données par l'Auteur.

TRAITÉ



TRAITÉ DE STEREOTOMIE.

SECONDE PARTIE DU QUATRIEME LIVRE.

DES VOUTES COMPOSÉES

DE DEUX OU DE PLUSIEURS SURFACES.



PRÈS avoir parcouru toutes les especes de surfaces des doëles des voûtes que j'appelle *simples*, parce qu'elles ne sont interrompues par aucun changement de direction, il nous reste à voir comment on peut rassembler quelques parties de ces surfaces, pour en former une seule voûte *composée* de figures semblables ou différentes, faisant entre elles des angles ou saillans ou rentrans.

Si l'on a fait quelque attention à ce qui a été dit à la seconde partie du premier livre, touchant la pénétration des corps, on concevra facilement quelles doivent être les intersections des

ſurfaces des voûtes qui ſe rencontrent ou qui ſe croiſent en angle ou ſaillant ou rentrant, & l'on connoîtra la nature des lignes courbes qui ſe forment aux arêtes de ces angles, lorſqu'ils ſont ſaillans, ou dans leur creux, lorſqu'ils ſont rentrans, ce que nous appellons les *angles d'enfourchemens*, en quoi conſiſte toute la difficulté des *voûtes compoſées* de pluſieurs ſurfaces. Si ces lignes courbes ſont planes, on trouvera le moyen de les décrire par les problêmes de la premiere partie du ſecond livre. Si elles ſont à double courbure, on verra par la troiſieme partie du même livre, que pour parvenir à les décrire, il faut s'y préparer non-ſeulement par la voie de la projection, mais auſſi par la formation d'une des ſurfaces courbes que donne une de leurs projections. De quelque nature que ſoient ces courbes d'interſection des ſurfaces de deux voûtes qui ſe rencontrent, il eſt clair qu'elles déterminent les extrêmités des directions de chaque doële, ou de l'extrados, par conſéquent qu'elles fourniſſent les moyens de les développer pour connoître l'étendue de chaque partie que peut comprendre un vouſſoir de grandeur donnée, ſoit qu'on rectifie les arcs de ces courbes méchaniquement, ſoit qu'on ſe contente d'en prendre les cordes pour la formation des ſurfaces planes inſcrites que nous appellons *doëles plates*; ainſi tout ce que nous avons à dire des *voûtes compoſées* de deux ou de pluſieurs ſurfaces égales ou inégales, ſemblables ou différentes, qui aboutiſſent les unes aux autres, pour former une ſeule voûte de pluſieurs parties, n'eſt qu'une application des principes de théorie & de pratique du premier tome, compris dans le premier, le ſecond & le troiſieme livre, auquel nous pourrons renvoyer le lecteur, pour y trouver les démonſtrations des traits de chaque voûte, & abréger ainſi le diſcours.

Pour montrer plus ſenſiblement la conformité de ce troiſieme tome avec la ſeconde partie du premier livre, qui concerne la pénétration mutuelle des corps ronds de même ou de différente eſpece, comme ſpheres, cônes, cylindres, anneaux, & helices, nous ſuivrons à peu près le même ordre de combinaiſons des voûtes qui leur reſſemblent que nous avons obſervé à l'égard de ces mêmes corps, avec cette différence que nous les appellerons des noms conſacrés à l'architecture. J'ai dit *à peu près*, parce qu'il ne convient pas de s'aſſujettir préciſément au même ordre, en ce que le plus régulier étant d'aller du ſimple au compoſé, on ne peut regarder dans la pratique des traits la formation des corps les plus ſimples comme la plus facile. Quoique dans la

théorie la ſphere ſoit le corps le plus ſimple, & enſuite le cône, il n'en eſt pas de même pour le trait des voûtes des mêmes figures. Les traits des ſphériques ſont plus composés que ceux des coniques, & les coniques plus que les cylindriques; c'eſt pourquoi nous avons arrangé différemment les matieres de ce dernier tome, que nous diviſerons en dix chapitres.

Dans le premier, nous traiterons des rencontres & des pénétrations des berceaux entr'eux, en quelque ſituation qu'ils puiſſent être les uns à l'égard des autres, ce qui répond au ſixieme chapitre du premier livre. *Dans le ſecond*, nous traiterons des rencontres des berceaux avec les trompes & voûtes coniques. *Dans le troiſieme*, des rencontres des berceaux avec les cul-de-fours ou voûtes ſphériques. *Dans le quatrieme*, des voûtes coniques entr'elles. *Dans le cinquieme*, des coniques avec les ſphériques. *Dans le ſixieme*, des cylindriques, coniques, & ſphériques avec les annulaires. *Dans le ſeptieme*, des voûtes composées des ſurfaces irrégulieres, & des régulieres cylindriques, coniques, & ſphériques. *Dans le huitieme*, des annulaires hélicoïdes avec les irrégulieres. *Dans le neuvieme*, nous traiterons de l'appareil des eſcaliers, conſidérés en eux-mêmes, ſans aucune voûte, mais ſeulement par leurs *limons* & *coquille.* A ces neuf chapitres, nous en ajouterons un dixieme, diviſé en deux *appendices*, concernant les diſpoſitifs à la conſtruction des voûtes. *Le premier* traitera de la *pouſſée des voûtes*, & des moyens de trouver l'épaiſſeur des piédroits néceſſaire pour en ſoutenir l'effort. *Le ſecond* traitera de la charge des ceintres de charpente, avant que les voûtes ſoient fermées par leur clef. Enfin nous terminerons ce troiſieme & dernier tome par cet hors-d'œuvre que nous avons promis dans le programme, touchant l'examen de la vraie beauté & du bon & mauvais uſage de ce genre de décoration qu'on appelle les *Ordres* d'architecture.

CHAPITRE I.

Des enfourchemens qui ſe font à la rencontre des berceaux traverſés par d'autres berceaux.

LORSQUE nous avons parlé au premier livre des interſections des ſurfaces cylindriques, nous n'avons eu aucun égard à leurs ſituations relatives à l'horiſon, parce qu'il ne s'agiſſoit que

de la théorie des courbes. Il n'en eſt pas de même pour la pratique du trait, il faut conſidérer les demi-cylindres que nous appellons berceaux, en trois ſituations différentes, comme nous avons fait en traitant des voûtes ſimples. Premierement, *de niveau*, c'eſt-à-dire lorſque les impoſtes & la clef ſont en ſituation horiſontale. Secondement, *à-plomb*, lorſque les axes ſont verticaux; telles ſont les tours rondes, qu'on ne conſidere pas comme des voûtes, mais qu'on doit compter comme des berceaux *debout*, parce qu'il s'y fait des enfourchemens, lorſqu'ils ſont rencontrés ou traverſés par d'autres berceaux de niveau ou en rampe, dont les arêtes d'interſection ſont des courbes de la même eſpece que celles des autres rencontres de berceaux, ſuivant les angles d'interſection des axes entr'eux & leurs poſitions relatives. *La troiſieme* ſituation des berceaux eſt celle où leurs axes & leurs impoſtes ne ſont ni de niveau ni à plomb, mais en *rampe* ou *deſcente*.

Compoſition des voûtes de la premiere ſituation; de la rencontre des berceaux horiſontaux entr'eux.

Un berceau de niveau n'en peut rencontrer un autre de même ſituation que de deux manieres, ou perpendiculairement, ou obliquement, c'eſt-à-dire, en termes de l'art, que leurs directions ſont néceſſairement d'équerre, ou de biais, ſans deſcente.

Mais ſi l'on conſidere la poſition relative de certaines parties, comme des clefs & des impoſtes, chacune de ces rencontres peut encore être ſubdiviſée en différens cas. 1°. Lorſque les *clefs*, c'eſt-à-dire, les rangs de vouſſoirs les plus élevés, & les impoſtes, qui ſont les rangs de leurs naiſſances, ſe rencontrent à même hauteur, comme on voit au profil de la premiere figure,
Plan. 70. *Fig.* 1. où le point B de l'impoſte eſt commun au berceau BDc^2 & BHC, & où la clef D rencontre la clef H. 2°. Lorſque les impoſtes ſe rencontrent comme en A, & que les clefs ne peuvent ſe rencontrer, parce qu'elles ſont d'inégale hauteur, comme à la même figure, la clef *d* qui aboutit en I au-deſſous de H.
Fig. 2. 3°. Lorſqu'au contraire les clefs ſe rencontrent, & que les impoſtes étant à des hauteurs inégales ne peuvent ſe rencontrer; telles ſont les clefs H & D, de la figure ſeconde, qui ſe rencontrent, & les impoſtes E & B, qui ne ſe rencontrent pas. 4°. Enfin lorſque les clefs & les impoſtes ne ſe rencontrent point, comme la clef *d*, qui tombe au-deſſous de H en F & l'impoſte G, qui eſt au-deſſus de A.

Au premier cas, où les clefs & les impostes se rencontrent, l'arête d'enfourchement des doëles est toujours une demi-ellipse, soit que les directions des berceaux soient droites, c'est-à-dire, perpendiculaires entr'elles, ou qu'elles soient obliques; cette vérité a été démontrée au théorême 17 du premier livre. Au second cas, si les berceaux se rencontrent perpendiculairement, la courbe de l'arête d'enfourchement est un cicloïmbre, supposant que les deux berceaux soient en plein ceintre, comme il a été démontré au théorême 18 du même livre. Or parce que cette courbe n'est pas plane, mais à double courbure, on n'en peut former le ceintre ni la cerche sur des planches, comme pour les autres voûtes du cas précédent. Au troisieme & quatrieme cas des rencontres de berceaux, les courbes des arêtes d'enfourchement sont des ellipsimbres, lesquelles sont à double courbure, comme les cicloïmbres.

PROBLEME I.

Former en pierre, ou en bois, l'enfourchement de deux berceaux de niveau, qui se pénetrent perpendiculairement, ou obliquement.

Ce problême renferme deux cas différens. 1°. Lorsque les impostes & les clefs se rencontrent. 2°. Lorsqu'elles ne se rencontrent pas. Le premier cas comprend deux especes de voûtes, l'une de celles où les angles de rencontre des doëles sont saillans; on appelle celles-ci *voûtes d'arêtes.* L'autre de celles où les angles de rencontre des doëles sont rentrans, qu'on appelle *voûtes en arcs de cloître*; ces deux cas se trouvent rassemblés dans l'enfourchement de deux berceaux qui se rencontrent sans se croiser. Le second cas comprend toutes les rencontres des berceaux inégaux qui forment dans le plus grand une ouverture qu'on appelle *lunette.*

PREMIER CAS, représenté en perspective à la figure 13.

De la rencontre de deux berceaux de niveau d'égale ou d'inégale largeur, mais d'égale hauteur, qui aboutissent l'un à l'autre, sans se croiser, perpendiculairement ou obliquement.

Soit (figure 5.) le trapeze AEKB, le plan d'un berceau elliptique, ou si l'on veut en plein ceintre, & AFGB celui d'un autre berceau égal, ou plus large, ou plus étroit, mais d'égale Plan. 70. *Fig.* 5.

hauteur sous clef, dont l'axe xS fait avec l'axe SV du pré-
Plan. 70. cédent un angle quelconque, droit, obtus, ou aigu; nous le
Fig. 5. supposerons ici obtus. Il faut commencer par se déterminer au choix du ceintre primitif, qu'on peut prendre en deux ou trois endroits différens à chaque berceau, & par conséquent en six sur les deux; savoir, 1°. perpendiculairement à un des axes, comme en ER ou en Dr; 2°. à une des faces qui peut être biaise comme EK; 3°. obliquement & parallelement à l'axe du second berceau, comme en EB ou DB. Au premier cas l'arc droit est le ceintre primitif, aux deux seconds il est secondaire.

Nous prendrons pour ceintre primitif dans cet exemple le ceintre BHE, que nous ferons circulaire ou elliptique, il n'importe pour la construction. Ayant divisé ce ceintre en ses voussoirs aux points 1, 2, 3, 4, & abaissé de ses divisions des perpendiculaires sur son diametre BE, suivant l'usage ordinaire, qui le couperont aux points f, g, i, k, on menera par ces points des paralleles à la direction du berceau, qui rencontreront la diagonale AB aux points a^1, a^2, b^3, b^4, par lesquels on menera d'autres lignes paralleles au côté AD du second berceau, qui couperont le diametre oblique DB aux points o, n, m, l, & le diametre perpendiculaire du second arc droit Dr, aux points Q, q^2, q^3, q^4, & des paralleles au côté AE, qui couperont le premier arc droit aux points p^1, p^2, p^3, p^4. Les divisions correspondantes à celles du ceintre primitif étant ainsi trouvées sur tous ces diametres de différentes sections, il sera aisé de trouver les points des courbes des ceintres qui conviennent à chacune de ces sections & positions de leurs diametres, parce qu'elles sont toutes des demi-ellipses, plus ou moins alongées sur leur diametre horisontal, mais dont toutes les ordonnées sont d'égale hauteur.

Ainsi, il ne s'agit que de transporter la hauteur de la retombée de chaque division du ceintre primitif, sur les projections correspondantes dans chacun de ces diametres, où l'on a toujours marqué le même chiffre. Par exemple, la hauteur 1f, égale à k4 sera portée sur AB en a^1 1^d & b^4 4^d; la même sera portée sur le diametre ER en p^1 1^r, p^4 4^r, pour le premier arc droit: la même hauteur sera encore portée sur le diametre DB en o 1^u, l 4^u: enfin la même sera portée sur Dr en Q 1^r, q4 4^r. Pour le second arc droit, la seconde hauteur g2 égale à i3,

ſera auſſi portée ſur tous les mêmes diametres aux projections correſpondantes, où ſe trouvent les mêmes chiffres; ainſi l'on aura tous les points des ellipſes, qu'on doit tracer à la main, ou avec une regle pliante, les unes ralongées comme A T B, les autres raccourcies, comme R V E & D *u r*. Au lieu de porter toutes ces hauteurs en particulier, on peut élever des perpendiculaires indéfinies ſur tous les points de projections trouvées, & avec la hauteur ſous clef donnée & commune à tous les différens ceintres, on peut tracer chaque ellipſe, par le problême 7, du deuxieme livre; la trace de ſon contour coupera ces perpendiculaires en des points qui détermineront ceux de leurs diviſions. Cette méthode convient mieux que la précédente lorſque les vouſſoirs ſont un peu larges & les ellipſes petites, parce qu'alors ils comprennent des parties ſenſiblement courbes, dont il faut trouver le point du milieu par une ſous-diviſion que font les auteurs de la coupe des pierres, laquelle devient inutile par cette méthode, en ce qu'elle donne l'arc tout d'un coup, ſans qu'il ſoit néceſſaire d'en chercher la fleche, ce qui rend l'épure moins embrouillée de lignes.

Il peut arriver qu'on n'a pas beſoin de tracer tant de ceintres pour la rencontre de deux berceaux, comme lorſque chaque berceau eſt terminé par une face, ou un *formeret*, contre un mur qui eſt d'équerre ſur ſa direction, parce qu'alors l'arc droit & l'arc de face ſont confondus; mais s'ils ſont inégaux, on ne peut ſe diſpenſer de tracer cinq ceintres, deux à chaque berceau pour l'arc de face ou de *formeret* & l'arc droit, & un cinquieme A T B, qui eſt la commune interſection des deux doëles, où ſe fait l'angle d'enfourchement, lequel eſt rentrant en dehors depuis A juſqu'en T, & ſaillant en dedans depuis B juſqu'en T, ce qui forme deux ſortes de voûtes dans une ſeule, ſavoir, la voûte en *arc de cloître* pour la partie à angle rentrant de A en T, & une *voûte d'arête* de B en T; c'eſt dans ces angles que conſiſte proprement le trait dont il s'agit; car chaque berceau en particulier doit être formé, comme nous l'avons dit à la premiere partie de ce livre, ſur les ceintres donnés.

Il ne reſte plus à préſent qu'à trouver le biveau de l'angle que font les doëles plates des deux berceaux entr'elles à leur rencontre; ce qui eſt aiſé ſuivant nos principes de goniographie expliqués au troiſieme livre, page 448, dont nous allons faire l'application au cas préſent. Suppoſons qu'il s'agiſſe de trouver

le biveau des doëles plates du second rang de voussoirs, qui forment l'enfourchement désigné sur la projection AB par l'intervalle $a^1 a^2$, & sur l'élevation du ceintre de rencontre ATB, par la corde $1^d\ 2^d$. On prendra au ceintre primitif BHE, la hauteur *t* 2 de la retombée *t* 1 ou *gf* pour la porter perpendiculairement sur AB, de a^2 en *x*, d'où l'on tirera la ligne $x a^1$, à laquelle on fera une perpendiculaire *xy*, qui rencontrera AB au point *y*; par ce point *y* on menera une seconde perpendiculaire sur AB, qui rencontrera les projections des premiers joints de lit de chaque berceau $a^1 p^1$, a^1 Q prolongée aux points 8, 9; ensuite ayant transporté la longueur *yx* en *yz* sur AB, on menera du point *z* aux points 8, 9, des lignes droites qui comprendront l'angle 8 *z* 9, qui est celui du biveau que l'on cherche. Il faut remarquer que quoique cet angle soit rentrant dans la moitié de l'enfourchement de A en S, & saillant dans l'autre de B en S, il est toujours le même dans les rangs de voussoirs d'égale hauteur sur l'imposte de part & d'autre; la seule différence qu'il y a, c'est qu'au rentrant S A, on applique le dos du biveau qui est saillant, & à l'arête S B, on applique le dedans du biveau qui est rentrant; ce que l'on peut connoître sensiblement jettant les yeux sur les figures 7 & 9, qui représentent les deux premiers voussoirs d'enfourchement, l'un (7) destiné pour être mis en A, l'autre (marqué 9) pour l'arête à la naissance B.

Ces préparations supposées, il sera facile de rassembler tout ce qui est nécessaire pour tracer & tailler la pierre. Premierement, les panneaux de tête sont donnés à l'arc de face de chaque berceau & à son arc droit, comme il a été dit pour toutes les voûtes en berceau simples, droites ou biaises, suivant la direction de la face sur son axe, par exemple sur l'arc droit ER en $5^r\ 1^r$, $2^r\ 6$, au grand berceau, & sur l'arc droit D*r*, le même pour le petit. *Secondement*, on formera *les panneaux de doële plate* comme nous l'avons dit pour les berceaux simples biais, par le moyen de la projection pour les longs côtés, & par les cordes de l'élevation pour les têtes.

Ainsi on formera un trapeze ou rectangle au joint de tête, composé des deux côtés paralleles $a^2 p^2$, $a^1 p^1$, dont les mesures seront prises sur les mêmes lignes du plan horisontal, & avec la corde $1^r\ 2^r$ de l'arc droit EVR, pour intervalle perpendiculaire de ces deux paralleles; le quatrieme côté, qui leur est oblique sera égal à la corde $1^d\ 2^d$ du ceintre de rencontre ATB.

Le

Le panneau de doële de l'autre berceau sera fait de même; supposant, par exemple, que la branche de l'enfourchement au second berceau soit terminée au point 8, on fera 8 q perpendiculaire sur la projection du joint a^1 Q, puis on formera un trapeze rectangle en 8, dont les deux côtés qui doivent marquer les joints de lit seront pris sur le plan horisontal en a^1 8, & $a^2 q$, & leur intervalle perpendiculaire sur l'arc droit Dur, en 1^r 2^r, le quatrieme côté, qui marquera l'arête de rencontre des doëles plates, sera égal, comme au panneau précédent, à la corde 1^d 2^d de l'arc A T B. *Troisiemement*, les *panneaux de lit* se feront de la même maniere que ceux de doële, avec lesquels ils ont déja deux côtés communs, qui sont les joints de lit à la doële; l'intervalle de ces deux côtés sera pris à volonté, suivant l'épaisseur de la voûte, ainsi on formera de même un trapeze rectangle d'un côté avec les trois donnés, le quatrieme se trouve déterminé par les extrêmités des deux paralleles. Mais comme on peut se passer de panneaux de lit, en opérant par équarrissement ou par demi-équarrissement, nous ne nous arrêterons pas à en donner un exemple. *Quatriemement*, il est clair que les biveaux de lit & de doële sont donnés à l'arc droit de chaque berceau, comme si la voûte étoit simple, les uns sur l'arc R V E en 2^r, 1^r 5^r, & 1^r 2^r 6, & les autres sur l'arc Dur en D 1^r 5^n, 5^n 1^r 2^r, 1^r 2^r 6^n, &c. Enfin les biveaux de rencontre des doëles plates qui forment l'enfourchement des deux voûtes, ont été trouvés ci-devant par l'angle obtus 8 7 9, ainsi rien ne manque pour tracer & tailler la pierre. *Fig.* 5.

Application du trait sur la pierre; premiere maniere par équarrissement.

Premierement, pour la partie d'enfourchement A S, qui est en angle rentrant. Ayant dressé un parement g E F D (fig. 7.) pour servir de lit horisontal, supposé qu'il s'agisse du coussinet, on y tracera avec le biveau l'angle rentrant D A E de la figure 5, en d A e de la figure 7, & sur les lignes Ae, Ad, on en tracera d'autres à l'équerre pour les joints montans de doële, ou suivant l'angle A E B, ou A D B, s'il s'agissoit d'une tête biaise (fig. 5). Sur ces lignes, qui se rencontrent par exemple en g L, on formera deux paremens d'équerre au premier D F E (fig. 7.) qui seront les surfaces à-plomb g O, $g m$, sur les arêtes desquelles on portera de d en 8, la retombée D Q de la figure 5, & de e en *Fig.* 7.

p, (à la fig. 7) la retombée Ep^1 de la fig. 5. Par les points p & d on tracera des paralleles aux lignes e A, A d, qui ſe croiſeront en a : par les points p & 8, on tracera auſſi des paralleles à l'arête L g, qui eſt la rencontre des deux ſeconds paremens à-plomb ; puis par les trois points donnés $p\,a\,q$, 8 $a\,k$, on fera (par le problême I. du IV. livre, tome II.) paſſer deux ſurfaces planes, qui ſe rencontreront en angle rentrant, ſuivant une ligne $a\,i$, c'eſt-à-dire, que l'on emportera toute la pierre qui forme le parallelepipede $g\,i$. Ces deux nouvelles ſurfaces en angle rentrant ne ſont faites que pour y placer les lignes d'arête des lits avec les doëles des deux berceaux, par le moyen de la hauteur de la premiere retombée 1 f du ceintre primitif, ou de tout autre ceintre, parce qu'elle y eſt toujours égale. Ainſi on portera cette hauteur ſur les nouvelles arêtes $p\,q$, 8 k, & dans l'angle rentrant $a\,i$, pour tracer ſur les deux ſurfaces les lignes $1^r x$, $1^n x$, qui ſeront les arêtes des joints de lit à la doële. On tracera auſſi avec le biveau d'à-plomb & de coupe l'angle Q 1^r 5^n, qui donnera, à la figure 7, l'inclinaiſon du joint 8 1^n 5^n égale à celui de l'autre côté p 1^r 5^r, & par les trois points donnés x 1^r 5^r d'un côté, & x 1^n 5^n de l'autre, on fera paſſer deux ſurfaces planes qui ſe rencontreront ſuivant la ligne $x\,5^d$ en angle rentrant, & les lits ſeront formés.

Il ne reſte plus qu'à creuſer la doële, par le moyen du biveau mixte formé ſur la tête de l'arc droit de chaque berceau, comme E 1^r 5^r, pour le grand, & D 1^n 5^n, pour le petit ; la rencontre de leurs deux doëles cylindriques, faites ſuivant leur direction à la regle, ſera l'angle rentrant de l'enfourchement, *qu'il falloit former*. Pour en vérifier le contour & le rectifier des fautes qu'on auroit pu y faire dans l'exécution, on pourra lever une cerche ſur l'arc A 1^d du ceintre de rencontre A T B, la poſition de laquelle eſt déterminée à ſes extrêmités ſur les points A & x, (fig. 7.) & pour ſa direction ſuivant la diagonale g A qu'on a pu prolonger au lit de deſſous, pour en bien diriger la poſition.

L'exemple qu'on vient de donner pour le couſſinet doit auſſi ſervir pour les vouſſoirs au-deſſus ; car quoiqu'ils n'ayent pas un lit horiſontal, il faut toujours en ſuppoſer un, comme nous l'avons dit en parlant de la taille des vouſſoirs des voûtes ſimples par équarriſſement ; ainſi à ceux qui ſont au-deſſus du couſſinet, il y a une opération de plus qui eſt celle de la coupe du lit de deſſous, qui ſe fera en abattant la pierre par le moyen du biveau mixte, dont une branche, qui eſt la courbe, coulera ſur la doële,

& l'autre indiquera la pierre qu'il faut abattre ; ou bien, plus ſimplement, ayant tracé avec le biveau la coupe (par exemple *d*7, figure 7) on fera paſſer une ſurface plane par les trois points donnés A *d* 7 (par le problême I du quatrieme livre, tome ſecond) on en fera de même ſur l'autre joint montant *e* O, ſur laquelle ayant tracé la tête du lit de deſſous, par exemple *e* 6, on fera paſſer une ſurface par les trois points donnés A *e* 6, laquelle rencontrant la précédente, formera à l'interſection une arête ſaillante, qui doit ſe placer dans l'angle rentrant que font les deux du lit de deſſus du vouſſoir inférieur. On peut remarquer que le premier lit horiſontal n'a ſervi qu'à y placer les deux lignes droites, qui ſont les arêtes du lit de deſſous avec la doële ; le reſte de cette ſurface ayant été enlevé en dedans pour former la doële, & en dehors pour former le lit.

Secondement, pour la partie de la voûte qui eſt en *arête ſaillante*. De la maniere de tailler un vouſſoir d'enfourchement en angle rentrant, il ſera aiſé de tirer celle d'en tailler un de la partie BS, qui eſt au contraire en angle ſaillant, & qui fait ce qu'on appelle la *voûte d'arête* ; en effet il ne s'agit dans celui-ci que d'enlever toute la pierre qu'on avoit laiſſé dans l'autre, comme on peut le connoître ſans un plus long diſcours, par la comparaiſon des vouſſoirs deſſinés en perſpective aux figures 7 & 9, où l'on voit que les retombées ſont tranſportées du dedans de l'angle D A E au dehors de l'angle RB^r, ou KBG (figure 5.) ; au reſte l'opération eſt en tout la même, comme on va le voir.

Ayant dreſſé un parement pour le lit horiſontal, qui ſera permanent au couſſinet & de ſuppoſition aux vouſſoirs au-deſſus, on y tracera avec la fauſſe équerre l'angle $q6^4p$ (fig. 9.) des premieres retombées, & ſon parallele au dedans, qui eſt celui des piédroits *r* B R, ſuivant les diſtances *p* R, *q r*, On abattra enſuite la pierre en retour d'équerre au premier parement, ſuivant les lignes $q6^4$, $p6^4$, pour les faces de ſuppoſition, & ſuivant les lignes *q* O, *p* O d'équerre à ces faces pour les paremens des têtes qu'on y tracera, puis avec les biveaux d'à-plomb & de coupe $Q\,1^r\,5^n$, $p\,1^r\,5^r$, (fig. 5.) on abattra la pierre pour former les lits, qui ſe rencontreront en angle ſaillant ſur la diagonale $8^d\,4^d$, (fig. 9.) faiſant couler l'angle rentrant du biveau ſur les horiſontales $4^r\,4^d$, $4^n\,4^d$, qu'on a dû y tracer par la hauteur des retombées, comme on a fait au vouſſoir rentrant dont nous venons de parler, & on achevera le reſte de même.

Seconde maniere, par demi-équarrissement.

Pour opérer par équarrissement, il faut avoir une pierre bien pratiquée, où l'on puisse faire des paremens verticaux de supposition qui soient à vive-arête entr'eux & avec l'horisontal; de sorte qu'on ne peut faire usage d'une pierre qui n'est pas assez pleine pour recevoir cette préparation, quoiqu'elle soit de grandeur suffisante pour contenir le voussoir qu'on se propose de faire. En ce cas, après avoir formé le lit horisontal, on y tracera l'angle des piédroits DAE, pour le rentrant, ou *r*BR, pour le saillant, puis avec le biveau de l'angle de l'horison avec la doële plate *e*E 1^r, & *a* D 1^r, on abattra la pierre en angle obtus le long des lignes droites qui sont les côtés de l'angle donné; ces deux surfaces se rencontreront en ligne droite qui sera le fond d'un angle rentrant du côté de SA, & en angle saillant du côté de SB, on tracera sur chacune une ligne parallele à l'arête du lit à distance de la corde D 1^r, ou E 1^r qui sera l'arête de lit & de doële, par le moyen de laquelle, avec le biveau rectiligne de la doële plate & de coupe D 1^r 5^n, E 1^r 5^r, on formera les lits; nous supposons les têtes faites, comme dans la maniere précédente.

Troisieme maniere, par panneaux.

Les appareilleurs font rarement les voussoirs d'enfourchement, c'est-à-dire, de concours rentrant ou saillant de deux berceaux, par la voie des panneaux; c'est une espece d'usage de les faire par équarrissement, pour diminuer le soin de l'exécution, parce que les tailleurs de pierre qui en ont fait un ou deux, sont en état de les continuer d'eux-mêmes sur les hauteurs de retombées, & les retombées mêmes, dont on leur donne les mesures, sur-tout lorsque l'un des berceaux est en plein ceintre; cependant l'usage des panneaux, quoique un peu plus embarrassant, a bien son mérite pour ménager la pierre: le voici. Ayant dressé un parement pour servir de doële plate d'un des berceaux, on y appliquera le panneau qui lui convient, par exemple *a b d c*, pour en tracer le contour; puis on prendra le biveau de l'angle des deux doëles plates qui a été trouvé sur l'épure, par exemple l'angle 8 7 9, de la figure 5, qu'on appliquera perpendiculairement au côté *e d*, pour abattre la pierre suivant ce qu'indiquera une des branches, tenant l'autre appliquée sur la premiere doële

Fig. 6.

plate; l'angle de ce biveau ſera ſaillant pour les vouſſoirs vers A, & rentrant pour ceux qui ſont de S en B. Ainſi au premier cas, ce ſera le dos extérieur du bras qui ſervira, & pour le ſecond ce ſera l'intérieur. Or comme dans le premier il faut creuſer en angle rentrant, l'uſage du biveau eſt moins commode que lorſqu'il faut abattre en angle ſaillant: en ce cas, il n'y a pas grand avantage ſur la précédente méthode, parce qu'il n'y a point de pierre à épargner. La doële plate étant faite, on abattra la pierre pour former les lits avec les biveaux de lit & de doële plate, & les têtes ſe feront en faiſant paſſer une ſurface plane par les angles & par un retour d'équerre ſur la direction du vouſſoir, s'il s'agit d'un joint tranſverſal, ou ſuivant l'angle du biais, ſi le vouſſoir fait une portion de face biaiſe. La figure 6 fait voir un vouſſoir d'enfourchement renverſé, deſſiné en perſpective pour y montrer ſes doëles *abdc*, *defc*, qui font un angle ſaillant ou rentrant le long du côté *dc*; ſecondement les lits rentrans du deſſus *blmdcg*, les lits de deſſous *acfhik*, qui font un angle ſaillant en *ic*, & une tête *fegh*.

Corollaire. I.

DES VOUTES EN ARC DE CLOITRE.

Nous avons déja dit qu'on appelloit voûte en arc de cloître celle qui étoit compoſée de portions de berceaux dont les doëles ſe rencontroient en angle rentrant. D'où il ſuit que ſi l'on répete en ſens contraire, la partie de voûte de la figure 5, dont le triangle D A E eſt la projection, ſuppoſant que D E paſſe par S, on aura une voûte en arc de cloître de quatre côtés, dont l'extrados eſt repréſenté à la figure 11, & la projection horiſontale à la figure 8 en A D*ae*. Si pluſieurs berceaux ſe croiſoient de même, il ſe formeroit une voûte en arc de cloître de plus de quatre côtés en nombre pair; ſi au contraire ce n'étoit qu'une rencontre de demi-berceau, il ſe formeroit une voûte en arc de cloître en nombre de côtés impair; tels ſont par exemple les voûtes des chapiteaux des guérites des fortifications qui ſont ſur des pentagones. D'où il ſuit que ſi la tour voûtée étoit d'un grand nombre de côtés, chaque portion de berceau deviendroit auſſi très étroite, & la voûte approcheroit d'autant plus de la ſphérique que le nombre ſe multiplieroit, de ſorte qu'on pourroit

considérer une voûte sphérique comme un arc de cloître d'une infinité de côtés.

Lorsque les côtés de la tour à pans voûtés sont égaux entre eux, il est évident que la voûte n'est qu'une répétition d'un même segment de cylindre, pour le trait duquel il n'y a que deux ceintres a décrire, savoir, l'arc droit, & celui d'enfourchement dans l'angle rentrant des doëles qui se rencontrent. Mais lorsque les côtés & les angles sont inégaux, comme à la figure 8, il faut tracer plusieurs ceintres différens, savoir. 1°. Le ceintre
Fig. 8. du milieu de direction sur le diametre oblique, comme M*m*, ou son égal *ae* qu'on a tracé en *a*H*e*, pour trouver les projections des joints de lit sur toutes les arêtes, comme en a^1 a^2 sur la diagonale A *a*, & p^3 p^4 sur la diagonale D *e*, par la reproduction des points des projections *f*, *g*, *i*, *k*, conduits parallelement au côté A *e*, jusqu'à la diagonale *a* A, & de-là parallelement au côté D A, jusqu'à la diagonale D*e*. 2°. Le ceintre de direction transversale aussi oblique *n* N; on peut se passer de celui-ci. 3°. Le ceintre de l'arc droit sur les petits côtés, comme T *t*, ou son égal D R. 4°. Celui sur le grand côté comme *r*'' R'', ou son égal D *r*. 5°. Le ceintre de diagonale courte *a* A, qui est l'arc *a h* A. 6°. Enfin le ceintre de diagonale longue D*e*; il est visible que si les côtés sont inégaux & en nombre impair, il faut opérer à part pour chaque pan de voûte comme nous allons le montrer.

Des voûtes en arc de cloître sur un poligone de côtés en nombre impair.

Soit (fig 15, pl. 71.) le triangle scalene ABD, sur lequel
Plan 71. on veut élever une voûte en arc de cloître. On commencera par
Fig. 15. diviser ses angles chacun en deux également par les diagonales AC, BC, DC, qui se rencontreront en C, où sera le centre de l'arc droit C E*h*, lequel sera un quart de cercle ou d'ellipse formé sur une ligne CE, perpendiculaire à un des côtés A B du poligone, n'importe lequel. Cet arc sera le ceintre primitif qu'on divisera en ses voussoirs en nombre incomplet, par exemple en deux & demi, cet excédent de demi est pour la moitié de la clef. Ayant abaissé des divisions 1 & 2 des perpendiculaires sur le rayon CE, qui le couperont aux points P, *p*, on menera par ces points des paralleles au côté AB, qui couperont les diagonales A C, BC aux points *ef*; *g*, *i*, par lesquels on re-

produira d'autres paralleles aux côtés BD, A D, qui couperont la diagonale C D aux points *l*, *k*, & la projection des joints de lit sera faite. Il faut présentement former les cerches ralongées des ceintres des angles rentrans des doëles, qui sont des quarts d'ellipses bien faciles à tracer, parce que leurs abscisses sont données sur les diagonales de la projection aux points *e*, *f*; *gi*, &c, & leurs ordonnées égales aux correspondantes 1 P, 2 *p*; nous avons tracé pour exemple le quart d'ellipse C D s^h, qui est renversé pour la commodité de la place de la figure. Il ne reste plus qu'à faire usage de ces lignes pour tracer les voussoirs d'enfourchement par équarrissement ou par panneaux, comme il a été dit ci-devant touchant le trait de la partie D A E de la fig. 5 & D A *e* de la fig. 8, ce qu'il est inutile de répéter.

COROLLAIRE II.

DES VOUTES D'ARETES.

Si l'on revient aux figures 13 & 5 de la planche précédente, qui sont l'objet de ce problême, on reconnoîtra que si l'on joint ensemble quatre fois la moitié de la figure 13, marquée *r u s* V R, on aura une figure de deux berceaux qui se croisent en angle saillant, comme il est représenté à la figure 10, ce qu'on appelle *voûte d'arête*; ainsi la voûte d'arête tracée en projection à à la figure 4 n'est qu'une répétition de la moitié D B E de la fig. 5, ce qui fait de la clef une espece de croix, telle qu'on la voit à la figure 3. D'où il suit qu'on peut établir une voûte d'arête sur une base rectiligne en poligone d'un nombre de côtés quelconque, sans que le trait & la construction en devienne plus difficile, mais seulement plus composé. On observera seulement que si l'on tient les clefs de niveau & que le ceintre primitif soit circulaire, pris sur une des diagonales, plus il y aura de côtés, plus les ceintres des formerets seront surhaussés, parce que leur diametre horisontal se raccourcit pendant que le demi-diametre vertical est permanent. Et au contraire, si le ceintre primitif étoit pris sur un des côtés, & en plein ceintre, plus le nombre des côtés augmenteroit, plus la voûte s'abaisseroit, & si leur nombre étoit infini, elle deviendroit enfin plane. L'exemple que nous avons donné pour la moitié des figures 5 & 13, à la figure 4, montre le trait des voûtes d'arête sur des polygones en

Fig. 13 & 5.

nombre pair de côtés. Il suffira d'en ajouter un pour les impairs, où il y a un peu plus de difficulté, ou plutôt de variété.

Des voûtes d'arête sur des poligones impairs.

Dans les voûtes en *arc de cloître*, nous avons toujours établi la clef à l'interfection des diagonales qui divisent chacun des angles du polygone en deux également, parce qu'il convient de prendre pour rayon, ou pour un des axes du ceintre primitif, celui d'un cercle inscrit dans le polygone donné, lequel est perpendiculaire à chacun des côtés (par la quatrieme du 4[e] livre d'Euclide), & par conséquent l'arc droit commun à tous les demi-berceaux qui composent l'arc de cloître; ce qui rend la doële autant réguliere qu'il est possible; car si le milieu de la clef est plus près d'un côté que de l'autre, comme on peut le faire si l'on veut, il y aura autant de différens arcs droits qu'il y aura de demi-berceaux, lesquels seront les uns en plein ceintre, les autres surmontés ou surbaissés, suivant l'inégalité de ces distances variables qui seront un des axes des ceintres, celui de hauteur restant permanent & commun à tous. On ne doit pas opérer de même pour les voûtes d'arête, parce que ces rayons perpendiculaires ne tombant pas sur les milieux des côtés du
Plan 71. triangle isoscele ou scalene, les ceintres des formerets élevés sur
Fig. 17. ces côtés deviennent *corrompus* (en terme d'architecture), c'est-à-dire, composés de deux arcs de courbes inégales, savoir d'un quart de cercle A R, & d'un quart d'ellipse R B, dont le rayon *g* A est égal à S *g*, comme le Pere Derand fait ceux de la voûte d'arête établie sur un triangle rectangle isoscele (tels sont les arcs A R *n* B & A *r* N D de la figure 17), ou bien de deux quarts d'ellipses différentes, ce qui est aussi désagréable à la vue. Or il est clair que l'on doit avoir dans ce genre de voûte plus d'attention à la régularité de ces ceintres, qui en fait la beauté, qu'à la position de la clef dans l'interfection des diagonales qui partagent les angles en deux également; d'où il suit que le trait de cet auteur doit être rejetté, parce qu'il fait des irrégularités difformes sans aucune nécessité & que l'on peut parfaitement bien éviter. Il faut donc chercher la projection de la clef de la voûte d'arête sur un triangle (par la 5[e] proposition du même livre d'Euclide cité, qui est à la suite de la précédente); c'est-à dire, qu'il faut circonscrire un cercle au polygone donné, afin que

toutes

toutes les diagonales, qui ſont les projections des arêtes de la voûte, deviennent égales entr'elles, & que les directions des clefs de chacun des berceaux tombent perpendiculairement ſur les milieux des côtés du polygone, pour les diviſer également & non pas inégalement, comme a fait le Pere Derand dans le Traité cité (quatrieme partie, chap. 4.) : mais cette conſtruction a un autre inconvénient, qu'on ne peut éviter qu'en changeant la direction droite des berceaux obliques, comme nous le dirons ci-après.

Soit, pour exemple, le triangle A B D, qu'on veut couvrir d'une voûte d'arête ; ayant diviſé en deux également deux de ſes côtés, comme A B en C, & A D en E, on leur tirera par ces points des perpendiculaires indéfinies E X, C X qui ſe croiſeront en X, où ſera le milieu de la clef, duquel on menera aux angles A, B, D, les diagonales A X, B X, D X qui ſeront égales entr'elles, & par le même point X on tirera ſur le troiſieme côté D B la perpendiculaire X*e*. On voit que ce milieu de clef X eſt bien différent de celui que donne le trait de la voûte en arc de cloître, provenant de la diviſion des angles en deux également par des diagonales qui ſe croiſent en *m*. Il ſuit de cette conſtruction, 1°. que le point X s'approchera d'autant plus du point *m*, que les côtés du triangle approcheront de l'égalité entr'eux ; de ſorte que ces points X, *m* ſe confondront en un ſeul lorſque les trois côtés ſeront parfaitement égaux. 2°. Que ce point X s'approchera d'autant plus d'un des côtés que l'angle qui lui eſt oppoſé approche du droit ; de ſorte que ſi cet angle eſt droit, le milieu de la clef, ſuivant cette conſtruction, tombera ſur le milieu de l'hypotenuſe, parce que la profondeur du berceau dont elle eſt le diametre s'évanouit & ſe réduit à la ſeule ligne du ceintre commun aux deux autres ; ainſi au lieu de trois berceaux, il n'en faut plus que deux pour couvrir cet eſpace triangulaire, ce qui paroît très-ſingulier, mais qui eſt ſenſible en ne conſidérant que la moitié D B E des figures 4 & 5, planche 70. *Fig. 16.*

Ce cas eſt le dernier où cette conſtruction puiſſe ſervir ; car ſi le triangle avoit un angle obtus, il eſt évident que le point X tombant au dehors de la figure, le plan ou mur du formeret du grand côté couperoit les deux berceaux réunis au dedans du concours des clefs ; ce qui formeroit une courbe compoſée de deux arcs dont l'interſection ſeroit arquée en *contrebas* & ſeroit

Fig. 16. un angle curviligne d'arête qui ne pouroit se soutenir. Il faut donc conclure de toutes ces observations, qu'il ne convient pas toujours de mettre le sommet de la clef dans l'intersection des diagonales en *m*, ni dans l'intersection des perpendiculaires sur les milieux des côtés en X; mais qu'on peut placer à volonté le milieu de la clef, par exemple en S, sans autre inconvénient que celui du changement des directions droites XE, XC en obliques SE, SC, ce qui ne cause aucune difformité à la voûte.

Cela supposé, pour former le trait de la voûte d'arête sur le triangle scalene ABD, on choisira tel côté que l'on voudra pour diametre du ceintre primitif, par exemple AB, sur lequel on tracera un demi-cercle AHB, ou une demie ellipse surhaussée ou surbaissée, comme on le jugera à propos, puis l'ayant divisé en ses voussoirs aux points 1, 2, 3, 4, on abaissera à l'ordinaire des perpendiculaires sur ce diametre, qui le couperont aux points P, *p*, Q, *q*. On placera ensuite à volonté le milieu de la clef en S hors des regles, ou en *m* suivant la regle des arcs de cloître, ou en X suivant celle des voûtes d'arêtes, tout comme on le jugera à propos. De ce sommet S, on tirera des lignes aux milieux C, E, *e*, des trois côtés, & aux trois angles A, D, B, ensuite par les points P & *p*, on tirera les paralleles PN, *pn*, à la ligne DB, qui couperont le côté AD, aux points N & *n*. De même par les points Q & *q*, on tirera des paralleles au côté AD, qui couperont DB aux points O & *o*. Par les points N & *n*, on menera les lignes N*f*, *ng*, paralleles à la direction ES, & P*f*, *pg*, paralleles à la direction CS, qui se rencontreront sur la fausse diagonale AS en *f* & *g*; on tirera de même O*i*, *ok* paralleles à la direction S*e*, qui couperont la fausse diagonale SB en *i* & *k*; ainsi de même pour les demi-côtés restans DE, D*e*, CB, & l'on aura toutes les projections des divisions des voussoirs, tant sur les diametres des formerêts que sur les vraies ou fausses diagonales, par le moyen desquelles projections & des hauteurs des retombées du ceintre primitif AHB, on fera les ceintres des formerêts A*h*D, B*h*D, & même ceux des arêtes SA, SB, SD, si l'on veut; ce qui est trop facile pour s'y arrêter.

On voit à la figure 17, où le triangle donné est rectangle isoscele, la convenance de notre construction, parce que 1°. si l'on fait (fig. 16.) les directions CX, *m* X des berceaux qui ont

pour diametre les côtés AB & AD, qui comprennent l'angle droit, perpendiculaires à ces côtés, la position de la clef tombe en X sur le côté BD, & fait évanouir le troisieme berceau, qui étoit ci-devant exprimé par la projection DSB. 2°. Si l'on met le sommet de la clef en S, sur le point d'interfection des diagonales AS, BS, DS, & que l'on veuille (comme le P. Derand) faire les deux berceaux ASB, ASD, de direction droite sur AB & AD, il résulte qu'on ne peut les faire ni elliptiques, ni circulaires, mais d'un contour irrégulier, comme sont les courbes ARB, A*r*D, (fig. 17.) parce que les sommets R & *r* tombent à plomb des points *g* & G, produits par les perpendiculaires tirées du point S; donc il faut changer ces directions droites S*g* & SG en obliques SC & S *m*, pour avoir un milieu *h* au sommet d'un demi cercle, ou de la demi-ellipse, prise pour ceintre primitif. Il faut encore remarquer qu'on pourroit prendre si l'on vouloit, une direction oblique comme SC, & une droite comme SG, en faisant le ceintre AKD corrompu; ce que nous observerons en passant sans en conseiller la pratique. L'application du trait de ces voûtes est visiblement la même que celle des berceaux d'égale hauteur qui se rencontrent perpendiculairement ou obliquement, dont ces cas ne sont que des corollaires. *Fig. 16.*

Des voûtes d'arête incompletes.

J'appelle ainsi celles dont les arêtes ne font qu'un quart de ceintre; telles sont par exemple celles de la plûpart des chevets de nos anciennes églises, qui sont à *pans coupés*, dont la clef est sur le milieu du ceintre qui rachete la voûte de la nef; il est visible qu'une telle voûte est la moité d'un exagone de même espece, dont on a retranché l'autre moitié suivant un de ses diametres; ainsi il n'est pas nécessaire d'en parler en particulier, après ce qui a été dit en général. Il faut seulement observer que de telles voûtes demandent à être bien appuyées à la clef pour subsister, parce que les arêtes pousseroient au vuide au-delà de l'arc doubleau, s'il n'y avoit pas une voûte au-devant.

Des berceaux croisés qui rachetent des plafonds.

Le Pere Derand (chap. 19 de sa quatrieme partie) annonce le trait d'une *voûte d'arête sur un quarré*, *ayant un plafond quarré au milieu*, il n'est pas difficile de montrer qu'il propose une chose

impoſſible, s'il prétend raccorder la voûte avec le plafond; car puiſque les directions des côtés du quarré du plafond ſont perpendiculaires aux axes des berceaux qui ſe croiſent pour former la voûte d'arête, elles ne peuvent être que les cordes ou les tangentes des ſections tranſverſales de ces cylindres, leſquelles ſont eſſentiellement des lignes courbes circulaires ou elliptiques; par conſéquent les côtés du quarré ne peuvent ſe raccorder avec le milieu de la croiſée de la voûte que par le moyen de la ſaillie du quadre qu'il y demande pour *la beauté de l'ouvrage*; il auroit dû dire, pour en cacher un peu le défaut & la diſcordance, parce que les angles de ce quadre ſeront plus bas que la clef de toute la hauteur de la flêche de l'arc que ce côté de quarré comprend, auquel la bordure ſe termine par une ſaillie inégale depuis ſon milieu à ſes angles, laquelle ſera d'autant plus difforme que le plafond ſera grand. Il n'en eſt pas de même pour les voûtes en arc de cloître; on peut fort bien y pratiquer au milieu un plafond, ſi grand que l'on voudra, en voici la raiſon. Les joints de lit de chaque aſſiſe des voûtes d'arête ſont des lignes droites horiſontales paralleles aux impoſtes de chaque berceau; par conſéquent on peut pratiquer au milieu de cette eſpece de voûte une ſurface plane d'autant de côtés que le nombre des impoſtes; quarrée ſur une voûte de deux berceaux qui ſe croiſent en angle droit, exagone ſur trois; ainſi du reſte. J'ai dit qu'on pouvoit faire ce plafond ſi grand que l'on veut, mais à condition qu'il ſervira d'étréſillon pour contenir les vouſſoirs qui pouſſent au vuide entre les angles rentrans, car il n'y a que ceux des angles qui ſe contiennent mutuellement par le concours des deux diametres de leurs côtés. De ces deux obſervations il ſuit que le trait du même Auteur (chap. 20, à la ſuite du précédent) eſt partie bon partie mauvais, comme nous le dirons en parlant des voûtes à doubles arêtes.

Application du trait ſur le bois pour la charpente, ou pour la menuiſerie.

On ne peut pas toujours ni par-tout faire des voûtes de pierres ou de briques; on a ſouvent des raiſons de les faire en charpente, ou du moins de revêtir de lambris de menuiſerie celles qui ſont faites de pierre ou de briques. Les raiſons que l'on peut avoir de faire des voûtes de charpente ſont : 1°. La rareté ou la cherté de la pierre dans le lieu où l'on bâtit, lorſqu'il eſt

auprès d'une forêt. 2°. La foibleſſe des murs ſur leſquels on veut établir une voûte, dont la *pouſſée* pourroit les renverſer, ſi on la faiſoit de pierre ou de briques. 3°. La crainte des ſecouſſes des tremblemens de terre, dans les pays qui y ſont fort ſujets. Par cette raiſon toutes les Egliſes de Lima, grande Ville capitale du Pérou, où j'ai été, ſont faites de charpente recouverte d'un lattis de cannes & de mortier; j'en ai vu plus de ſoixante ſi bien faites que je ne les jugeai pas telles du premier abord, étant ornées d'Ordres d'architecture, de pilaſtres, corniches, arcs doubleaux, &c. tout comme les voûtes de maçonnerie, comme je l'ai dit dans la relation de mon voyage imprimé en 1716, à Paris, en Hollande, en Angleterre, où il a été traduit dans la langue du pays. On a auſſi quelquefois raiſon de revêtir en lambris de menuiſerie des voûtes qui ne ſont pas agréables à la vue & qu'on ne veut pas démolir, ſoit pour en changer le contour, comme du gothique au plein ceintre, ou pour en cacher quelques imperfections, ou pour les rendre plus ſuſceptibles des ornemens de ſculpture, dorure & peinture.

Soit que l'on ſe propoſe de faire en bois une voûte en arc de cloître, ou une voûte d'arête, on fera l'épure comme pour les voûtes de pierres; les ceintres étant tracés pour les formerêts & arcs doubleaux, les ouvriers ne trouveront non plus de difficulté à les exécuter en bois, qu'à faire une demi-roue de pluſieurs jantes, parce que ces pieces ſont directement tranſverſales.

Il n'en eſt pas tout-à-fait de même pour les ceintres des diagonales creuſés en angle rentrant pour les arcs de cloître, ou débillardés en angle ſaillant pour les arêtes des voûtes qui en portent le nom; il y faut un peu plus de façon. Soit (fig. 4.) le paralelogramme DBE*b*, le plan horiſontal d'une voûte d'arête biaiſe, dont l'arc ſurbaiſſé DTE eſt le ceintre d'arête formé ſur la plus grande diagonale DE, pour axe horiſontal, & la hauteur ST donnée égale à CH du ceintre primitif DH*b*. On commencera par déterminer la longueur de la piece de bois ſur l'épaiſſeur de celle qu'on veut employer, conſidérant la flêche & la profondeur de l'arc qu'on y peut creuſer, & ajoutant à cette longueur celle des tenons néceſſaires pour l'aſſemblage avec les pieces ſuivantes & la ſabliere ſur laquelle elle doit être poſée. Plan 70. *Fig.* 4.

Suppoſons qu'il s'agiſſe d'un ceintre de diagonale d'une voûte d'arête DTE, (fig. 4.) on y inſcrira une corde, par exemple

D 3^d, égale à la longueur du bois donnée, laquelle fera avec la diagonale ED, prolongée vers *k*, l'angle obtus 3^d D *k*, qu'on prendra avec la fauſſe équerre pour couper en *gras* le bout inférieur de la piece de bois aux deux côtés du tenon qui doivent s'appuyer ſur les bords de la mortoiſe de la *ſabliere* * (qui eſt la piece de bois, où eſt la naiſſance de la voûte.) On levera enſuite la cerche ou le panneau du ſegment d'ellipſe D 4^d 3^d, avec laquelle on tracera ſur les côtés de la largeur le creux de la piece de bois que l'on coupera cylindriquement, comme ſi l'on vouloit en faire une ſimple portion de berceau, comme l'on voit à la figure 14, la partie de *g* en G. Sur le milieu de cette ſurface concave, on tracera avec un *truſquin*, ou en traînant le compas ouvert de la moitié de l'épaiſſeur, ou ſeulement un *échantillon*, la ligne du milieu D *b* 3, qui marquera l'arête que l'on doit former. On tracera enſuite ſur l'épure de la figure 4*, une ligne *ig*, perpendiculaire à DE, ſur laquelle on portera de part & d'autre la moitié de l'épaiſſeur du bois de D en *i* & de D en *g*, par où on menera des paralleles à DE ou D*k*, qui rencontreront le côté BD prolongé en *a*, & *b* D prolongé en *e*. On portera les longueurs *i a*, ſur un côté de la hauteur ou largeur du bois, & *g e* de l'autre, pour tracer par ces deux points des lignes courbes paralleles aux arêtes *ik* I (figure 14.) & *gf* G, comme *crn* & ſon oppoſée, que le deſſein ne peut repréſenter, parce qu'elle eſt cachée par l'épaiſſeur du bois. Enfin par la ligne du milieu D*b* 3 & cette derniere *crn*, on débillardera, c'eſt-à-dire, on abattra le bois en chanfrin, comme il eſt repréſenté en *brn* 3, & de même de l'autre côté, ce qui formera l'arête qu'on voit en perſpective au bout *n* 3 *o*, laquelle ſera celle d'une des croiſées de la voûte d'arête qu'on veut faire. L'autre arête de croiſée ſe formera de même ſur le ceintre de même hauteur qui a pour diametre la diagonale *b* B (figure 4.) ou ſi l'on veut revenir à la figure 5, qui eſt la primitive, d'où cet exemple eſt tiré, ce ſera le ceintre A T B. On operera de même pour chacune des pieces de bois qui doivent s'aſſembler avec les autres, à peu près comme les jantes d'une roue.

Ce mot vient du Latin *ſubligare*, lier pardeſſous.

Planche 71. *Fig.* 14.

Pl. 70.

Pl. 71.

Si au lieu d'une voûte d'arête il s'agit de faire un arc de cloître, il eſt viſible qu'il faut opérer en ſens contraire de ce qu'on vient de faire, c'eſt-à-dire, creuſer en angle rentrant le bois qui formoit un angle ſaillant. Ainſi, (figure 8.) ayant tiré comme ci-devant la perpendiculaire *i g* ſur la diagonale D*e*, on me-

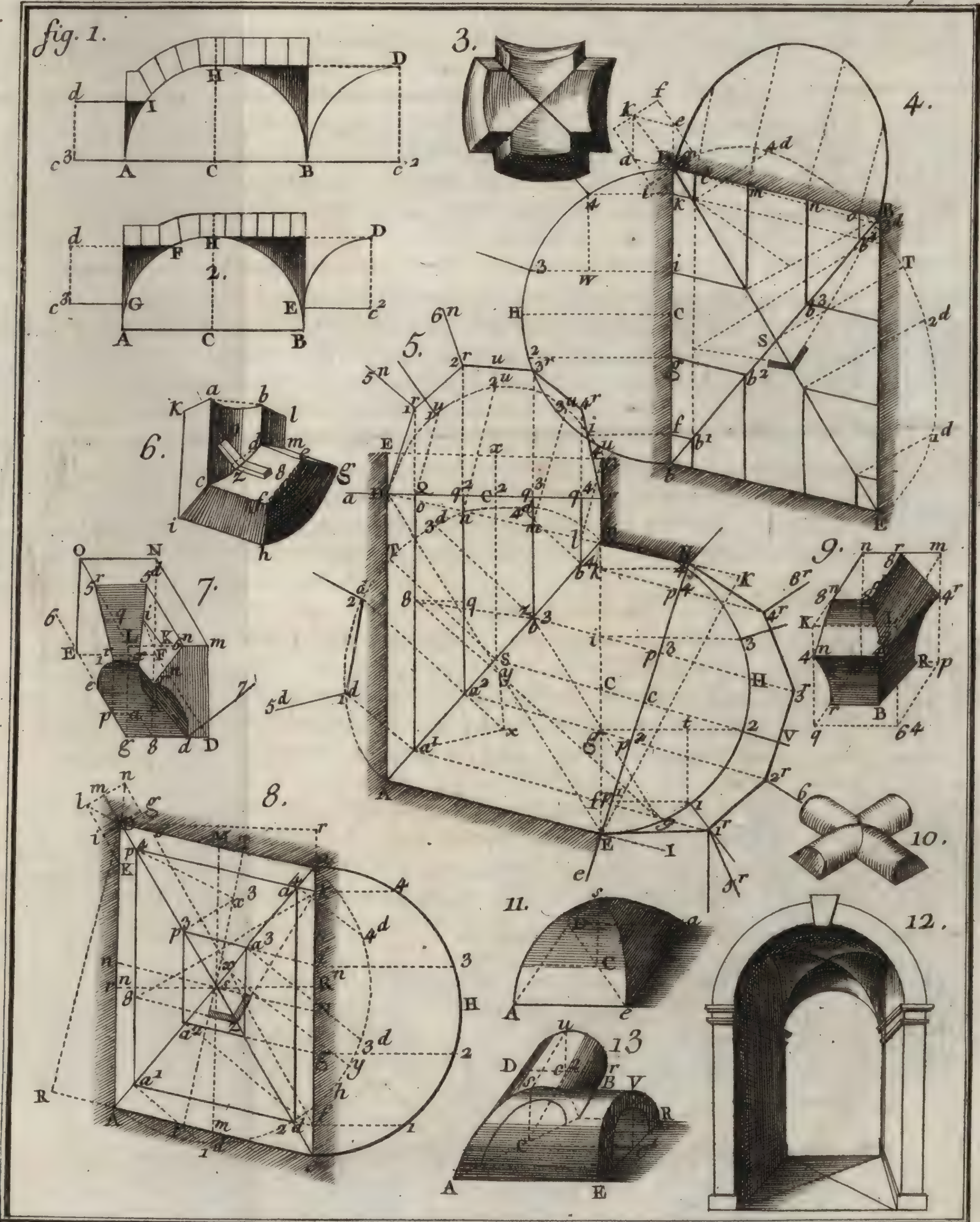
nera par les points *i* & *g*, donnés pour l'épaiſſeur du bois, des paralleles *ik*, *go* à la diagonale D*e*, qui couperont les côtés A D & *a* D en *k* & *o*, & donneront des longueurs *i k* & *g o* inégales, ſi la voûte eſt biaiſe ou *barlongue*, c'eſt-à-dire, plus longue que large. Si l'épaiſſeur du bois eſt peu conſidérable par rapport à la diagonale qui croiſe la premiere, on pourra ſe ſervir pour tracer les arêtes par *o* & par *k* de l'arc du ceintre fait ſur D*e*, comme en D T E de la figure 4, parce que la différence de ce ceintre à ceux qu'on y doit faire paſſer, dans la rigueur, peut être négligée ſans erreur ſenſible Mais ſi cette épaiſſeur de bois & l'obliquité ou l'inégalité des côtés de la voûte eſt conſirable, alors il faut tracer des arcs d'ellipſe particuliers, un pour l'arête paſſant par *k*, l'autre pour celle qui paſſe par *o*. Il faut de plus obſerver que s'il s'agit d'une piece de charpente qui doive être couverte d'un latis & de plâtre, les deux côtés D *k* & D*o* doivent être inégaux dans les voûtes biaiſes & barlongues; mais s'il s'agit d'un revêtement de menuiſerie, ces côtés devenans les largeurs des bâtis, doivent être égaux entr'eux. Quoi qu'il en ſoit, on tirera par les points *k* & *o* des paralleles à la diagonale D*e*, par exemple, par *o* la ligne *of*, qui coupera *a e* en *f*, & la diagonale A*a* au point *x*, ou on élevera ſur A*a* une perpendiculaire *xy* qui coupera le ceintre *a h* A en *y*; la ligne *o f* ſera l'arc horiſontal d'une ellipſe dont *xy* ſera la hauteur verticale; avec ces deux meſures on tracera une demi-ellipſe qui ſera le ceintre de chacune des arêtes, quoique l'une comme *k* avance plus que l'autre *o*. Les arcs de ce ceintre étant tracés chacun ſur une face de hauteur du bois, on le creuſera de l'un à l'autre en portion de berceau biais; ſur laquelle ayant tracé l'arc du milieu, on y creuſera le bois en angle rentrant *k* D *o*, ſuivant la cerche du ceintre formé ſur la diagonale D*e*, comme D T E de la figure 4, & la piece ſera achevée. *Fig. 8.*

Des voûtes d'arêtes gothiques.

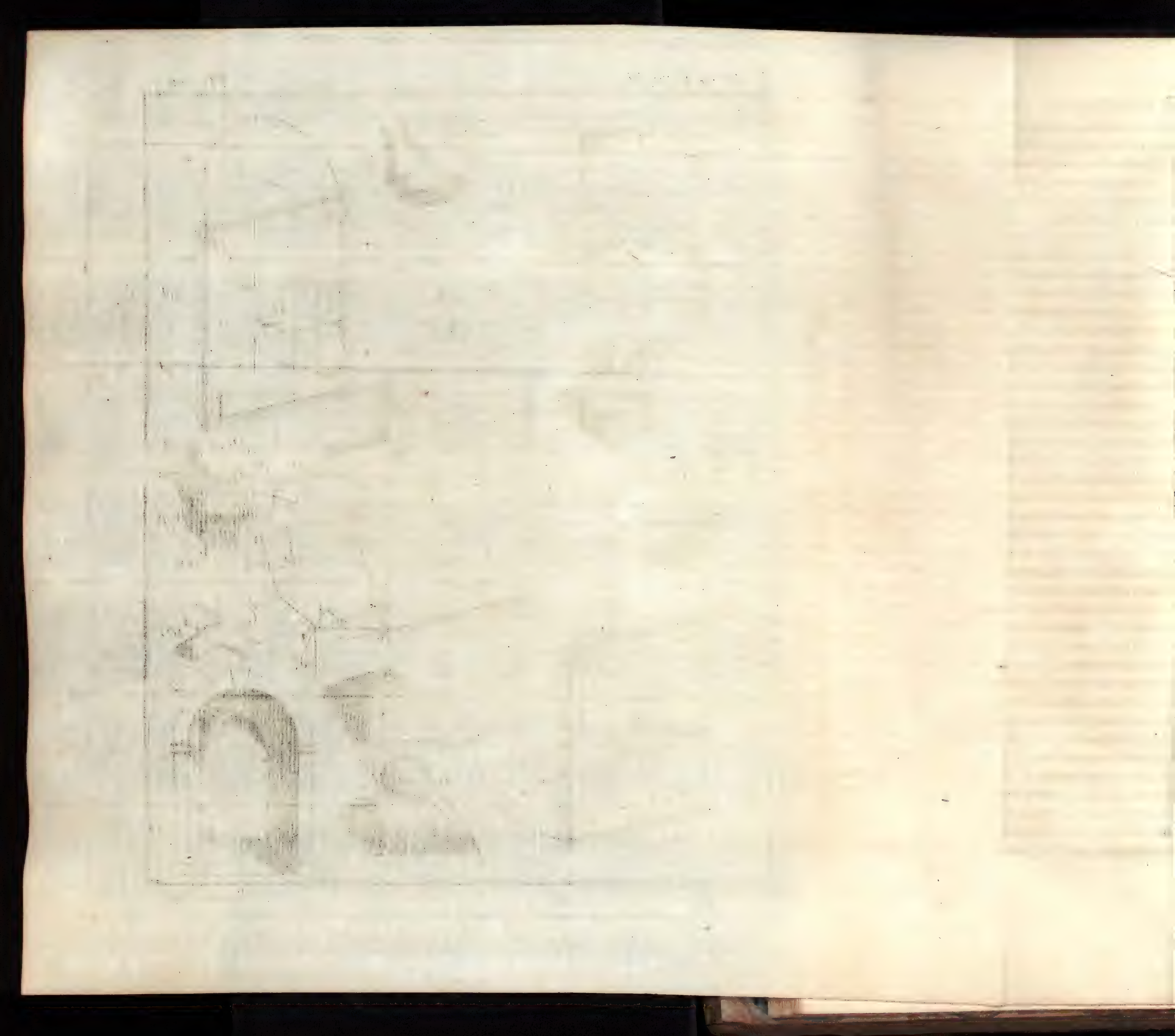
On appelle voûtes *gothiques*, ou ſelon le P. Derand, voûtes *modernes* & à *augives*, celles dont les ceintres perpendiculaires à leurs directions ſont compoſés de deux arcs de cercles, tracés de différens centres, faiſant un angle rentrant à la clef. La mode de ces voûtes, que nous tenions des Goths, ou plutôt ſelon quelques antiquaires des Maures, eſt tellement abolie qu'on n'en fait plus de cette eſpece dans les nouveaux bâtimens; mais *Fig. 26.*

comme dans les réparations des anciens cloîtres, égliſes, ou autres édifices, il ſe préſente des occaſions d'en rétablir quelques parties, il eſt néceſſaire d'en connoître le trait. Il faut premierement remarquer que les doëles des voûtes d'arêtes gothiques ſont très-rarement des portions de ſurfaces de cylindres, comme à nos berceaux & voûtes d'arêtes antiques, qui ſont uſitées dans l'architecture moderne; mais chaque pandantif eſt une portion triangulaire d'une eſpece de ſphéroïde irrégulier dont la ſurface ſe courbe depuis ſa naiſſance inſenſiblement, ſuivant la direction de la clef, à meſure qu'elle en approche; de ſorte que chaque pandantif eſt une ſurface à double courbure, dont nous devrions renvoyer le trait au rang des ſurfaces irrégulieres, cependant nous lui donnerons place ici par pluſieurs raiſons. Premierement, à cauſe de leur grande conformité avec les voûtes d'arêtes régulieres. Secondement, parce que leurs nervures en ſont le principal objet pour la coupe des pierres, en ce qu'il n'eſt preſque jamais queſtion d'appareil pour les pandantifs que ces nervures terminent, à cauſe que leur peu d'épaiſſeur rendroit la coupe preſque inſenſible dans chaque vouſſoir; c'eſt pourquoi on ſe contente ordinairement de les faire de petites pierres ſans coupe, qu'on appelle *pandans*, pour leſquelles le mortier mis un peu plus épais à l'extrados qu'à la doële, fait l'office de la coupe d'un vouſſoir. Les principales de ces nervures
Fig. 21. ſont les *arcs doubleaux* A B, E D, & les *augives*, A D, E B; les premieres les traverſent diametralement, & les ſecondes en diagonales qui ſe croiſent; c'eſt pourquoi on dit ordinairement *croiſée d'augives*.

Les courbes de ces ceintres ſont arbitraires, cependant on *n'y emploie jamais que des arcs de cercles*. Ceux des arcs-doubleaux ſont toujours tracés de différens centres, pris ordinairement aux impoſtes oppoſées, alors ils ſont de ſoixante dégrés; quelquesfois le centre eſt en dedans, quelquefois en dehors; on en voit même auſſi, (mais mal à propos,) dont les centres ſont au-deſſus ou au-deſſous de la ligne des impoſtes; le P. Derand le met au-deſſus. Les arcs des augives ſont quelquefois tracés auſſi de deux centres, mais ſouvent d'un ſeul qui fait un demi-cercle; ce qu'on ne pratique jamais aux arcs doubleaux dans l'architecture gothique. Soit le parallelograme rectangle A B D E, (figure 21,) le plan horiſontal de la voûte d'arête gothique dont les diagonales AD, BE, ſont les projections des augives; les côtés AB, DE, celles



Picquet Sculp.



E, celles des arcs doubleaux, de même que A E, B D, ſi la voûte étoit dans une croiſée ouverte ; mais ſi elle eſt fermée de ces côtés, ces arcs doubleaux prennent le nom de *formerets*. Entre ces principales nervures on en place ſouvent d'autres, comme M G & M H, & leurs oppoſées M F, M I, qui ſont les projections des *liernes* ; & les lignes B G & B H, & leurs lignes ſemblables qui ſont celles des *tiercerons*. *Fig. 11.*

Il s'agit préſentement de tracer les arcs de cercles dont ces lignes ſont les projections horiſontales, c'eſt-à dire, les *plans*, ſuivant le langage des appareilleurs. Ayant diviſé A B en deux également en *m*, on prendra à volonté & à diſtance égale de ce point les centres C & *e*, pour ceux des arcs doubleaux A *s*, B *s*, ſelon qu'on voudra la voûte plus ou moins ſurmontée en *s*, où ils ſe croiſent. Le P. Derand prend ces centres au-deſſus de la ligne d'impoſte A B, & dit *qu'on en uſe ainſi*, ce qui eſt très-mauvais, parce qu'une telle naiſſance commence par un arc renverſé en talud. Pour tracer enſuite les arcs d'augives, on portera la projection B M en B *p* ſur B A, où l'on élevera une perpendiculaire $p\,m^2$, qu'on peut faire égale à M B, ſi l'on veut l'augive en plein ceintre, ou plus haute, ſi on la veut de deux arcs de moins de dégrés que le quart de cercle, comme on a fait aux arcs doubleaux. Dans ces deux cas, le point m^2 ſera plus haut que le point *s*, le point *p* ſera le centre de l'arc B m^2, ſi l'augive eſt d'un ſeul arc en plein ceintre ; ſi elle eſt de deux, le centre ſera plus près de A, mais toujours ſur l'horiſontale A B ; la maniere de trouver ce nouveau centre, eſt de tirer une corde du ſommet donné au-deſſus de m^2, par exemple *z* au point B, la diviſer en deux également, & lui mener une perpendiculaire qui coupera A B en un point, qui ſera le centre qu'on cherche, comme nous allons le faire pour trouver les arcs des autres nervures.

Premierement, pour l'arc de *lierne*, il faut conſidérer qu'il doit paſſer au ſommet m^2, qui eſt le milieu de la croiſée d'augive dont la projection eſt le point M, & par le ſommet *s* de l'arc doubleau, dont la projection ſera ſi l'on veut le point L ou *m*, on menera par le point *s* une ligne O R, parallele à A B, qui coupera la verticale $p\,m^2$ au point O, d'où l'on prendra O R égale à M L, & par les points m^2 & R donnés, on tracera un arc dont le centre eſt ſur la verticale $m^2\,p$ prolongée au point Q qu'on trouvera en tirant une corde de m^2 en R, & faiſant ſur ſon milieu une perpendiculaire qui coupera cette verticale en Q, ce

Fig. 21. qui n'eſt pas exprimé dans la figure, pour éviter la confuſion des lignes; l'arc m^2 R tracé de ce centre Q, ſera la moitié d'une lierne dont la projection eſt M L ou M *m*, ſi A B D E eſt un quart; mais comme par cette diſpoſition de figure des projections des nervures, cet arc ne deſcend pas juſqu'en L, finiſſant en G ou H, il faut porter la diſtance M H, ſur le profil O R en O *g*, & mener *g h* verticale, qui coupera l'arc m^2 R en *h*; l'arc m^2 *h* ſera celui que l'on cherche, dont M H étoit donné pour ſa projection. *Secondement*, pour avoir l'arc du *tierceron* B H ou B G, on portera la longueur de la projection B G en B *k*, où l'on élevera la verticale *k* K indéfinie, puis on tirera par le point trouvé *h* une horiſontale *hi* qui coupera cette verticale au point K, par lequel & par le point B on tirera la corde K B, qu'on diviſera en deux également en *n*, où l'on fera une perpendiculaire à cette corde qui coupera l'horiſontale A B au point *y*, où ſera le centre de l'arc K B du tierceron qu'on veut former ſur la doële du pandantif; ainſi on aura tous les arcs des nervures tracées en projection ſuivant la figure compriſe dans le quarré A B D E.

Il eſt aiſé de tirer de cette pratique la maniere de trouver les arcs des nervures de tant de compartimens différens que l'on voudra en tracer au plan horiſontal. Par exemple, ſi l'on prolongeoit les tiercerons A F, D I, &c. juſqu'aux augives en T & *t*, & qu'on tirât les lignes F *u*, I *u*, I V, H V, qui formeroient des compartimens de lozanges F *u* I T, H V I *t*, il eſt déja clair que la hauteur des points F, H, I, eſt donnée au profil que nous venons de faire au point *h*, & que les points T & *u*, ou *t* & V, ſont déterminés dans l'augive par la projection : ainſi ſi l'on porte la longueur D *t* ſur A B en B, & qu'on éleve la verticale *t x*, elle rencontrera l'arc m^2 B de l'augive au point *x*, qui ſera plus bas que le point *h*. Enſuite ayant tiré par *x* l'horiſontale *x q*, & une verticale par le point *h*, qui la coupera vers *x*, on portera la longueur H *t* de la projection en *x q*, (ſuppoſant *x* à l'interſection de la verticale & de l'horiſontale) & par les points donnés *h*, *q*, on tracera un arc dont le centre doit être ſur la verticale paſſant par *h*. Si l'on avoit cherché l'arc dont V H eſt la projection, on l'auroit trouvé de même; mais au lieu que le point *h* eſt ici le plus élevé, ç'auroit été le plus bas dans le profil.

On peut remarquer dans les anciennes égliſes & dans les cloîtres

gothiques, une variété admirable de ces compartimens; ce que j'ai vu de plus beau & de mieux exécuté dans ce genre, eſt au monaſtere de Bethleem, auprès de Lisbonne en Portugal, tant à l'egliſe qu'au cloître, où la plupart des nervures ſont de marbre. Il paroît dans nos anciennes égliſes beaucoup de biſarrerie dans ces compartimens; quelquefois les arcs doubleaux ſont ſupprimés entre les croiſées d'augives, pour les traverſer par des nervures paſſant par les clefs des formerets, parallelement aux augives; de ſorte que leur projection horiſontale donne une figure de réticules en quarré ou en lozanges, comme on voit à la fig. 18; ce qui fait que ces liernes pouſſent de part & d'autre au vuide contre le milieu des reins des augives; quelquefois les les nervures ſont détachées de la voûte au milieu de la croiſée, où la doële s'éleve au-deſſus en forme de cul-de-four irrégulier comme en M, duquel pendent du *cul-de-lampe*, des *guimberges* & autres ornemens de l'architecture gothique, ſuſpendus par des barres de fer, leſquels ſont préſentement univerſellement rejettés par les architectes, comme étant dans des ſituations forcées & de peu de ſolidité. Il eſt viſible par ces conſtructions que les directions des doëles à la clef étant courbes, les pandantifs ne ſont pas des portions de cylindres, puiſqu'ils ſont terminés par trois côtés courbes circulaires, ſavoir par l'arc doubleau, par celui de l'augive, & par celui de la lierne, (s'il y en a une) ou à ſa place par l'angle courbe & rentrant qui eſt au long de la clef; ainſi ſuppoſant, ce qui n'arrive preſque jamais, qu'on fît les pandantifs en pierre de taille, il faudroit avoir recours à ce que nous avons dit des voûtes ſphériques, ou plutôt des ſphéroïdes irréguliers; car les pandantifs ne ſont pas des triangles exactement ſphériques, quoiqu'ils puiſſent l'être. Il eſt encore viſible que ſi l'on fait d'autres nervures de plus, en façon de roſe, d'étoile, &c. que les parties des pandantifs compriſes entre les nervures circulaires ſont des ſurfaces qui ne ſeroient pas d'une ſuite uniforme, ſi ces nervures étoient enlevées, parce que les ſections d'une ſurface irréguliere ne ſont pas des arcs de cercles, étant coupées en tout ſens; elles ſeroient au contraire ſouvent des courbes à double courbure, dont l'exécution demanderoit une grande attention; mais on aſſujettit le vuide des compartimens aux terminaiſons des nervures, & non pas les nervures à la ſurface de la doële. *Fig. 18.*

Une des principales difficultés des voûtes gothiques, eſt celle

des interſections & des naiſſances des nervures. A l'égard des intersections de celles qui ſe croiſent, il eſt viſible qu'elles doivent être d'un même profil de moulures égales, afin que les angles rentrans ſoient exactement dans le plan des diagonales de leurs projections. Pour trouver l'alongement, c'eſt-à-dire, la cerche ralongée de leur contour, il n'y a qu'à faire un angle BAD, égal à celui de la croiſée d'augives, dont le côté AB repréſente par exemple la lierne, & AD l'augive; on tirera ſur AB la perpendiculaire BD, & autant de paralleles que l'on voudra avoir de points au contour de la moulure, qui coupera AD aux points *o*, *o*, *o*, D, par leſquels on menera des perpendiculaires ſur AD, qu'on fera égales aux petites lignes *ad*, *ad*, &c. comme *ox*, *ox*, &c. dont les extrêmités détermineront les contours des moulures ralongées, dans l'angle rentrant de l'interſection de deux nervures.

Fig. 22.

Quant à la naiſſance des nervures au-deſſus d'un pilier, ou d'un *cul-de-lampe*, laquelle eſt ſouvent même ſans impoſte ſur le nud d'un mur, il faut en faire la projection comme l'on voit en N, au-deſſous de la figure 22, où NF eſt celle du formeret, NT du tierceron, NO de l'augive, N*t* d'un autre tierceron, & N*d* d'un arc doubleau, où les principales nervures NF, NO, N*d*, couvrent une partie des intermédiaires NT, N*t*. Préſentement pour connoître à quelle hauteur elles ſe dégagent, il faut porter les retombées données de chacun des arcs de ces nervures ſur les lignes NO, NT, NF prolongées, & y retracer de nouveau les mêmes profils de nervures; ſuppoſant, par exemple, que la hauteur de la pierre donnée pour former une partie de la nervure ſoit BN de la figure 21, ſa retombée ſera égale à *d*N, qui montre que la projection de la nervure doit être avancée de cet intervalle: ainſi en refaiſant à cette diſtance les profils des moulures des nervures qui s'écartent, on reconnoîtra ſi elles ſont toutes dégagées à cette hauteur, ou s'il reſte encore quelques parties des intermédiaires couvertes par les principales des augives & des formerets & arcs doubleaux. La même pratique ſervira à trouver les lits des nervures dont les naiſſances ſont priſes ſur des points écartés & qui ſe croiſent enſuite un peu au-deſſus pour être continuées chacune à leur deſtination; ce que l'on ne voit point à celles qui prennent leur naiſſance ſur des piliers, mais aſſez ſouvent à celles qui naiſſent ſans appui d'impoſte du nud d'un mur; comme ces ſortes d'ouvrages ne tombent en pra-

tique que dans les cas de réparations des anciens édifices, nous ne nous y arrêterons pas davantage.

Remarque sur les voûtes gothiques.

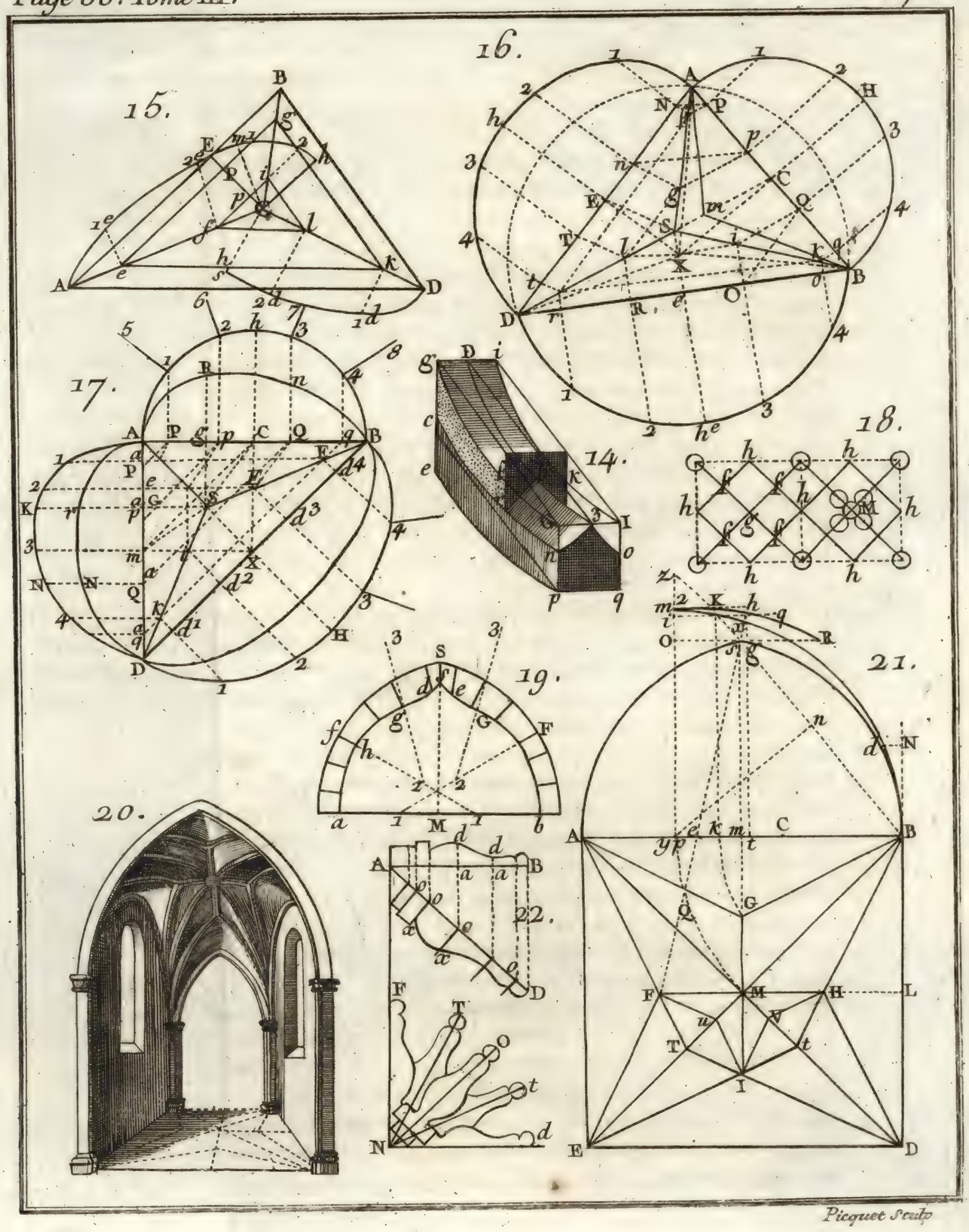
Si les doëles des voûtes gothiques n'étoient pas en quelque façon brisées & interrompues au milieu sous la clef, par un angle rentrant qui est désagréable à la vue, elles seroient sans doute préférables à nos nouvelles voûtes, par plusieurs raisons. La premiere est, que la grande inclinaison de leurs pandantifs, qui est encore considérable à leur sommet vers la clef, permet qu'on les fasse extrêmement minces & légeres : de-là suivent plusieurs avantages. 1°. Qu'elles consomment beaucoup moins de matériaux. 2°. Qu'elles sont d'une plus facile & plus prompte exécution, parce que les matériaux étant plus petits sont plus faciles à transporter & à mettre en œuvre. 3°. De-là suit qu'elles coûtent beaucoup moins en dépense de consommation & en journées d'ouvriers. 4°. Qu'il y a moins de sujettion pour la taille des voussoirs, où l'on n'est asservi à aucune coupe pour les lits ; parce que leur épaisseur n'étant que d'environ 5 à 6 pouces, on n'y a pas d'égard à la coupe, à laquelle on peut suppléer par un peu de mortier plus épais à l'extrados qu'à la doële ; de sorte qu'on y emploie de petites pierres taillées à l'équerre, qu'on appelle des *pandans*. La seconde raison, qui leur donne un grand avantage sur les nôtres, c'est qu'étant beaucoup plus légeres & inclinées, elles font beaucoup moins d'effort pour renverser les murs sur lesquels elles sont élevées, par conséquent elles épargnent une grande épaisseur qu'il faut donner aux piédroits qui soutiennent des voûtes en plein ceintre, ce qui est une forte raison de diminution de dépense. Il n'est donc pas étonnant que la mode de ces voûtes ait duré si long-tems, & qu'on en voie encore aujourd'hui un si grand nombre en cloîtres, en églises, & autres bâtimens publics, lesquels n'auroient peut-être pas été bâtis, si l'objet de la dépense avoit été aussi grand qu'il l'est aujourd'hui suivant notre architecteure massive ; il est vrai aussi que celle-ci l'emporte sur la gothique en beauté & en solidité. On voit à la fig. 20 l'effet d'une voûte gothique avec ses nervures.

Des voûtes persiennes.

Quoique nous regardions comme une difformité l'angle rentrant qui se fait à la doële des voûtes gothiques sous la clef, les Perses n'en jugent pas de même, ils y font un angle encore plus

Fig. 19. marqué, en ce qu'il eſt précédé de deux petites portions d'arcs convexes, comme on voit en *d* & *e*, à la figure 19; nous voyons dans les eſtampes du voyage de Chardin, que les ceintres généralement de toutes leurs voûtes, même juſqu'aux arcades des fenêtres & des boutiques, ſont contournées à peu près dans le goût du profil des *combles à l'impériale*, ou plutôt comme les pointes des anciens écuſſons renverſés, compoſés de deux parties concaves *a d*, *b e*, & de deux convexes en *d* & *e*, qui ſe joignent en *s*. Une figure ſi extraordinaire pour une voûte, nous prouve bien que la beauté n'eſt ordinairement qu'un préjugé de l'éducation & de l'habitude que l'on a de voir les choſes approuvées par la mode du pays que l'on habite. Il eſt cependant vrai, à juger des choſes ſans prévention, que de toutes les courbes des ceintres uſités pour les voûtes, celle dont nous parlons eſt la moins propre à leur ſolidité, par conſéquent qu'elle doit être intrinſéquement difforme, en ce qu'elle n'eſt point conforme aux moyens d'en aſſurer la durée. La raiſon en eſt bien plauſible, en ce que les parties convexes auprès de la clef pouſſeroient infailliblement au vuide, ſi les vouſſoirs étoient taillés ſuivant la coupe qui eſt naturelle à cette figure, laquelle coupe ſeroit divergente du dehors au dedans, au lieu qu'elle doit être convergente; de ſorte qu'il n'y a pas lieu de douter qu'elle n'y ſoit pratiquée intérieurement en ſens contraire. D'où il ſuit que les parties convexes doivent être compoſées de vouſſoirs dont les queues ſoient plus longues que les autres qui ſont concaves, ce qui augmente conſidérablement la charge de la voûte à l'endroit où elle cauſe une plus grande *pouſſée*. En ſecond lieu, que les arêtes des vouſſoirs contigus ſont de force inégales, l'une en angle obtus, l'autre en angle aigu; il y a apparence que de telles voûtes ne s'exécutent gueres en pierres de taille.

Toutes ces conſéquences font voir qu'il eſt étonnant qu'une nation auſſi ſpirituelle que les Perſes, qui paſſent pour avoir du goût dans les ouvrages d'ornemens, ayent adopté un contour de ceintre qui nous paroît ridicule; je ne m'arrêterai pas à en chercher le trait, parce que je ne crois pas que nous adoptions jamais un tel goût en France : je dirai ſeulement en paſſant qu'il me paroît, autant que j'en puis juger par les eſtampes de Chardin, que chaque côté du ceintre eſt compoſé de trois arcs de cercles, ſavoir, celui de la naiſſance, qui monte environ à 30 ou 45 degrés, dont le centre eſt pris ſur le rayon oppoſé, par exemple, pour l'arc *a f* ou *a k* entre M & *b* en 1; enſuite ſur le


15.
16.
17.
14.
18.
19.
20.
21.
22.
Picquet Sculp

rayon 1 *f*, ils prennent un ſecond centre vers le milieu en 2, pour former l'arc *hg*, & enfin ſur le rayon *g* 2, prolongé en dehors, un autre centre en 3, pour tracer l'arc *gs*. Et comme ces centres peuvent être pris plus près ou plus loin de M & de *b*, il en réſulte des ceintres ſurhauſſés ou ſurbaiſſés; comme il n'y a pas d'apparence que ce livre paſſe en Perſe, je ne crains pas d'être repris ſur cette conjecture. On pourroit trouver quelques autres courbes géométriques ou méchaniques qui donneroient de tels contours ſans le ſecours des arcs de cercles : telle ſeroit la *compagne de la roullete* de M. de Roberval, répétée & tournée en ſens contraire, qu'on pourroit faire croiſer pour diminuer les parties convexes de doële autant que l'on voudroit ; mais en voilà aſſez ſur une obſervation de ſimple curioſité qui ne doit pas être miſe en pratique.

Des voûtes à doubles arêtes.

On appelle voûtes à *doubles arêtes*, celles dont les angles ſaillans ſont émouſſés par des pans cylindriques angulaires,dont la pointe eſt ſur l'impoſte à la naiſſance de la voûte. Ainſi ſuppoſant une voûte d'arête formée par la rencontre de deux berceaux qui ſe croiſent à angle droit, recoupée à ſes angles ſaillans par deux berceaux qui croiſent les précédens à angle de 45 degrés, on aura une voûte à doubles arêtes, qui ſera un compoſé de huit portions de ſurfaces cylindriques en pandantif, terminées au ſommet par une ſurface plane qui forme un plafond. La raiſon de cette terminaiſon à leur ſommet vient de ce que les quatre demi-berceaux qui ſe croiſent ſuivant les diagonales des quatre premiers berceaux, ſe coupent mutuellement parallelement à leurs axes, (par le théor. 16 du premier liv.) par conſéquent ſuivant quatre lignes droites horiſontales qui peuvent être les quatre côtés d'une ſurface plane quarrée, ſi la voûte eſt établie ſur des directions perpendiculaires des premiers berceaux égaux en diametres, ou en rhombe, ſi les directions ſont obliques, ou les diametres inégaux. Plan 72. *Fig.* 27. & 29.

Le P. Derand, au lieu d'un plafond en parallelograme, en propoſe un en octogone, mais il eſt clair, par ce que nous avons dit ci-devant de ſon erreur à l'égard des plafonds quarrés ſur les voûtes d'arêtes ſimples, que la figure d'un octogone ne peut ſe raccorder avec la ſurface des voûtes à doubles arêtes, en ce que des huit côtés du plafond, il n'y en peut avoir que quatre

Fig. 30. mierement le pandantif A F G, de la même maniere qu'à la voûte précédente de la figure 28, où il eſt une portion de berceau régulier cylindrique; enſuite on y ajoutera la lunette dont F m G eſt le ceintre. Ainſi ayant diviſé la corde F G en M, & ayant formé le ceintre du milieu de ce pandantif ſur A M, comme on a formé ceux des arêtes A G & A F, on mettra ce ceintre à part, comme a T M^o; puis ayant tiré la droite m^t M^o, parallele à m^e, & égale à m M du plan horiſontal, on menera (par le probl. 3 du deuxieme livre) la tangente T m^t, qui ſera l'ébraſement ſupérieur de la lunette au milieu, & ſuivant ce profil, on achevera ſon trait de la maniere qu'il ſera dit ci-après pour celui des lunettes droites ou biaiſes; la ſeule différence qu'il y a ici ne conſiſtant que dans la poſition, parce que dans le trait cité, c'eſt un berceau horiſontal qui en pénetre un autre de même ſituation, ici c'eſt un vertical qui en en pénetre un horiſontal; ainſi prenant la ligne m^a M^o pour une horiſontale, on retombera dans le même cas.

La ſeconde maniere qui fait le pandantif d'une ſurface irréguliere, devroit être renvoyée au chapitre où nous traitons de la rencontre de ces ſurfaces, ſi les côtés des arêtes n'étoient pas donnés; mais puiſqu'ils le ſont, la rencontre des ſurfaces eſt connue & réguliere. Premierement, ce pandantif pourroit être une portion triangulaire d'une ſphere réguliere ſi les ceintres des arêtes n'étoient pas déterminés en portions d'ellipſe, par la ſuite néceſſaire du ceintre primitif A H B & par la hauteur égale auſſi donnée au ceintre du formeret A h E; car faiſant un arc de cercle ſur chacun des rayons donnés A G & A F des courbes des ceintres des arêtes, on auroit un triagle ſphérique dont le troiſieme côté ſeroit F m G; mais il arriveroit que les ceintres de l'arc doubleau A B & du formeret A E, ne ſeroient pas d'une ſeule courbe en demi-ellipſe, mais un compoſé de deux arcs qui feroient un angle à la clef, comme les voûtes Gothiques, parce que les plans verticaux paſſans par les arêtres A G & A F ne ſont pas tangens au cercle F G I K en G & en F, puiſqu'ils ne ſont pas perpendiculaires aux rayons du plafond; par conſéquent la ſection de la ſphere par A F ne ſera pas un arc de 90 degrés, non plus que A G, qui ſera d'un nombre de degrés plus grand que A F, parce que l'angle A G K approche plus du droit que A F I. Il ne reſte donc de moyen de raccorder toutes ces por-

tions de berceaux avec le plafond, que de former le pandantif du milieu en ſurface ſphéroïde irréguliere. *Fig. 30.*

Ayant trouvé les projections des diviſions des joints de lit aux arêtes, comme dans la voûte précédente (figure 28) aux points q & r, on prendra les diſtances du centre C^1 du plafond aux points q & q^2 de l'arête A G la plus éloignée, & portant les pointes du compas ouvert de cet intervalle ſucceſſivement aux points q & r, de ces deux points pour centres, on fera des ſections en z, où ſeront les centres des arcs $q\,n\,r$, &c. qui ſeront les projections des joints de lit du pandantif du milieu, & qui ſerviront à tracer autant d'arcs que l'on voudra entre les deux arêtes A G, A F : nous n'en donnerons qu'un vers le milieu pour exemple, en z, dont l'arc eſt $q^2\,n^2\,r$. Du point A au point m, pris à volonté ſur l'arc FmG, on menera une ligne qui coupera les arcs tranſverſaux $q\,r$, $q\,r$, aux points n, n ; on portera enſuite ſur A B les longueurs A n^1, A n^2, A m, en A N^2, A N , A Q pour élever ſur ces points N^2, N^3, Q, des perpendiculaires égales aux correſpondantes du ceintre primitif $p2$ $p3$, C H, puis par les points 1, 2, 3 on menera des horiſontales qui couperont ces perpendiculaires aux points x^1, x^2, x^3, V, par leſquels on tirera la courbe du ceintre dont A m eſt la projection; ainſi des autres lignes de ſections qu'on pourroit tirer par d'autres points, par exemple A d.

Les projections des joints de lit & les profils des à-plombs étant donnés, cette voûte ſe tracera ſur la pierre comme les voûtes d'arêtes ſimples, ayant ſeulement égard aux différences des angles, qui ſeront mixtes lorſque les vouſſoirs ſeront achevés, mais qu'on peut ébaucher en prenant les cordes des arcs, comme s'ils étoient rectilignes. La conformité de cette voûte avec la précédente nous diſpenſe d'entrer dans un plus grand détail, qui ne ſeroit qu'une répétition de ce qui vient d'être dit, obſervant ſeulement qu'à celle-là, la doële étant cylindrique, peut ſe faire à la regle, & celle-ci étant à double courbure, ne peut ſe creuſer qu'avec pluſieurs cerches, comme toutes les ſurfaces concaves irrégulieres, ſuivant ce que nous avons dit au commencement du quatrieme livre.

De la terminaison d'un berceau qui en pénetre un autre d'inégale hauteur.

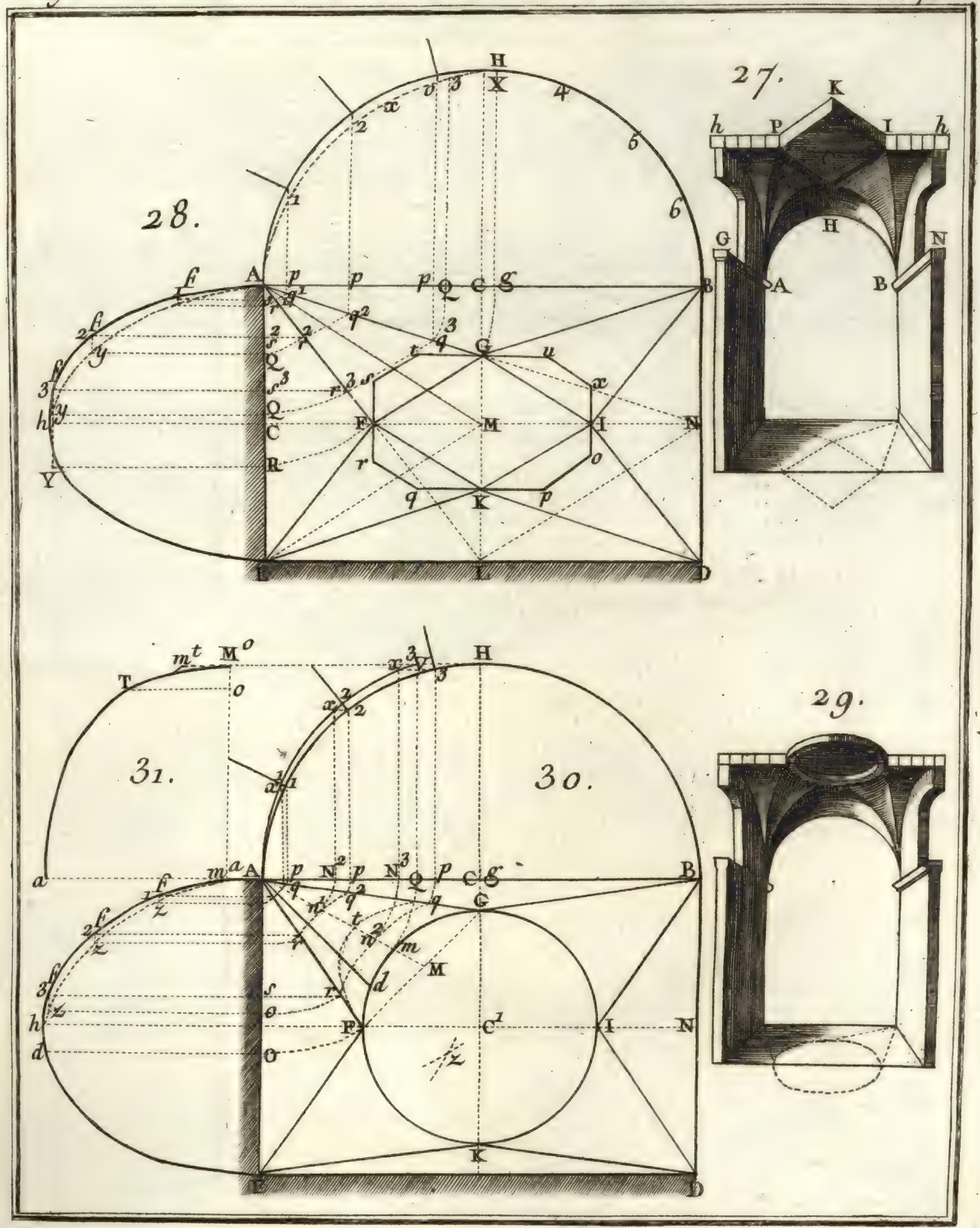
En termes de l'art,

Lunette droite ou biaise de niveau dans un berceau de niveau.

On appelle *lunette* la rencontre de deux berceaux dont l'arête d'enfourchement fait un contour qui enferme un espace semblable à celui du croissant de la lune, d'où elle tire son nom; ce qui n'arrive que lorsqu'un des berceaux est moins élevé que l'autre, parce que lorsqu'ils sont tous deux de même hauteur depuis l'imposte, cette rencontre fait deux courbes planes, qui se croisent en angle saillant, au lieu que la lunette fait une courbe à double courbure continue, sans interruption d'aucun angle; cependant on applique quelquefois ce nom aux parties des voûtes d'arêtes, mais improprement. Soit (fig. 30²) le parallelograme ABDE le plan horisontal d'un berceau A*m*B, & FGIK celui d'un autre berceau de moindre hauteur, qui le pénetre obliquement, ou si l'on veut perpendiculairement comme *ifgk*, de l'autre côté, ce qui fait une lunette *biaise* ou une *droite*; nous nous attacherons au trait de la biaise, parce qu'il comprend celui de la droite. On menera par un point K, pris à volonté sur un côté KG, une perpendiculaire à ce côté, laquelle rencontre l'opposé FI prolongé en L. Sur KL, comme diametre, on fera un demi-cercle KHL, qui sera l'arc droit de la lunette & le ceintre primitif, qu'on divisera en ses voussoirs aux points 1, 2, 3, 4, par lesquels on menera des paralleles à la direction des piédroits FI ou GK, prolongées indéfiniment de part & d'autre des divisions, qui couperont le diametre de l'arc droit LK aux points p^1 p^2 p^3 p^4, & les projections des rencontres des joints du grand berceau A*m*B, en des points que l'on va chercher. Ayant fait B*h* perpendiculaire sur AB, on y portera les hauteurs des retombées du ceintre KHL de la lunette, sçavoir 1 p^1 en Bf^1, 2p^2 en Bf^2, & la hauteur du milieu C H en B*h*; par les points *h*, f^2, f^1, on menera des paralleles à AB qui couperont le ceintre du grand berceau A*m*B aux points *s*, *y*, *x*, desquels on abaissera des perpendiculaires qui rencontreront les projections des divisions du berceau qui fait lunette aux points x^1, y^2,

Plan. 73. *Fig.* 28².

Fig. 30².


28.
27.
31.
30.
29.
Picquet Sculp.

y^3, x^4, que l'on cherche; on menera par ces points des lignes droites F x^1, y^2, y^3, x^4 G, qui donneront les terminaisons des doëles plates des deux berceaux. Nous ne faisons pas mention du milieu s, parce qu'il est hors de la doële plate de la clef. Plan. 73. *Fig.* 30².

Il faut présentement chercher l'étendue de ses doëles plates, qui sont reserrées par la projection dans l'une & l'autre voûte; ce qui se fait par le dévelopement. *Premierement*, pour former les panneaux de doële plate du petit berceau, qui fait dans le grand cette échancrure qu'on appelle *lunette*, on menera à part une ligne K^d L^d (fig. 29²) ou bien, si la place le permet, on prolongera le diametre K L de l'arc droit indéfiniment vers L^d, sur laquelle ligne prolongée, ayant pris un point K^d à volonté, on portera de suite toutes les cordes des divisions de l'arc droit L 1; 1, 2; 2, 3; 3, 4; 4, K; en L^d, d^1, d^2, d^3, &c. par où on menera des perpendiculaires à la directrice L^d K^d, prolongées indéfiniment, sur lesquelles on portera successivement les distances horisontales du diametre KL, aux lignes K I ou G F, prises sur les projections des joints de lit p^1 q^1, p^2 q^2, &c. pour avoir les points I^d, q, q^2, q^3, &c. de la fig. 29², ce qui donnera le biais des têtes du côté de l'entrée de la lunette. Pour avoir l'autre tête de chaque panneau à l'enfourchement, on prendra les longueurs ou distances horisontales du diamettre KL, aux points x^1, y^2, y^3, x^4, qu'on portera sur les perpendiculaires à la directrice L^d K^d, pour avoir les points F^d, 1^d, 2^d, 3^d, 4^d, G^d, par lesquels on menera des lignes droites de l'un à l'autre, qui donneront le biais demandé à l'arête d'enfourchement. *Fig.* 29².

Si au lieu de ces lignes droites, on en tire une courbe G^d a 4^d b 3^d c, &c. on aura le développement de l'arête à double courbure de l'enfourchement, qui est dans ce cas celui de l'ellipsimbre, supposant que les cordes prises à l'arc droit soient si petites & en si grand nombre qu'elles ne different pas sensiblement de l'arc droit, laquelle courbe de dévelopement pourroit servir à tracer cette arête sur la doële du petit berceau creusée en cylindre, si l'on faisoit les panneaux sur une matiere flexible, comme du carton, du fer-blanc, des lames de plomb, &c. On a pu remarquer que dans ce dévelopement de la fig 29², on a pris la partie du berceau biais comprise dans l'épaisseur du mur FIKG, qu'on pouvoit ometre, parce que ne s'agissant ici que de la lunette, il suffisoit seulement de la partie F G s F.

L'exemple de cette lunette biaise servira aussi pour la lunette

droite *fhg*, dont le trait étant moins composé sera par conséquent beaucoup plus facile, parce que le cercle *fhg* est nonseulement le ceintre de l'arc droit, mais aussi celui de la face de la lunette sur le parement du mur ; ce qui n'est pas de même à la lunette biaise, où ce ceintre est différent de l'arc droit LHK. Il sera facile de tracer ce ceintre elliptique par le problême VIII du deuxieme livre.

Secondement, pour faire le dévelopement des panneaux de doële plate de la partie de la grande voûte dans laquelle la

Plan 73. *Fig.* 30^2. & 30^3.

lunette fait une échancrure, on menera par tous les points trouvés F, x^1, y^2, y^3, x^4, G, de la projection de la lunette des perpendiculaires à la direction BD, en dedans ou en dehors du berceau, comme à la fig. 30^3, prolongées indéfiniment, auxquelles on menera à distance prise à volonté une perpendiculaire F^o G^o, qui les coupera aux points x^o y^o, Y^o, X^o; cette ligne représentera la naissance de la voûte ABDE, (fig. 30^2) dans la partie FG de son imposte BD, si la lunette prend sa naissance sur la même imposte ; mais si elle la prenoit plus haut, comme en TV, il faudroit qu'elle fût au-dessus de B de la longueur de l'arc BT rectifié ; ainsi en ce cas la ligne de

Fig. 30^3.

l'imposte du grand berceau devroit être plus bas en f^o g^o.

Supposant F^o pour le point de la naissance, on portera la corde Bx en F^o x^d, ensuite la corde x y du même profil en x^d y^d, & par les points x^d y^d, on menera des paralleles à F^o G^o qui donneront par leurs intersections avec les lignes provenant de la projection de la lunette, tous les points du développement qu'on veut faire ; la plus haute passant par y^d, donnera les deux points y^2 y^3, communs à la doële plate de la clef & des assises collatérales ; la plus basse x^d x^4, donnera les points x^1 x^4, des lits de dessus des premiers voussoirs, & de dessous des seconds, par les intersections des lignes x^1 x^o, & x^4 X^o, comme le montre la figure 30^3. Par le moyen de ce dévelopement, on a les angles des têtes des doëles plates du grand berceau, qui aboutissent à celle de la lunette, par exemple, x^d x^1 F^o, pour le premier qui doit se joindre à la tête F^d 1^d du premier panneau de doële plate de la figure 29^2, ainsi des autres de suite, comme l'angle y^d y^2 x^1, pour la tête de la seconde doële plate du berceau, qui doit se joindre à la tête du second panneau de la lunette 1^d 2^d, de la figure 29^2. On remarquera que nous ne parlons ici que des têtes des doëles plates

qui ne font jamais que des lignes droites, parce que fi l'on prenoit les dévelopemens de l'arête à double courbure des deux doëles du berceau & de la lunette, on ne pourroit faire joindre ces deux courbes que dans l'enveloppement qu'on en pourroit faire par des panneaux flexibles inutiles à la pratique, comme on le reconnoîtra par l'application du trait fur la pierre.

Application du trait fur la pierre.

Ayant dreffé un parement pour fervir de lit horifontal de fuppofition, on perdra le biveau de l'angle que forme la direction du joint de lit de la lunette avec celui de la voûte pris au plan horifontal ; par exemple, fuppofant qu'on veuille faire le fecond vouffoir vers B, on prendra l'angle p^1 x^1 1°, avec une fauterelle ou la fauffe équerre, & on l'appliquera fur le lit fait, enfuite avec le biveau de la doële de la lunette & de l'horifon O 1, 2, on abattra la pierre le long de la ligne p^1 x^1, fur laquelle on tiendra toujours fes branches à l'équerre; ainfi on formera une furface fur laquelle on appliquera le panneau de doële 1^d 2^d q^2 q^1, (fig. 29^2) dont on tracera le contour de la tête & le refte, s'il en eft befoin. Enfuite on prendra le biveau de la doële & de l'horifon de la voûte au même lit f^1 xy (fig. 30^2) avec lequel on abattra la pierre fuivant la ligne x^1 1°, auffi quarément fur cette ligne, d'où réfultera une feconde furface qui fera avec la premiere une arête faillante, qu'on dirigera en appliquant fur la furface de la lunette le panneau de doële plate de la voûte x^d x^1 y^2 y^d, (fig. 30^2) pofant fur cette arête le côté x^1 y^2, & x^d y^1, fur l'arête du lit horifontal, & l'on tracera le contour de ce panneau du moins pour le lit de deffus y^d y^2, parce que le côté y^d x^d peut être plus avancé ou plus reculé, fuivant la longueur de la pierre & de la liaifon qu'elle doit faire. Les doëles plates étant tracées, on abattra la pierre avec les biveaux de lit & de doële pris à l'arc droit à l'ordinaire fur chaque berceau, comme L 1, 5, (fig. 30^2) pour le lit de deffus à la lunette au premier vouffoir; 5, 1, 2, pour le lit de deffous du fecond; 1, 2, 6, pour celui de deffus du même, &c. De même, pour la branche du vouffoir qui entre dans la voûte, on abattra les lits avec le biveau Q xy, pour le lit de deffous, & uyx pour celui de deffus. La rencontre de ces lits formera un angle & une arête faillante au lit de deffus, & un angle rentrant à celui de deffous, comme aux voûtes d'arête dont nous avons parlé : à

Plan. 73.
Fig. 31.

l'égard des têtes, on les abattra toujours quarrément ſur le lit horiſontal avant que de former les lits. Toutes les ſurfaces planes qui comprennent le vouſſoir étant finies, il ne s'agira plus que de creuſer la doële ſuivant la cerche de l'arc de la voûte qui convient ; par exemple, pour la branche qui entre dans la lunette, on la formera ſur l'arc 1, 2, & pour celle de la voûte ſur l'arc xy, & le vouſſoir ſera achevé.

REMARQUE.

Il eſt bon de faire attention à cette maniere d'appliquer ce trait ſur la pierre, parce qu'elle eſt le modele de notre méthode de tailler tous les enfourchemens dont on aura les panneaux de doële plate des deux branches du vouſſoir ; c'eſt pourquoi nous renverrons ſouvent le lecteur à la lunette droite ou biaiſe pour l'application du trait.

Explication démonſtrative.

Puiſque l'arête d'enfourchement de la lunette dont il eſt queſtion eſt une courbe à double courbure, elle ne peut jamais être exprimée par une ligne droite ; cependant comme on peut inſcrire des priſmes dans chacune des voûtes cylindriques qui ſe rencontrent, les interſections de leurs angles ſe feront dans des points communs à cette ligne courbe, & les lignes d'interſection de chacun des plans des priſmes pourront être conſidérées comme des eſpeces de cordes des arêtes. Je dis des eſpeces de cordes, parce que les cordes proprement dites ſont des ſoutendantes des arcs des courbes planes; quoi qu'il en ſoit, en creuſant ces priſmes en creux cylindriques, cette courbe à double courbure ſe forme d'elle-même par la rencontre de deux ſegmens cylindriques.

Préſentement, ſi l'on conſidere le grand berceau AmB, comme un priſme, on verra par la conſtruction que la figure 30 en eſt un développement depuis le point s, où ſe termine le ſommet du petit berceau qui le pénetre, juſqu'au point B où eſt l'impoſte qu'on peut ſuppoſer commune aux deux berceaux, ſi le petit prend ſa naiſſance à même hauteur ; ainſi le polygone $F^o\ x^1\ y^2\ y^3\ x^4\ G^o$, ſera le trou que le petit priſme fait dans le grand par ſa pénétration, & ſi par ſes angles on trace à la main une ligne courbe, elle repréſentera l'arête d'interſection des deux cylindres. Il eſt auſſi viſible, par notre conſtruction, que la fig. 29^2 eſt

eſt le dévelopement exact du petit priſme compris entre un mur à plomb & la ſurface du grand, & qu'en inſcrivant toutes les lignes $I^d\ q^1\ q^2\ q^3, q^4\ K^d$, dans un demi cercle KHL, d'où elles ſont tirées, elles ſe rangeront toutes ſur une même ſurface plane, quoique dans le développement elles ſoient rangées en ligne courbe; parce que nous avons montré au troiſieme livre, pages 386 & 387, que le développement d'un cercle ſur un cylindre ſcalene étoit une courbe de cette eſpece. Plan. 73. *Fig.* 292.

Il n'eſt pas moins clair que la terminaiſon des ſurfaces du petit priſme à celle du grand a été bien trouvée, parce qu'ayant ſuppoſé ſa direction horiſontale, les projections des diviſions de ces ſurfaces, qui ſont celles des angles des plans, leur ſeront paralleles, par conſéquent égales en longueur; il n'en eſt pas de même de leur largeur, qui eſt inclinée à l'horiſon inégalement dans chacune. D'où il ſuit que ſi l'on tire une ligne courbe par les points trouvés de ce dévelopement $F^d\ 2^d\ G^d$, on aura celui de la courbe à double courbure ſur la doële du petit berceau; laquelle étant pliée ſe rejoindra avec la précédente $F^o\ y^2\ G^o$, pliée ſur le grand, quoique leur différence paroiſſe très-grande; ce qui eſt cependant évident, puiſque chacune repréſente l'arête commune aux deux berceaux. A l'égard de la juſteſſe de l'application du trait pour trouver l'inclinaiſon des doëles plates, il eſt clair qu'elle eſt très-ſimple & très-exacte, en ce qu'elle rapporte différentes inclinaiſons au plan horiſontal, qui eſt toujours conſtant & commun à leurs naiſſances. D'où il ſuit que les inclinaiſons des lits ſont auſſi déterminées, puiſqu'elles dépendent de celles des doëles; & parce que cette méthode donne les deux points des angles de leur tête & une ligne de leur côté, qui eſt le joint de lit, il eſt évident que toute leur ſurface eſt donnée, par conſéquent, que ſuivant cette méthode on peut ſe paſſer de faire les panneaux de lit, qui ſont indiſpenſables ſuivant celle des Auteurs; ainſi elle a un grand avantage ſur l'ancienne.

De la rencontre des berceaux horiſontaux avec les verticaux.

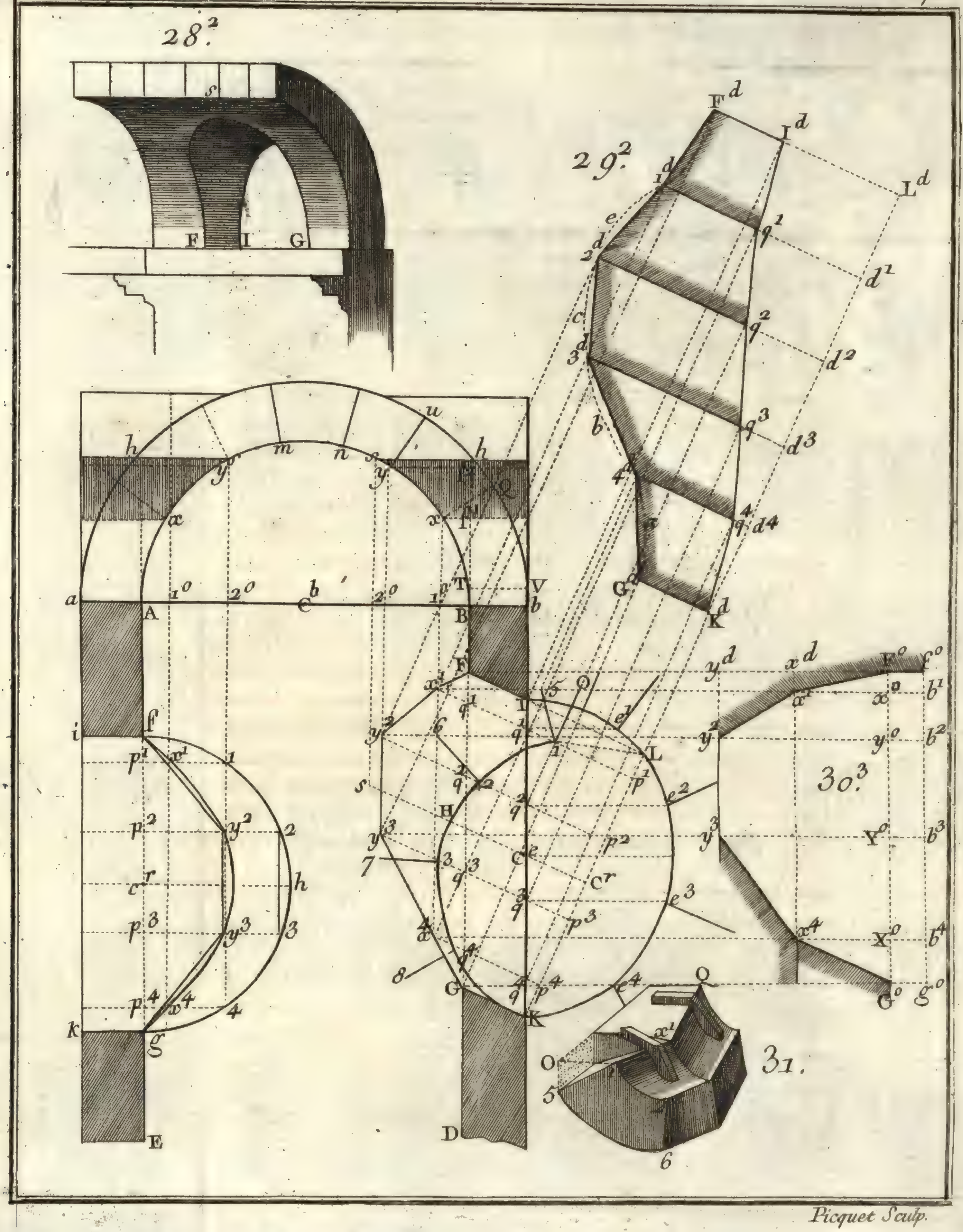
EXEMPLE.

Porte droite ou biaiſe en tour ronde ou en tour creuſe.

Comme il s'agit dans ce trait de former des arêtes à double

Pl. 74. *Fig.* 32. courbure, il n'y a pas de moyen plus exact dans son principe que celui de l'opération qu'on appelle *par équarrissement*, par laquelle on forme ces courbes sans en connoître autre chose que leurs projections On peut aussi exécuter ce trait par panneaux, avec une exactitude suffisante à la pratique, en passant par dessus les difficultés géométriques qui s'y rencontrent, (dont quelques-unes sont insurmontables) parce que la grossiereté des ouvrages de la main ne peut atteindre à la perfection où le raisonnement voudroit les conduire. Il me paroît cependant à propos d'exposer ces difficultés, pour éclairer l'esprit des appareilleurs, & pour leur montrer à quel degré de perfection ils peuvent opérer par la voie des panneaux.

La premiere difficulté est celle de la rectification de la circonférence du cercle, qu'il faut étendre en ligne droite dans cette partie de l'arc horisontal de la tour ronde ou creuse qui est comprise entre les jambages de la porte, & diviser cet arc en même raison qu'il l'a été lorsqu'il étoit courbe, par les à plombs des divisions des voussoirs du ceintre de face de la porte, tracé sur une surface plane tangente à la tour. Cette difficulté, qui est, comme l'on sait, géométriquement insurmontable, ne tire à aucune conséquence pour la pratique, où il suffit de prendre de suite plusieurs petites cordes qui different peu des arcs, & les ranger sur une ligne droite, ou si l'on veut méchaniquement prendre le contour courbe avec un fil qu'on déploie. La seconde difficulté consiste dans la description de la courbe formée par la circonférence du ceintre primitif déployé sur une surface plane, par le moyen des ordonnées du cercle élevées perpendiculairement sur les abscisses, dont les rapports changent à chaque division suivant que l'arc déployé s'écartoit ou se rapprochoit du parallelisme du diametre d'un ceintre tangent à la tour; laquelle courbe ne peut être décrite qu'à la main, ou avec une regle pliante appuyée sur plusieurs points trouvés. La troisieme difficulté consiste dans la courbure qu'il faut donner aux têtes des panneaux de lit & de doële plate, laquelle n'est pas circulaire, (comme les Auteurs des livres de la coupe des pierres le supposent par leur opération des *trois points perdus*) mais elliptique dans les tours sans talud, parce que les cordes des arcs de ces têtes sont dans un plan incliné à l'axe du cylindre *de bout*, qui est la tour concave ou convexe. J'ai dit dans les tours sans talud, parce que dans celles qui en ont, cette courbe devient souvent


28.²
29.²
30.³
31.
Picquet Sculp.

un arc de parabole ou d'hyperbole, la tour étant alors un cône tronqué, qui peut être coupé par les plans des lits, ſuivant l'inclinaiſon qui forme ces courbes.

Quant à la courbe de l'arête que forme la rencontre de la doële de la porte avec le parement creux ou rond de la tour, elle ne peut être une ſection conique, parce qu'elle eſt à double courbure; ſavoir, un *cicloïmbre*, lorſque la porte eſt droite & en plein ceintre, & un ellipſimbre dans les autre cas, comme il a été démontré au ſixieme chap. du premier livre. La connoiſſance de ces choſes étant préſuppoſée, on va donner les moyens d'exécuter ce trait. Soit (Pl. 74 fig. 33) une portion de tour, qui ſera appellée *ronde*, ſi on ſuppoſe ſa face BATO en dehors, & *creuſe*, ſi elle eſt vue par dedans en FGDE, dans laquelle nous ſuppoſerons deux bayes de portes, dont l'une comme BA eſt *droite*, en ce que ſes piédroits BF, AG, ſont paralleles à la direction d'une ligne du milieu $C^r m$, qui paſſe par le centre C^r de la tour, & le milieu *m* de la corde BA, qu'elle coupe perpendiculairement. L'autre, (fig. 37,) dont la direction du milieu KL eſt oblique ſur la corde BA, en ſorte qu'elle ne paſſe pas par le centre, ſera appellée biaiſe.

Pl. 74. *Fig.* 33. *Fig.* 37.

PREMIER CAS.

De la porte droite en tour ronde ou creuſe.

On commencera par ſe déterminer au choix du ceintre primitif, qu'on peut prendre à l'arc droit ou à l'arc de face courbe; il eſt plus commode de choiſir ce premier, parce qu'il peut être décrit ſur une ſurface plane & que le ſecond ne le peut être que par le développement; cependant ſi l'on veut affecter une parfaite égalité dans les têtes des vouſſoirs, on ne le peut en choiſiſſant l'arc droit pour ceintre primitif, parce qu'il en réſulte des diviſions un peu inégales ſur les têtes de la face, qui ſe rétreciſſent depuis les impoſtes juſqu'à la clef; la raiſon eſt que les arcs horiſontaux de la tour approchent d'autant plus du paralleliſme de l'arc droit qu'ils s'éloignent des naiſſances de droite & de gauche, comme on le voit à la fig. 33, où l'arc X X³ eſt plus grand à l'égard de la droite $t\,d^t$, que l'arc X n ne l'eſt à l'égard de *d r*. Cette raiſon fait que les Architectes choiſiſſent ſouvent le ceintre de face courbe pour primitif, & alors ils appellent le trait, *porte droite en tour ronde*, *ou creuſe par têtes égales*.

Premiere disposition, où l'arc droit est pris pour ceintre primitif.

Fig. 33. Sur la corde B A, largeur de la porte, ou sur une parallele & égale *b a*, comme diametre, prise entre les piédroits FB & GA prolongés, on tracera le ceintre circulaire ou elliptique, & l'ayant divisé en ses voussoirs aux points 1, 2, 3, 4, on menera par ces points des paralleles aux piédroits, ou ce qui est la même chose à sa direction C^t C, qui passe par le centre C^t de la tour, & par celui du ceintre C, lesquelles couperont l'arc convexe B C A aux points X^4, X^3, &c. & le concave aux points 4^n 3^n, &c. On en usera de même pour le ceintre de l'extrados E H D, & l'on aura par ce moyen les intersections de toutes ces paralleles avec les arcs horisontaux de la tour, concaves en dedans & convexes au dehors, lesquelles donneront les moyens de former les panneaux de lit & les courbes de leurs joints de tête concaves & convexes, en quoi consiste principalement la difficulté de ce trait, où le reste de la construction ne differe en rien de celle des berceaux ordinaires. On peut même se passer de chercher ces courbes de joints de tête, si l'on veut tailler chaque voussoir comme s'il étoit portion d'un berceau droit circonscrit à la portion de tour que comprend la doële de la porte avec son extrados, comme nous allons le dire, ce qui abrege beaucoup l'opération.

1. *Par l'équarrissement.*

Fig. 35. Soit (figure 35) un second voussoir au-dessus de l'imposte, comme celui marqué 4, 3, 7, 8 de la figure 33, dont la projection horisontale est le parallelograme Kp^3 V 8e; supposant ce voussoir fait comme une portion de berceau droit à la doële 4, 3, & au lit 4, 8, au lieu de tailler l'extrados suivant la courbe 8, 7, on lui fera un parement comme pour un lit de niveau, suivant la ligne N *a*, à l'équerre sur un parement à plomb 3 N,
Fig. 35. comme il est représenté à la fig. 35, en *a b g* N. On levera ensuite sur l'épure un panneau du triangle mixte 9 *k* X^3 que l'on posera sur le lit horisontal de la figure 35 en *c g* N, posant le point 9 en *c*, le point *k* sur *g*, & le point X^3 en N. On levera de même du côté du creux un panneau mixte 8e 3^n V, qu'on appliquera sur le même lit horisontal en dedans, posant le point 8e sur le point *b*, le point V sur *a*, & le point 3^n sur *x* de la fig. 35.

Les contours de ces deux panneaux étant tracés ſur le lit *a g* de la figure 35, on abattra la pierre à l'équerre ſur le lit ſuivant les arcs tracés, pour former au dehors la ſurface convexe N *c* 8, 4, & au dedans la concave oppoſée ; après quoi, avec le biveau mixte de doële & de coupe du lit de deſſus, poſé quarrément ſur l'arête, paſſant par le point 3, on abattra la pierre pour former le lit de deſſus, & le vouſſoir ſera achevé. *Fig.* 35.

Je n'ai pas parlé des lignes *x i*, *c* 8, qu'il faut tracer ſur les paremens à plomb *b l* & *a* 3, pour bien conduire les arêtes qui doivent s'y former ; pour peu qu'on ait d'habitude de couper du trait, on ſait qu'il faut ſe donner pour guides le plus de lignes que l'on peut ; c'eſt pourquoi l'on voit qu'il faut tracer ſur le parement à plomb *a* 3, une ligne *x i* parallele à *a h*, pour marquer la premiere arête de préparation, quoiqu'il faille enſuite l'enlever pour la coupe *i d*, 3, 7; de même ſur l'autre parement à plomb *b l*, une ligne *c* 8, parallele à *g l*, qu'il faudra encore enlever s'il faut former l'extrados 8, 7. Il eſt viſible que par la formation de ces deux ſurfaces circulaires concaves & convexes, on donne aux joints de tête 3, 7; 4, 8 une courbure elliptique ſans la connoître, parce qu'on forme des cylindres que les lits plans, paſſant par ces joints de tête, coupent obliquement; & que ſi l'on enleve enſuite la partie cylindrique mixte 7 *c* 8, il ſe formera ſur les contours circulaires 3, 4 & 7, 8 des courbes à double courbure qui ſeront de cette eſpece que nous avons appellé cicloïmbre, & qui ſeroient des ellipſimbres ſi ces arcs 3, 4; 7, 8 étoient des portions de ceintres ſurhauſſés ou ſurbaiſſés; ainſi on forme des courbes exactement telles qu'elles doivent être, ſans les connoître; cette maniere d'exécuter la porte en tour ronde ou creuſe, n'a d'autre inconvénient qu'un peu de perte de pierre & ſouvent point, lorſque l'on fait les lits de niveau ſur l'extrados, comme on le voit dans l'appareil de la fig. 32.

Seconde diſpoſition, où le ceintre primitif eſt pris à la face courbe, ronde ou creuſe, pour former des têtes égales.

Il eſt viſible que la différence du diametre B A de l'arc droit de la porte en tour ronde ou creuſe, avec le diametre courbe pris ſur la face en B M A, conſiſtant dans le rapport de la corde B A à l'arc B C A, elle ſera d'autant plus grande que la tour ſera petite, ſuppoſant une ouverture de baye conſtante ; par *Fig.* 33.

Plan. 74. *Fig.* 33. conféquent les inégalités qui réfultent à la divifion de la face convexe ou concave, en prenant l'arc droit pour ceintre primitif, font plus ou moins confidérables, fuivant le rapport du diametre de la porte à celui de la tour ; ainfi lorfque la porte ouvre une fort petite partie de la circonférence de la tour, ces inégalités deviennent fi peu fenfibles qu'elles peuvent être négligées. Suppofant donc qu'on veuille affecter de faire les têtes des vouffoirs parfaitement égales, on rectifiera l'arc horifontal de la tour B M A, en l'étendant en ligne droite fur la tangente, ou fur une ligne qui lui foit parallele comme E D ; cette rectification donnera un diametre b^d a^d plus grand que la corde B A, ou fon égale *b a* ; fur ce diametre on formera le ceintre primitif en demi-cercle b^d *h* a^d, ou en demi-ellipfe, fi l'on veut ; on le divifera, à l'ordinaire en fes vouffoirs aux points 1, 2, 3, 4, d'où l'on abaiffera des perpendiculaires fur le diametre, qui donneront les projections de ces divifions.

Pour former l'arc droit qui doit provenir de ce ceintre primitif de développement, il faut replier les parties de fon diametre fur l'arc horifontal de la tour B M A, en commençant au milieu, portant la longueur droite C p^2 de M en *n*, p^2 P de *n* en *q*, il reftera par conféquent *q* A égal à P a^d ; par les points trouvés *n*, *q*, A, & leurs correfpondans de l'autre côté de M en B, on menera des paralleles indéfinies à la direction M C^t, qui couperont l'arc concave F L G aux points *t* & *i*, & fa corde F G en *o o*, fur lefquels on portera les hauteurs des retombées 2 p^2, 1 P, C *h* en *o* 2 *r*, *o* 1^r, O h^r & par les points G, 1^r, 2^r, h^r, &c. on décrira l'arc droit furhauffé G h^r F que l'on cherche, dont on fera ufage, comme pour toutes les autres voûtes en berceau. Il eft vifible que les divifions égales du ceintre développé rendent celles de l'arc droit inégales. On pourroit encore faire l'arc droit en plein ceintre pour primitif, & le développé furbaiffé fecondaire, & enfuite reprendre le fecondaire pour primitif, dans les divifions des vouffoirs en parties égales, ce que le P. Derand met en queftion ; fur quoi je puis dire en paffant qu'il n'eft pas fcrupuleux dans fon opération, où il tranfporte la droite rectifiée fur l'arc de la tour, par des arcs de cercle, prenant ainfi pour rayon d'un côté un arc de cercle & de l'autre une ligne droite.

Il faut préfentement former les panneaux de doële & de lit. Nous avons fait ufage des panneaux de doële plate par-tout où les faces étoient des furfaces planes ; mais ici à caufe que les faces

ſont concaves & convexes, nous ne pouvons faire uſage que de panneaux flexibles en développement de la doële, parce que l'arête que fait la doële avec la tête eſt une courbe à double courbure qui ne peut jamais être repréſentée par une ligne droite, & que la ſurface convexe que l'on doit faire ne peut être ébauchée en plane que par le moyen des tangentes, & non pas des cordes comme les concaves.

Pour faire ce développement, on tirera à part une ligne droite $f^d g^d$, (fig. 34.) qu'on fera égale à la circonférence de l'arc-droit *Fig. 34.* F h^r G, de la fig. 33; puis de ſon milieu H, on portera de part & d'autre la longueur de l'arc h^r 2^r en H 2^d, H 3^d; enſuite l'arc 2^r 1^r en 2^d 1^d, 3^d 4^d, & par les points f^d, 4^d, 3^d, H, 2^d, 1^d, g^d, on menera des perpendiculaires à la droite f^d g^d indéfinies, ſur leſquelles on portera les avances de la tour ſur la corde F G, ſavoir, O L de la fig. 33, en H *l* de la fig. 34; *ot* en 2^d *t*, *oi* en 1^d *i*; faiſant de même de l'autre côté entre H & f^d, pour avoir la courbe ondée f^d *l* g^d, en développement de l'arête concave. Enſuite on prendra les avances de la doële convexe dont on fera le même uſage, portant O M en H h^d, *on* en 2^d N; *oq* en 1^d Q, & G A en g^d A^d, & par les points trouvés, qu'on peut multiplier autant que l'on voudra en ſubdiviſant l'arc B M A, on tirera la courbe ondée B^d h^d A^d, pour l'arête convexe de la face extérieure *Fig. 33 & 34.* avec la doële, & le développement de la doële ſera le quadriligne mixte B^d g^d.

Pour former les panneaux de lit, on abaiſſera par les points de l'extrados 5, 6, 7, 8, (fig. 33.) des perpendiculaires ſur ſon diametre E D, qui le couperont aux points p^x & p^s, &c. & donneront pour projections développées les lignes droites p^2 p^x & P p^s, que l'on portera & repliera ſur l'arc horiſontal *e* M *d* de la tour en *n q* & *q s*. Par les points *q* & *s* on menera des perpendiculaires *qo*, *su*, aux projections de lits *nt*, & *q i*; puis ayant diviſé les lignes 1, 5; 2, 6, en autant de parties égales qu'on voudra avoir de points de la courbe du joint de tête, par exemple, en trois aux points *a* & *a*, on diviſera auſſi en même nombre de parties égales les lignes de la projection *oq* & *us*, aux points *o* & *o*, par leſquels on menera des paralleles *z o y*, *z o y* aux projections des joints de lit *nt*, *q i*, qui couperont l'arc convexe de la tour en *z* & *z*, & l'arc concave en *y* & *y*.

Cette préparation étant faite, on tracera à part (figure 36.) *Fig. 36.* deux lignes à l'équerre Q *i*, 1, 5; on fera 1, 5 égale au joint de tête 1, 5 de la fig. 33, avec ſes diviſions égales *a*, *a*, par leſquelles

Fig. 33 & 36. & par le point 5 on tirera des paralleles à Q*i*, ſur leſquelles on portera en avant de la ligne 1, 5, les avances *uq*[1], *oz* & *oz*, de la projection en 1 Q, *az* & *az*, & par les points Q*zz*5, on tracera l'arc elliptique du joint de tête convexe, dont la projection eſt l'arc de cercle *q zzs*. On trouvera de même les points de la courbe du joint de tête concave, en portant ſur les mêmes paralleles en deſſous de la ligne 1, 5, les longueurs *oy*, *oy*, *sl* de la projection de la fig. 33, en *ar*, *ar*, 5 *l*, de la fig. 36, & par les points *i*, *r*, *r*, *l*, on tracera la courbe du joint de tête concave; le quadriligne mixte Q 5 *li* ſera le panneau de lit que l'on demande; ainſi de tous les autres, comme on voit celui du joint de tête 2, 6 tracé à la fig. 33, en N*z*6X*r*T, & le ſuivant *e* 5 *li*.

Application du trait ſur la pierre, par panneaux.

Ayant dreſſé un parement de grandeur convenable, on y tracera la doële plane par deux lignes paralleles éloignées de la diſtance de la corde de l'arc droit, par exemple, pour un ſecond vouſſoir, cet intervalle ſera la longueur de la corde $4^r, 3^r$ (fig. 33.) : enſuite ayant levé la cerche de l'arc $4^r f 3^r$, dont cette ligne eſt la corde, on creuſera une doële cylindrique indéciſe vers les deux têtes, dans laquelle on appliquera le panneau flexible de carton coupé ſur le développement de la fig. 34, en $4^x X^d T 4^d$, lequel étant enfoncé dans la doële creuſe, enſorte qu'il s'y applique exactement, ſervira à déterminer le contour des têtes qui étoient indéterminées. On prendra enſuite le biveau mixte de lit & de doële de l'arc droit $8^r 4^r f 3^r$, pour former le lit de deſſous, & $4^r f 3^r 7^r$, pour celui de deſſus, leſquels angles mixtes ne ſeront pas égaux, ſi l'arc droit eſt elliptique.

Ayant abattu la pierre ſuivant ces biveaux pour former les lits, on y appliquera les panneaux qui leur conviennent, ſavoir, celui de la fig. 36, pour le lit de deſſous, qui paſſe par le joint 4^r, & celui qui eſt marqué à la figure 33, en N6XT, pour le lit de deſſus, qui paſſe par le joint 3 ou 2, & l'on tracera les contours courbes de ces panneaux qui donneront ſur les lits plans les traces des joints de tête, ſuivant leſquelles & celles de la doële creuſe qui a été tracée ci-devant, on pourra former la projection concave ou convexe de la tour qui eſt compriſe entre ces trois lignes courbes, en abattant la pierre à vue d'œil de l'une à l'autre. Mais comme on pourroit manquer en quelques endroits,

droits, faute d'être ſuffiſamment guidé, on prendra avec la fauſſe équerre un angle 4 W 7 d'une corde de la doële 4 W avec un à plomb W 7, qu'on tracera ſur la pierre, puis avec une cerche formée ſur l'arc horiſontal de la tour, comme par exemple B M, on formera la tête du vouſſoir en poſant cette cerche perpendiculairement à la verticale 7 W, ou à ſa parallele 7° 4, & la faiſant couler dans cette ſituation ſur cette ligne droite, l'appuyant ſur les autres courbes de tête & de doële, ou de lit & de tête, l'opération ſera exacte. *Fig. 33.*

On voit par cette méthode que les panneaux de tête y ſont inutiles, parce que ne pouvant être formés ſur une matiere flexible propre à être appliquée que ſur la ſurface cylindrique, ils ne ſerviroient tout au plus qu'à vérifier l'opération. Cependant on pourroit s'en ſervir en commençant par former une tête cylindrique, & alors ſi on en faiſoit deux, l'un pour la convexe, l'autre pour la concave, l'on pourroit ſe paſſer de panneau de doële développée. Mais il faut remarquer que ces panneaux de tête ſeroient longs à faire, parce que quand même le ceintre de face auroit été fait ſur une ſurface plane de développement, les joints de tête 1, 5; 2, 6, &c. tirés en ligne droite à l'élévation, ſuivant l'uſage ordinaire, ſeroient faux, en ce qu'ils ne donneroient pas dans l'enveloppement du cylindre de la tour des têtes de lits en ſurface plane, prenant les choſes à la rigueur, parce que le pliement d'une ligne droite ſur une ſurface cylindrique ne peut devenir un arc elliptique que lorſque cette ligne eſt perpendiculaire à l'axe ou au côté du cylindre, comme lorſque le cylindre eſt droit ſur une baſe elliptique; par-tout hors de ce cas, elle ne ſe pliera pas en arc d'ellipſe, ce qui eſt démontré au problême 7 du troiſieme livre, où nous avons parlé du développement des cercles ou ellipſes tracés à la ſurface des cylindres droits & ſcalenes; ainſi pour faire les panneaux de tête avec préciſion, il faudroit tracer les joints de tête du développement ſuivant les mêmes principes, ce qui rendroit l'opération inutilement longue & embarraſſante pour d'auſſi petites parties que ſont celles de chaque joint de tête.

Remarque ſur l'uſage.

Il ne faut pas croire que, parce que la mode de faire des tours ſoit preſque paſſée, le trait de la porte en tour ronde ou creuſe ſoit devenu plus rare, il eſt encore tès-uſuel; car quoiqu'on ne

faſſe plus gueres de tours entieres, on fait très-fréquemment des portions de murs concaves & convexes. Dans les bâtimens civils, rien n'eſt plus ordinaire que les portions de tour ronde & creuſe. Toutes les ouvertures des dômes ſont des portes ou fenêtres en tour creuſe par dedans, & ronde par dehors; telles ſont auſſi les fenêtres d'une partie de l'orangerie de Verſailles, qui ſont des modeles d'un bel appareil, celles que l'on fait dans les *fers à cheval* des grandes entrées, & en une infinité d'autres rencontres.

Porte biaiſe en tour ronde ou creuſe.

L'irrégularité de la direction du milieu d'une porte biaiſe à l'égard de la tour conſiſte en ce qu'elle ne paſſe pas par le centre de la tour, ſi elle eſt circulaire, ou qu'elle n'eſt pas perpendiculaire à la tangente à ce milieu, ſi la tour eſt elliptique, ce qui met quelque différence entre ce trait & le précédent, en ce que la courbe de l'arête de face avec la doële, qui étoit réguliere de part & d'autre de la clef, en cicloïmbre ou en ellipſimbre, devient une ellipſimbre plus ſerrée d'un côté que de l'autre, ſi l'on prend l'arc droit pour ceintre primitif; ce qui devroit donner l'excluſion à cet arc lorſque l'entrée de la porte occupe un grand arc de la tour, parce qu'elle n'eſt pas agréable à la vue; & ſi l'on fait l'arc de face régulier, l'arc droit devient à ſon tour inégal de part & d'autre de la clef.

Fig. 37. Soit (fig. 37) le quadriligne mixte A B D E le plan horiſontal de la baye qu'on veut voûter; on ſe déterminera au choix du ceintre primitif, qu'on peut prendre en trois différens endroits. 1°. Sur la corde A B, ou ce qui eſt la même choſe ſur une ligne A' B', tangente au milieu *m* de l'arc B *m* A de la tour & égale à cette corde, à peu près comme nous avons fait ci-devant à la figure 33, en prenant l'arc droit pour ceintre primitif, lequel arc droit eſt ici différent parce que la corde A B n'étant pas parallele à la ligne E R, perpendiculaire à la direction du milieu *m* K, elle ne lui eſt pas égale, mais plus courte; d'où il réſulte que ſi le ceintre ſur A B eſt circulaire, l'arc droit ſur E R ſera ſurhauſſé. 2°. Comme le choix de la corde A B pour diametre du ceintre primitif cauſe quelques inégalités de diviſion dans les têtes des vouſſoirs à la face, par la même raiſon que nous avons donné au cas précédent, on peut prendre le ceintre primitif ſur le développement de l'arc A *m* B, par exemple, ſur la ligne A' B', ſuppoſée

égale à ſon contour rectifié, & opérer comme il a été dit au cas précédent; mais alors le contour intérieur de la doële deviendra irrégulier, parce que la ligne menée par le milieu *m* de l'arc B A, parallelement à la direction des piédroits B D, A E, ne coupe pas la perpendiculaire R E à ſon milieu *c*, mais plus bas en *x*; de ſorte que la clef de l'arc droit R *h* E ne peut être au milieu *h*, mais au point K, correſpondant à la projection *m* du milieu de la face; ce qui rend l'arc droit couché en façon de rampant. *Fig.* 37.

3°. Enfin ſi l'on a plus d'attention à la régularité de la doële intérieure qu'à celle de la face d'entrée, on peut choiſir l'arc droit pour ceintre primitif, & opérer comme il a été dit au cas précédent; alors faiſant *b* I parallele & égale à R E, & touchante à l'arc horiſontal de la tour en T, on reconnoîtra facilement l'irrégularité que ce choix cauſe au ceintre ſecondaire de face développée *b s a*, en ce que les parties qui ſont peu différentes du ceintre primitif *b s* I vers l'impoſte *b*, deviennent grandes de plus en plus, à meſure qu'elles approchent de l'impoſte oppoſée en *a*. Cependant c'eſt la ſeule conſtruction que propoſe M. *de la Rue* & la premiere du P. *Derand*.

Le ceintre de face, l'arc droit & la projection des joints de lit étant donnés, il ſera facile d'en faire uſage pour tracer les vouſſoirs, comme nous l'avons dit pour la porte droite en tour ronde, ſoit par la voie de l'équarriſſement, ſoit par celle des panneaux flexibles formés ſur le développement de la doële, n'y ayant aucune différence que celle de l'irrégularité, c'eſt-à-dire de l'inégalité des panneaux des parties correſpondantes de chaque côté de la clef, leſquelles étoient égales entr'elles à la porte droite.

Explication démonſtrative.

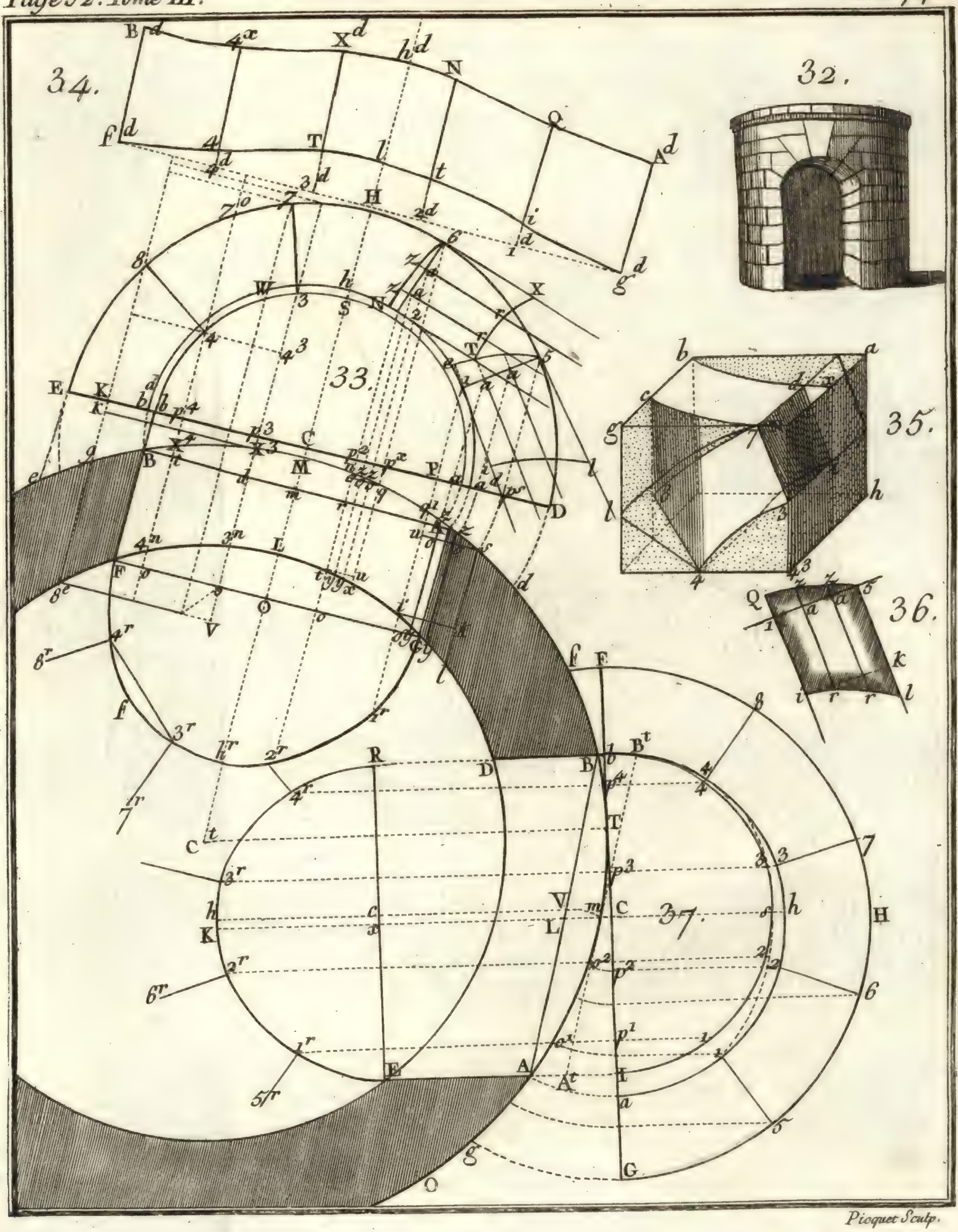
On a vu, par les theorêmes 18 & 20 du premier livre, que l'arête de rencontre des ſurfaces de la tour & de la doële de la porte eſt toujours une courbe à double courbure, tant dans le cas de la porte droite, que dans celui de la biaiſe. Dans le premier cette courbe eſt un cicloïmbre, ſi l'arc droit de la porte eſt en plein ceintre; il ſera une ellipſimbre, ſi elle eſt ſurbaiſſée, & ſi la direction de ſon milieu rencontre l'axe de la tour, auquel cas les parties correſpondantes aux côtés de la clef ſont uniformes; mais dans la porte biaiſe, où cette direction du milieu ne rencontre pas l'axe de la tour, cette même courbe eſt

Fig 37. inégale dans les parties équidiſtantes de la clef, ce qui a été démontré au theorême 20 cité. On a vu auſſi dans les problêmes 37 & 38 du ſecond livre, que pour tracer ces ſortes de courbes il falloit en trouver les ordonnées & les arranger ſur une des deux ſurfaces courbes; par conſéquent de quelque maniere qu'on s'y prenne, il faut toujours commencer par former une de ces deux ſurfaces cylindriques, ou la convexe de la tour ronde, ou la concave de la doële; & comme la doële eſt terminée à deux ſurfaces cylindriques, lorſque la porte perce la tour, ſavoir, à la convexe du dehors & à la concave du dedans, il eſt viſible qu'il convient mieux de commencer par former la partie cylindrique du berceau de la porte, de quelque méthode qu'on ſe ſerve, d'équarriſſement ou de panneaux.

Nous avons propoſé dans les autres voûtes des panneaux de doële plate, même à celles dont les arêtes de rencontre ſont à double courbure & les doëles concaves; mais comme il s'agit ici de celles d'une ſurface concave de doële avec une convexe de face de la tour, on n'y a pas le même avantage; c'eſt pourquoi nous propoſons des panneaux de développement d'une des ſurfaces cylindriques, qui donnent autant de points que l'on veut de cette arête, au lieu que la doële plate n'en donne que deux, qui ſont ceux des extrêmités du joint de tête.

Quelques ouvriers, comme Maître *Blanchard*, dans ſon *traité de la coupe des bois*, ſuppoſent dans leur pratique une ſection plane verticale, de laquelle, comme terme, ils avancent des lignes droites qui déterminent par leurs longueurs pluſieurs points de l'arête à double courbure; voici comme il opere au chap. 14. Après avoir formé le creux cylindrique de la doële ſuivant le trait de l'épure, il y applique une regle pliante, ſuivant laquelle il trace un arc qui tient en quelque façon lieu de corde à l'arête à double courbure, au-delà duquel il porte en avant les ſaillies de cette courbe, priſes ſur la projection; cette méthode eſt bonne, mais elle eſt moins prompte & d'une exécution moins correcte que celle des panneaux flexibles, ſur leſquels il eſt plus facile de tracer par des points trouvés le développement de l'arête que ſur une ſurface creuſe, où l'on ne peut la tracer qu'à la main mal appuyée & plus mal guidée.

Il faut remarquer que quoique la tour ſoit cylindrique, circulaire & d'épaiſſeur par-tout égale, les courbes du développement des arêtes de la doële convexe en dehors & concave au



Pioquet Sculp.

dedans, ne ſont ni égales ni paralleles entr'elles, parce que les arcs A B & F G de la porte droite ne ſont pas ſemblables, c'eſt-à-dire, d'un même nombre de degrés, ce qui eſt viſible en ce que les piédroits A G & B F prolongés ne tendent pas au centre de la tour, ſi on les ſuppoſe paralleles entr'eux; par conſéquent ils ne comprennent pas des parties proportionnelles du cercle intérieur F G & de l'extérieur B A concentrique; la choſe eſt encore plus ſenſible à la porte biaiſe pour les arcs B A & D E.

SECOND CAS.

De la rencontre des berceaux inclinés avec les verticaux.

En termes de l'art,

Deſcente droite ou biaiſe, en tour ronde ou creuſe.

On peut faire différentes diſpoſitions pour ce trait à l'égard du *plan de rampe* paſſant par les impoſtes; car ſi on les fait de niveau entr'elles à l'arc droit, ce plan ſera perpendiculaire au vertical paſſant par l'axe de la deſcente, & ſi elles ne ſont pas telles, il lui ſera incliné.

Premiere diſpoſition, où le plan de rampe eſt perpendiculaire au vertical de direction.

Si la deſcente eſt droite, c'eſt-à-dire, que l'axe de la voûte rencontre celui de la tour, alors les impoſtes de l'arc de face ſeront de niveau entr'elles, auſſi bien que celles de l'arc droit; mais ſi la deſcente eſt biaiſe, c'eſt-à-dire, que ſon axe ne rencontre pas celui de la tour, l'arc de face devient rampant, une impoſte étant plus haute que l'autre, quoique l'arc droit reſte de niveau, comme l'on voit à la fig. 38. Dans l'un & l'autre cas le trait ſera le même pour la conſtruction, à la réſerve que celui de la deſcente droite eſt plus ſimple, en ce que les côtés de la clef de l'arc de face ſont uniformes; c'eſt pourquoi nous choiſiſſons pour exemple celui de la porte biaiſe. Plan. 75. Fig. 38.

Soit le quadriligne mixte A M B D N E, (fig. 39.) le plan horiſontal de la baye d'une deſcente en tour ronde, dont le centre eſt en C^t. On ſe déterminera au choix du ceintre primitif, comme nous l'avons dit ci-devant de la porte en tour ronde ou creuſe, où nous avons choiſi celui de face développée; ici pour variété Fig. 39.

Fig. 39. d'exemple nous choifirons l'arc droit du plan horifontal, c'eft-à-dire, un ceintre perpendiculaire à la direction horifontale de la voûte, qui n'eft pas l'arc droit de la defcente, en ce qu'il n'eft pas perpendiculaire au plan de la defcente, lequel eft incliné à l'horifon. Ayant prolongé les piédroits D B, E A, on leur tirera une perpendiculaire F G qui les coupera en F & G; fur FG comme diametre, on décrira un demi-cercle G *h* F, ou une demi-ellipfe, fi l'on veut, pour ceintre primitif de face, qu'on divifera en fes vouffoirs aux points 1, 2, 3, 4, defquels on abaiffera des perpendiculaires, qu'on prolongera indéfiniment au dedans de la tour. Enfuite par le point E, on élevera fur A E une perpendiculaire E R, qui coupera B D prolongée en R; la ligne B R fera prife pour bafe du profil de la rampe, ou une autre qui lui foit parallele, plus haut ou plus bas. Sur cette bafe on fera l'angle B R P, égal à celui de la rampe avec l'horifon, dont on terminera le côté R P, par la rencontre de la tangente T P, qui eft une perpendiculaire au rayon C^t T, tiré par le point C^t parallelement à D B. Par le point P on menera P *æ* parallele à R B, & égale à *c* F, demi-diametre du ceintre primitif; avec P*æ* comme rayon, on décrira le quart de cercle *æ hf*, fur lequel on portera les divifions de la moitié du ceintre F*h*G en 1*f*, 2*f*, *hf*, par où on menera 1*f i*, 2*f* K, paralleles à P*æ*, qui couperont T P prolongé aux points *i* & *k*, d'où l'on menera les paralleles à R P marquées *i* I, *k* K, *hf s f*, lefquelles feront les projections verticales des joints de lit, fervant pour les deux côtés de la voûte depuis la clef à l'impofte; de forte que ces lignes doivent être confidérées comme doubles en quelques parties.

Préfentement, pour trouver les projections des ceintres extérieur & intérieur, qui déterminent les longueurs de ces joints de lit, il faut tirer par tous les points où leurs projections horifontales coupent les arcs A M B, E N D de la tour, des perpendiculaires à leur direction; ainfi par les points A, 1^t, 2^t, M, 3^t, 4^t, B, on élevera des perpendiculaires qu'on terminera à l'interfection des lignes du profil qui repréfentent les mêmes lits que celles du plan horifontal, comme A *a*, pour l'impofte, qui fe terminera en *a* à l'interfection de R P, 1^t a^1, qui fe terminera à la ligne I *i*, au point a^1, profil du premier joint, paffant par *i*; enfuite 2^t a^2, qui fe terminera à la ligne K *k*, profil du fecond joint en a^2, ainfi des autres; & par les points *a*, a^1, a^2, *hf*, a^3, (qui devroit être auprès de *k*) a^4, auprès de *i* & *b*, on tracera une courbe, qui fera le profil en projection verticale de l'arc de

face. On trouvera de la même maniere le profil de l'arc intérieur R e e^2 h^n e e^1 d; l'espace compris entre ces deux courbes, détermine la longueur inclinée des joints de lit & des doëles, & sert pour faire les panneaux de doële plate, & de doële développée, si l'on veut. Enfin on formera l'arc droit RSE avec les perpendiculaires à la rampe RP comprises entre les projections verticales des lits, savoir, RI, RK, R Sf, faisant q 1^r, q 4^r, égales à RI, q 2^r, q 3^r, égales à RK, &c.

Développement de la doële.

Si l'on veut faire des panneaux de doële plate, on étendra sur une ligne droite E^a R^a (fig. 42.) les cordes de l'arc droit de la fig. 39. Et si l'on veut faire des panneaux de doële creuse sur des matieres flexibles, comme il convient, on rectifiera le contour de la demi-ellipse ESR, (fig. 39) avec toutes ses divisions 1^r, 2^r, 3^r, 4^r, qu'on transportera sur la droite R^d E^d. Ensuite ayant élevé des perpendiculaires sur chacune de ces divisions rectifiées, on y portera les longueurs des avances qui leur conviennent, prises au profil, & non pas au plan horisontal, comme nous avons fait pour la *porte en tour ronde* de niveau, à cause que la descente n'est pas parallele à ce plan, & ces longueurs se mesureront depuis la ligne Rsf, (fig. 39.) qui est le profil de l'arc droit. Ainsi pour joint de lit de l'imposte, on prendra R d, qu'on portera en E^d, A^d, de la fig. 42, pour le dehors convexe; ensuite pour le premier joint de lit au-dessus, on portera la longueur Ia pour le dehors en 1^r a, & Ie pour le dedans en 1^r e^1. De même pour le second lit K a^2 & Ke^2, pour le milieu sf hf en s^r h^r; puis en redescendant au profil, on prendra Ka^3 & Ke^3, Ia^4, Ie, Rb & R d, qu'on portera, à la fig. 42, en 3^r a^3, 3^r e^3; 4^r a, 4^r e; R^d B, & R^d d^d.

Fig. 39 & 42.

Si l'on vouloit faire des panneaux de joint, on le pourroit par la même méthode que nous avons donné pour la porte ronde de niveau, car ce sont toujours des portions d'ellipses un peu plus ou moins concaves ou convexes, dont il suffira dans la pratique de trouver un point ou deux au milieu du joint de tête; ainsi prenant pour exemple celui qui est marqué 2, 6, on prendra à volonté un point m vers son milieu, on abaissera des points m & 6, des perpendiculaires paralleles à 2 p, lesquels couperont les arcs AB & ED, du plan horisontal de la tour en des points u, u, d'où l'on tirera des perpendiculaires aux précédentes qui coupe-

ront la ligne de rampe RP, en des points x, x, au dessus desquels on portera les hauteurs $o\,m$, $o\,6$ en $x\,y$ & $x\,y$; la ligne courbe $y\,y\,e^2$ sera le profil du joint de tête concave; on tracera de même la convexe, qui servira à trouver la courbe de la tête du joint, en prenant pour ligne de direction le joint de tête 2, 6, au lieu de $f\,f$ T, que donne le profil, parce que $f\,f$ T est raccourcie par la projection ; ainsi portant sur la directrice du développement R^a E^d (fig. 42) la longueur 2^r T, égale à 2,6 , de l'élevation , & tirant les ordonnées tY, Ty, égales à celles du profil , on aura les points e^2 , Yy pour l'arc concave de la tête du joint de lit ; le convexe opposé a^2 b^8 se trouvera de même. On peut s'épargner cette peine en formant la tête par voie d'équarrissement, comme nous allons l'expliquer.

Application du trait sur la pierre.

Fig. 39. Ayant dressé un parement , par exemple pour un second voussoir 1, 2 , on y tracera deux paralleles à la distance de la corde de l'arc-droit 1^r 2^r , puis avec la cerche convexe de l'arc-droit 1^r n 2^r, on creusera la doële quarrément au parement & à ces deux paralleles qui seront les arrêtes de joints de lit & de doële. On appliquera ensuite dans cette surface concave cylindrique le panneau du développement fait sur une matiere flexible e^1 c^2 , a^2 a^1, de la fig. 42 , pour tracer le contour des têtes courbes a^2 a^1, e^2 e^1. Ensuite prenant le biveau mixte de doële & de lit qui convient , 1^r 2^r 6 pour le lit de dessus, 2^r 1^r 8 pour celui de dessous , on abattra la pierre pour former les surfaces planes de ces lits , sur lesquelles on appliquera les panneaux de lit , si on les a fait , ou qu'on terminera par équarrissement, comme il suit.

On tirera sur l'épure une horisontale 2, 5 sur la tête du voussoir , & on lui menera du point 1 une perpendiculaire 1 7 , puis prenant le biveau 2, 17, on posera quarrément une de ses branches sur les arêtes de la doële, & l'autre donnera une ligne sur la tête , qu'on dirigera avec le biveau de la rampe & de la tête RPk , dont on posera une branche sur l'arête du joint de doële & de lit de dessous, & l'autre qu'on fera joindre à la branche du biveau de doële & d'àplomb 2, 1 7. On abattra la pierre suivant ces deux biveaux pour avoir une cizelure 1 7 9 sur la tête, à laquelle on fera une perpendiculaire 2, 5, qu'on creusera avec la cerche concave de l'arc de la tour AM , posée quarrément sur la ligne 1, 9, & sur les points donnés 5, 2, ou ce qui est le même , a^2 du profil qui a été determiné par le panneau de doële & le

point

point trouvé 7; ainsi faisant couler cette cerche parallelement à elle-même sur la ligne 1, 9, on fera la surface convexe de la tour, en abattant la pierre à la regle sur les repaires qu'aura donné la cerche, & l'on formera ainsi les têtes elliptiques des lits, sans en avoir cherché la courbure. On en usera de même pour la surface concave du voussoir au dedans de la tour, avec cette différence qu'il faudra poser les biveaux de doële & de tête & de doële & d'à-plomb, au lit de dessus qui avance le moins en dedans, au lieu qu'à la surface extérieure on les posoit au lit de dessous qui avançoit le moins en dehors. *Fig. 39.*

Explication démonstrative.

Le ceintre G *h* F, étant supposé vertical & perpendiculaire à la direction horisontale de la descente, sera égal à toutes les sections paralleles à GF, tangente de la tour; ainsi il peut être considéré comme posé en ER, en Ag, & suivant toutes les paralleles qui passent par les points 1^t, 2^t, M, &c. 1^n, 2^n, N, &c. & toutes ces lignes seront les profils, ou projections verticales des sections égales à ce ceintre, dont les diametres sont supposés rangés perpendiculairement sur la ligne de rampe RP, de sorte que suivant les regles de la projection ils n'y sont représentés que par des points, comme R, *d*, *a*, *b*, &c. Ainsi toutes les hauteurs des à-plombs du ceintre primitif pour chaque joint de lit, ont dû être portées sur les verticales, au dessus de la ligne de rampe R P, ce qui a été fait en menant des paralleles à la rampe par les hauteurs 1*f*, 2*f*, *hf*, du quart de cercle *æ hf*, lequel doit être supposé tourné & posé perpendiculairement au plan du papier sur son rayon P *hf*. Or parce que l'arc droit doit être perpendiculaire au plan de la rampe, on a tiré RT perpendiculaire à RP, laquelle est coupée proportionnellement par toutes les paralleles à la ligne de rampe qui expriment la hauteur des joints: ainsi cette ligne est la projection verticale de toutes les hauteurs des divisions de l'arc-Droit sur son diametre ER.

Quant à l'opération de l'équarrissement pour former la surface courbe de la tête des voussoirs, il est clair que la ligne 1, 9 étant verticale, sera dans le même plan que le joint de lit qui passe par le point 1; par conséquent que l'angle du joint de lit avec celui de tête est égal à celui de rampe; de même l'angle de la doële 2, 1 7 est dans un plan vertical qui peut être considéré dans sa projection en L 1^t dans la doële quarrément aux joints de lit 1^a

1^t & 2^n 2^t, par conféquent il fera perpendiculaire au précédent; dont l'interfection fera la ligne 1, 9, ce qu'il falloit faire pour avoir une ligne à la furface du cylindre, qui fût parallele à fon axe, pour pouvoir y pofer perpendiculairement une cerche de l'arc horifontal de la tour, lequel eft donné au *plan*, par le moyen duquel on peut former la tête du vouffoir & les fections elliptiques de fes lits, par la même méthode qui fert à former toutes les furfaces cylindriques concaves ou convexes, en faifant couler une regle parallelement à l'axe fur deux arcs donnés.

Seconde difpofition des defcentes en tour ronde ou creufe, où le ceintre primitif eft de niveau & l'arc droit rampant.

Dans la précédente difpofition nous avons formé le ceintre primitif fur une fection verticale perpendiculaire à la direction horifontale du berceau en defcente, d'où il fuit qu'elle étoit auffi perpendiculaire au plan vertical paffant par l'axe du berceau, foit qu'il fût droit ou biais. Lorfque le berceau étoit droit, fes impoftes étoient de niveau dans les points refpectifs, quoique en defcente fuivant la direction; mais lorfqu'il étoit biais, elles étoient à différentes hauteurs, & celles de l'arc droit de niveau. Ici nous prenons ce ceintre dans un plan vertical parallele à la corde A B de l'arc B C A de la tour, qui eft comprife entre
Fig. 41. les piédroits de la defcente. Lorfque le berceau eft droit, cette difpofition retombe dans la précédente; mais lorfqu'il eft biais, il en réfulte que les impoftes de la defcente font toujours de niveau, confidérées parallelement à cette corde, quoiqu'inclinées fuivant la defcente. Il en réfulte auffi qu'on peut même faire les têtes égales, fi au lieu d'une fection du berceau on developpe fa face fur la tour BCA, en la rectifiant fur une ligne droite GF, comme nous avons dit pour la porte en tour ronde par *têtes égales*. Enfin il en réfulte, comme aux defcentes biaifes à faces planes, que les impoftes de la face étant de niveau, celles de l'arc droit deviennent rampantes.

Fig. 40 & 41. Soit (fig. 41) la corde AB de l'arc ACB; par le point C, milieu de cet arc, on tirera GF parallele à AB, qui fera terminée aux points G & F, par l'interfection des piédroits DB, EA prolongés. Sur GF, comme diametre, on décrira un demi-cercle G *h* F, ou fi l'on veut une demi-ellipfe furhauffée ou furbaiffée pour ceintre primitif, lequel étant divifé en fes vouffoirs aux points 1, 2, 3, 4, on abaiffera fur fon diametre des perpendi-

culaires qui le couperont aux points *p*, *p*, par lesquels on menera des paralleles à la direction de la voûte, c'est-à-dire, aux piédroits DB, EA, qui couperont la surface extérieure aux points 1^t 2^t 3^t 4^t, & l'intérieure aux points n^1 n^2 n^3 n^4. Par tous ces points on élevera des perpendiculaires, qui couperont les côtés du plan de la rampe R*bae*, qu'on tracera au profil, comme nous l'avons dit des descentes ordinaires, au probl. XII. du tome précédent. Fig. 41.

La ligne de rampe R*b*, étant donnée avec sa base horisontale RB, on menera par le point C, milieu de l'arc AB, une verticale ch^t, qui coupera l'horisontale menée par le point *b*, sommet de la ligne de rampe donnée, au point *o*, au-dessus duquel on portera les hauteurs des divisions du ceintre primitif *p* 1, *p* 2, C*h* en a^4, a^3, h^t, par où on menera des paralleles à l'arc RB, a^4 a^1, a^3 a^2, lesquelles seront terminées de part & d'autre par l'intersection des verticales provenant des points qui leur correspondent à la projection horisontale; par exemple l'horisontale *o a*, sera terminée en *b* & *a*, par les lignes A*a* & B*b*, provenant des points A & B; de même l'horisontale a^1 a^4, par les lignes 1^t 4^t, provenant des points 1 & 4; l'horisontale a^2 a^3, sera terminée par les lignes 2^t 3^t, provenant des points 2 & 3; & par tous les points a^1, a^2, a^3, a^4, on menera des paralleles à la ligne de rampe R*b*, lesquelles couperont les lignes verticales provenant des points E, n^1, n^2, n^3, n^4, aux points *e*, e^1, e^2, n^e, e^3, e^4, *d*, par lesquels on tracera une courbe qui sera la projection verticale de l'arc de face intérieure, comme la courbe *a*, a^1 a^2 h^t a^3 a^4 *b*, est celle de la face extérieure. Les lignes rampantes qui sont dans l'intervalle de ces deux courbes donnent les longueurs des joints de lit qui sont représentés au plan horisontal par des lignes trop courtes EA, n^1 1^t, n^2 2^t, NC, &c. à cause de l'inclinaison de la voûte.

Il ne reste plus à présent qu'à former l'arc droit, qui doit être rampant, parce que la descente est biaise & que le diametre de l'arc de face est de niveau. Par le point R, ou tout autre de la ligne R*b*, on menera une ligne RS, perpendiculaire à R*b*, laquelle RS coupera toutes les paralleles à la ligne de rampe en des points *g*, 4, 1, 3, 2, S, qui seront les hauteurs des divisions du ceintre de l'arc-droit; mais avant que d'en faire usage, il faut trouver le diametre incliné de cet arc rampant. Sur AE prolongée on portera la longueur R*g* de E en *œ*, & l'on tirera

Fig. 41. R œ qui sera le diametre rampant de l'arc droit & dans le même plan que sa base horisontale ER, sur laquelle on portera successivement toutes les longueurs des divisions de la ligne RS, sur les projections des joints de lit correspondans; ainsi on portera sur le premier $1^r q$ prolongé, la hauteur R 1 de q en 1^r, R 2 du profil en $q\ 2^r$, RS en Qs, R 3 en $q\ 3^r$, R 4 en $q\ 4^r$, & par les points œ, 1^r, 2^r, s, 3^r, 4^r, R, on tracera une demi-ellipse, qui sera l'arc-droit demandé, qu'on pouvoit aussi tracer par le probl. VIII du deuxieme livre, par les diametres conjugués donnés œ R & deux fois $s\ c^r$, avec l'angle $s\ c^r$ œ.

Présentement, on a tout ce qui est nécessaire pour former les panneaux. 1°. Ceux de doële seront formés à l'ordinaire avec les joints de lit dont les longueurs sont données au profil entre les deux courbes *e nf d*, *a* h^t *b*; leur intervalle ou distance perpendiculaire est aussi donnée par les cordes de l'arc droit, & l'obliquité de leurs angles se trouvera comme au premier cas de ce trait, par la distance de leurs sommets au profil de l'arc-droit RS, portée sur la directrice du développement R^d E^d, *fig.* 42. Pour les panneaux de lit, à cause de la courbure de leur tête, il faut faire, comme à l'exemple précédent, un extrados & quelques divisions, au moins une sur le joint de tête, pour avoir la fleche de l'arc 2^t 6^t (fig. 41.) qui est la projection horisontale de ce joint, laquelle fleche donne celle de l'arc elliptique qui est la tête du panneau de lit pour le dehors en saillie; il en est de même de la tête intérieure $n^2\ n^6$, qui est seulement un peu plus longue & creuse, au lieu que l'autre est convexe. Les panneaux de doële & de lit étant donnés, ils serviront à former aussi la tête du voussoir de la maniere expliquée ci-devant pour la porte en tour ronde, & le premier cas de ce trait pour la *descente* en tour ronde.

Explication démonstrative.

Le diametre G F du ceintre primitif vertical étant parallele à A B, par la construction, & compris entre les paralleles D G, E F, ce ceintre est égal à toutes les sections paralleles à A B; ainsi cette voûte est une moitié de cylindre scalene dont la base a une double obliquité à l'égard de son axe; savoir une horisontale Q C F ou Q C G, & une verticale R *b* B, ou son supplément R *b* h^t, enquoi ce cas differe du précédent, où le ceintre primitif étant droit sur la direction horisontale, le cylindre

n'avoit qu'une obliquité à ſon axe, qui étoit la verticale; c'eſt pourquoi le plan paſſant par l'axe & par le diametre GF du ceintre primitif, eſt incliné au plan vertical paſſant par cet axe, d'où il réſulte que la projection verticale de ce plan n'eſt pas une ſeule ligne droite, comme R P dans le cas précédent, mais une figure mixtiligne *e a c f*, *b d n f*, compoſée des deux lignes droites *e a* & *b d*, qui ſont les impoſtes de la voûte, & de deux arcs elliptiques *a c f b*, & *d n f e*, qui ſont les ſections de ce plan avec les ſurfaces intérieure & extérieure de la tour, & parce que les arcs A B & E D, que retranchent les piédroits, ne ſont pas ſemblables, ces ſections elliptiques ne le ſont pas auſſi; d'où vient que la corde *e d* de l'intérieure n'eſt pas parallele à la corde *a b* de l'extérieure, qui eſt de niveau. De-là vient auſſi que le ceintre intérieur E N *d* (fig. 40.) eſt rampant, quoique le primitif A *h* B ſoit de niveau. A l'égard de l'arc droit, il eſt rampant, par la même raiſon que nous avons donné pour les deſcentes biaiſes des voûtes ſimples. *Fig. 40 & 41.* *Fig. 40.*

De la rencontre des berceaux inclinés à l'horiſon avec les horiſontaux.

PROBLEME II.

Faire un berceau en deſcente, qui en rachete un autre de niveau.

Cette rencontre peut ſe faire ou perpendiculairement, ou obliquement.

PREMIER CAS.

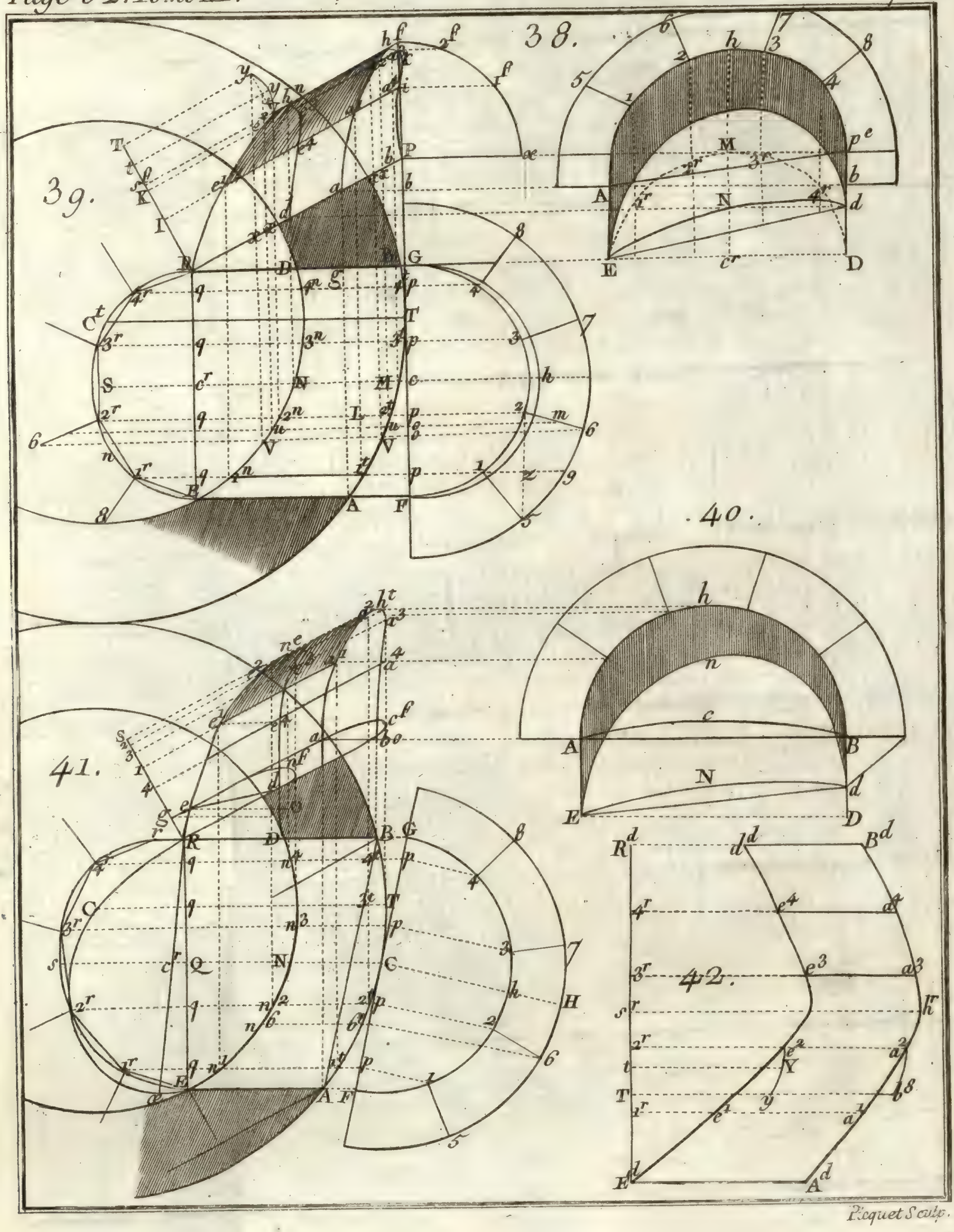
Lunette rampante, ou deſcente droite rachetant un berceau de niveau.

On peut faire ce trait de deux manieres, l'une en faiſant ſimplement aboutir les vouſſoirs de la deſcente au berceau de niveau, ſans y faire aucun enfourchement, comme fait le P. *Derand* & après lui M. *de la Rue*; enſorte que les lits de la deſcente percent la doële de l'autre berceau, qui eſt de niveau. L'autre maniere, que je préfere à celle de ces Auteurs, eſt de faire la rencontre des berceaux en enfourchement par des vouſſoirs à branches, comme nous l'avons dit ci-devant des voûtes d'arêtes & des lunettes; ma raiſon eſt que l'appareil en eſt plus ſolide & plus beau, en ce que dans la premiere méthode on coupe la

doële du berceau de niveau, par des joints de tête de la descente dans la doële du berceau, qu'on peut éviter, & dont l'inégalité entr'eux est inévitable, parce que, supposant les lits de largeurs égales, il est clair que les sections de ceux des impostes avec cette doële donnent des lignes droites paralleles à l'axe du berceau de niveau, & qu'à mesure qu'ils s'inclinent en approchant vers la clef de la descente, ils se courbent de plus en plus & forment à cette doële un arc elliptique, qui devient aussi d'autant plus grand que la clef de la descente approche de la tangente T*t* de l'arc droit AHB, du berceau de niveau, parallelement à l'axe B*c* de celui de la descente, & qu'au-delà de cette tangente les joints de tête sont sans terminaison à la doële, parce que la tangente T*n* rentre dans l'épaisseur de la voûte A *n* Y; à quoi les Auteurs n'ont pas pourvu.

Plan 76. *Fig.* 43. Soit le rectangle AB *b a*, (fig. 43.) le plan horisontal du berceau de niveau; EG*ge*, celui de la descente ou lunette, & la ligne BL, le profil de son inclinaison à l'horison. Sur AB, comme diametre, ayant décrit le ceintre du berceau de niveau, circulaire ou elliptique, on tracera sur G*g*, comme diametre, l'arc droit G*h*ʳ *g* de la descente, soit qu'il soit primitif, (par l'attention que l'on a premierement à la surface de la doële, plutôt qu'à celle de face) soit qu'il soit secondaire, résultant d'un ceintre de face primitif, comme pourroit être au profil le quart d'ellipse *c hf*, *parce que nous prendrons toujours dans la suite l'arc droit de la descente pour ceintre primitif*, pour éviter les redites touchant les rapports des arcs de face de descente ou de montée avec les arcs droits, dont nous avons traité au problême XII des descentes simples (tome précédent), où nous avons donné la maniere de le tracer relativement à toutes les situations des faces à plomb, en talud, biaises, sans talud, ou avec talud, &c.

Soit donc le demi-cercle, ou la demi-ellipse Gh^r *g*, le ceintre de l'arc droit divisé en ses voussoirs aux points 1, 2, 3, 4, on menera par ces points des perpendiculaires à son diametre G*g*, prolongées au-delà indéfiniment, qui le couperont aux points t^1, t^2, t^3, t^4. Par un point *c*, pris à volonté sur le profil de rampe BL, on lui tirera une perpendiculaire *c*IK, sur laquelle on portera les hauteurs des retombées 1 t^1 en *c* a^1, & 2 t^2 en *c* a^2, enfin M h^r en *c*I; par les points I, a^2, a^1, on tirera des perpendiculaires indéfinies à *c*K, qui couperont l'arc droit AHB du ber-


38.
39.
40.
41.
42.
Picquet Sculp.

ceau de niveau, aux points 1^n, 2^n, F, & la ligne *hc* de la face de la descente, que je suppose à plomb ou en talud (il n'importe) aux points u^1, u^2. *Fig. 43.*

Présentement, nous avons différentes choses à faire, suivant la fin qu'on peut se proposer de tailler les voussoirs par équarrissement, ou par panneaux & par enfourchement, comme les voûtes d'arêtes, ou par joints de têtes traversans la doële du berceau de niveau. Sil'on veut faire la rencontre de ces deux berceaux par enfourchement & par équarrissement, comme les voûtes d'arêtes & les lunettes de berceaux, il faut en faire la projection sur le plan horisontal AB *ba*, en menant par les points trouvés au profil 1^n, 2^n, des perpendiculaires sur AB, prolongées au-dessous jusqu'à la rencontre des projections des joints de lit de la descente, qu'elles rencontreront aux points p^1, p^2, p^3, p, le *gnomon*, c'est-à-dire la figure en forme d'équerre q^1 p^1 t^1 GEB, sera la projection du premier voussoir, le gnomon suivant q^2 p^2 t^2 t p^1 q^1, sera celle du second voussoir, celle de la clef sera en forme de T, Q q^e, q^1, p^3, N^3 N^2 p^2 q^2, parce qu'elle est la moitié de la croix, qui est la forme de celle de la voûte d'arête.

Par le moyen de ces projections on peut tailler les voussoirs par équarrissement, comme ceux des voûtes d'arêtes, observant seulement de donner aux branches de la descente l'inclinaison du biveau formé sur l'angle de rampe *c*BD. Mais si l'on veut opérer par panneaux de doële plate, cette projection est inutile; il faut faire le développement de chacune des surfaces des berceaux qui se rencontrent, en particulier. Pour le berceau de niveau, il faut rectifier l'arc du profil B 1^n 2^n, par ses cordes, que l'on portera sur le milieu de la projection de la descente M*m*, savoir, la corde B1^n en ON, celle de l'arc 1^n 2^n en NQ, & par les points N & Q, on menera des paralleles à B*b*, qui couperont les projections des joints de lit de la descente aux points 1°, 4°; 2°, 3°; si l'on tire par ces points de l'un à l'autre des lignes droites E1^o, 1°, 2°, &c. on aura le polygone EQ*e*, qui sera le développement du trou que fait la descente réduite en prisme dans le berceau de niveau réduit aussi en prisme par les doëles plates. Ainsi la tête de la premiere doële du berceau de niveau sera la figure BE1^oV, qui servira aussi pour son égale opposée *e*4°, tournée en sens contraire; la tête de la seconde doële sera la fig. V 1° 2° *q*, laquelle servira de même pour le quatrieme voussoir en la tournant en sens contraire, &c. la clef sera droite.

Fig. 43. Pour faire le développement des doëles plates de la descente, il faut rectifier l'arc droit G h^r g, par les cordes de ses divisions 1, 2, 3, 4, & placer la ligne de direction, lorsqu'on le peut, sur la prolongation d'une ligne c K, perpendiculaire à la rampe B c; mais comme la grandeur de la planche ne nous laisse pas suffisamment de place, nous la poserons en G^d g^d, parallelement à D d, posant son milieu en m^d, sur la projection de son axe à une distance O m^d du piédroit du berceau de niveau qui soit égale à B c de la rampe; ainsi pour déterminer les avances des angles de ce développement, on menera par les points u^2 u^1, du profil de sa face de descente h c, des perpendiculaires sur la ligne de rampe B L, qui la couperont aux points 1^s, 2^s; puis du point B, pour centre, on tracera par ces points des arcs de cercles qui couperont A B prolongée aux points r^1 r^2, par lesquels on menera des paralleles indéfinies à la directrice G^d g^d. On en usera de même pour le côté de la lunette; par les points 1^n 2^n on menera des perpendiculaires à la rampe Bc qui la couperont aux points x^1 x^2, qu'on transportera aussi sur B D, par des arcs qui la couperont en des points par lesquels on menera des paralleles à Bb ou e^x e^d, puis par les points V^1, V^2, V^3, V^4, G^d g^d, qui sont ceux des divisions de l'arc droit rectifié par ses cordes, on menera des paralleles à la direction M O de la descente, lesquelles rencontreront les paralleles à e^x e^d de la lunette aux points N^1, N^2, N^3, N^4, e^x e^d, où seront les angles de concours des panneaux de doële plate inscrits dans l'arête de la lunette.

Les mêmes paralleles à la direction de la descente donneront aussi par leurs intersections avec les paralleles à la face Gg, les points 1^d, 2^d, 3^d, 4^d, G^d g^d où seront les angles des avances des têtes des panneaux de doële plate à la face de descente. Si par tous ces points trouvés, tant au développement de l'arête de lunette qu'à celui de descente, on tire des lignes droites, on aura toutes les inclinaisons des têtes des doëles plates sur les arêtes des lits; & si au lieu de lignes droites, on trace avec une regle pliante une ligne courbe qui passe par ces mêmes points, on aura les contours des extrêmités des berceaux de niveau & en descente, où se forme l'arête de la lunette; lesquels contours, quoique extrêmement differens, comme E 1° 2° 3° 4° e du berceau de niveau, qui est tout dans les rentrans, & e^x N^1 N^2 N^3 N^4 e^d, qui fait deux angles rentrans en N^1 & N^4,

N⁴, & deux faillans en N² N³, s'ajuſteront cependant exactement l'un à l'autre, lorſqu'ils ſeront pliés ſur les ſurfaces cylindriques des deux différens berceaux de niveau & en deſcente, parce que l'arrête qu'ils doivent former par leur concours eſt une courbe à double courbure, que nous avons appellée ellipſimbre. *Fig. 43.*

Les deux développemens qui donnent les panneaux de doële plate ſuffiront pour l'exécution du trait, ſans qu'il ſoit néceſſaire de tracer les panneaux de lit, ſi l'on fait la jonction du berceau de niveau avec celui en deſcente par enfourchement, c'eſt-à-dire, avec des vouſſoirs à deux branches, dont l'une entre dans le berceau de niveau, l'autre dans le berceau en deſcente. Mais ſi l'on vouloit, ſuivant la méthode des auteurs, les faire tout unis ſans retour, faiſant pénétrer les lits de la deſcente au travers de la doële du berceau de niveau, il faudroit chercher les courbes des têtes de ces lits, qui ſont viſiblement des arcs elliptiques qui ſe redreſſent depuis la clef, où le joint ſeroit circulaire s'il y en avoit un (comme N^x F, où il ſe confond avec l'arc droit, que nous avons ſuppoſé circulaire) juſqu'à l'impoſte E, où il devient tout à fait en ligne droite, parce que ce joint devient parallele à l'axe du berceau. Il s'agit donc de ralonger les arcs compris au profil entre les lignes 1^n 1, 5^n 5, 6^n 6, 2^n 2, tirées parallelement à la deſcente par les points 2 & 6 de l'arc droit, ſavoir à la doële en 2 & par le point d'extrados 6 ; ce que l'on fera de la même maniere que nous l'avons dit pour les têtes de la porte en tour ronde. On menera par exemple pour le ſecond joint une ligne 2^n P, perpendiculaire ſur 2^n 2, qui coupera l'extrados 6^n 6 au point P, on diviſera P 2^n en trois aux points *a* & *b*, par où l'on tirera des paralleles à 2^n 2 qui couperont l'arc $6^n 2^n$ aux points *x y*. On tracera enſuite dans une figure à part, comme en celle marquée 46, une ligne P 2^n, égale à *p* 2^n du profil, laquelle étant diviſée en trois également aux points *a* & *b*, on lui menera par les points P, *a* & *b*, des perpendiculaires, qu'on fera égales à celles du profil, ſavoir, P 6^n à *p* 6^a, du profil, *a* X égale à *a x*, *b* Y égale à *b y* de la fig. 43; & par les points 6^n XY 2^n, on tracera l'arc elliptique, qui ſera la tête du panneau du ſecond lit, qui perce dans le berceau de niveau.

On trouvera de la même maniere la courbe du premier lit ſur le ralongement de l'arc 5^n 1^n, où la courbure eſt peu ſenſible, parce que cet arc eſt fort près du point d'attouchement de

Fig. 45 & 46. la perpendiculaire à la rampe qui toucheroit le demi-cercle A H B, car la ligne du lit 1, 1^n, parallele à cette rampe, paſſe tout près du centre C de l'arc droit du berceau de niveau. D'où il ſuit, par un raiſonnement contraire, que ſi l'on tire à cette rampe *c* B, prolongée vers X, une perpendiculaire T *z*, qui paſſe par le centre C, elle coupera l'arc droit au point T, où ſera la terminaiſon des avances du plus grand joint de tête d'extrados de deſcente, ou bien le dernier point où l'on puiſſe avancer la clef de la lunette; auquel cas le trait des auteurs devient impoſſible; il faut alors en revenir à l'enfourchement des vouſſoirs à branches, pour racorder les deux voûtes. Nous ne diſons rien des têtes des panneaux de lit à la face de deſcente, parce qu'il en a été ſuffiſamment parlé au probl. XII du Tome précédent, lorſque nous avons traité des deſcentes ſimples.

Application du trait ſur la pierre.

Supoſant qu'on faſſe la rencontre des deux voûtes par enfourchement, on pourra commencer par la branche du vouſſoir qu'on voudra faire la plus longue, ou par celle qu'on voudra, ſi elles ſont égales; nous commencerons par celle qui entre dans le berceau de niveau, par exemple au ſecond vouſſoir, dont la projection horiſontale eſt le gnomon $q^2 p^2 t^2 t^1 p^1 q^1$. Ayant dreſſé un parement de ſupoſition horiſontale, pour y placer l'arête du lit de deſſous à la doële p^1 q^1, on fera ſur cette ligne une perpendiculaire p^1 1° ſur laquelle on poſera une branche du biveau ouvert ſur l'angle $o\, 1^n\, a^1$, ou C B *c* du profil, qui eſt celui
Fig. 43 & 45. de la rampe avec l'horiſon, ſuivant lequel on abattra la pierre dans la même direction, pour avoir auſſi l'arête du lit de deſſous de la deſcente marquée au profil 1^n a^1, & au plan horiſontal p^2 t^2; enſuite ayant ouvert le biveau ſur l'angle a^1, 1, 5 du profil, on poſera une de ſes branches ſur la premiere ligne q^1 p^1, l'autre donnera l'inclinaiſon de la doële plate de la deſcente, quarrément par l'arrête de ſon lit p^1 t^1. On appliquera ſur ce nouveau parement le panneau de doële plate qui lui convient pour le ſecond vouſſoir marqué au développement N^1 1^d 2^d N^2, poſant le côté N^1 1^d ſur l'autre marqué au profil 1^n u^1, & le point N^1 du panneau ſur le point 1^n de la rencontre de l'arête du lit de deſſous du berceau de niveau avec celui de la deſcente; dans cette poſition, on tracera ſur le nouveau parement le con-

tour du panneau N 1^d 2^d N, pour avoir la poſition des angles N de la lunette au lit de deſſus, & 2^d de la face de deſcente au même lit. On a donc alors trois points de la doële plate du berceau de niveau, ſavoir, deux au lit de deſſous q^1 p^1, & un à l'angle du lit de deſſus, repréſenté au plan horiſontal par p^2; ainſi on peut former (par le probl. I. du quatrieme Livre) la doële plate de la branche du berceau de niveau, & ſi l'on veut, pour vérification, y en appliquer le panneau de développement V 1° 2° Q.

Les doëles plates étant tracées, il eſt très-aiſé d'achever le vouſſoir en formant les lits de deſſus & de deſſous avec le biveau de doële plate & de tête, ſavoir, avec l'angle 2, 1, 5, pour le lit de deſſous de la deſcente; 1, 2, 6, pour celui de deſſus; 2^n 1^n 7, pour le lit de deſſous du berceau de niveau, & le même pour le lit de deſſus, s'il eſt circulaire; ainſi le vouſſoir à deux branches ſera achevé, en formant les têtes d'équerre aux arêtes des lits dans le berceau de niveau, & même dans celui de la deſcente, lorſque la branche ne parvient pas juſqu'à la face.

Pour former la deſcente à vouſſoir ſimple, ſans enfourchement, il n'y a point de difficulté; ayant les panneaux de doële plate, ceux des lits, dont les têtes ſont concaves, donneront la partie du berceau de niveau qui forme la tête. *Fig.* 44.

REMARQUE.

Quoique cette derniere conſtruction ſoit celle du P. *Derand*, adoptée par M. *de la Rue*, il eſt clair qu'elle ne convient pas ſi bien à la ſolidité que celle de l'enfourchement, parce que les vouſſoirs y tendent à gliſſer dans le berceau de niveau, n'étant retenus que par le frottement de leurs lits.

Explication démonſtrative.

Il eſt clair (par le théor. 20 du premier Livre) que la ſection formée par la rencontre des ſurfaces de deux cylindres ou berceaux qui ſe croiſent à angle droit, comme dans le cas préſent, ſans que les axes ſe rencontrent, eſt une ellipſimbre, en quelque ſituation que ſoient ces berceaux à l'égard de l'horiſon; ainſi il eſt viſible que quelque ligne qu'on prenne pour l'horiſontale, comme XB*c*, quoique inclinée à l'horiſon, pour y faire la projection de cette courbe, il n'en réſultera aucun changement de conſtruction de la lunette de niveau dans un berceau *Fig.* 43.

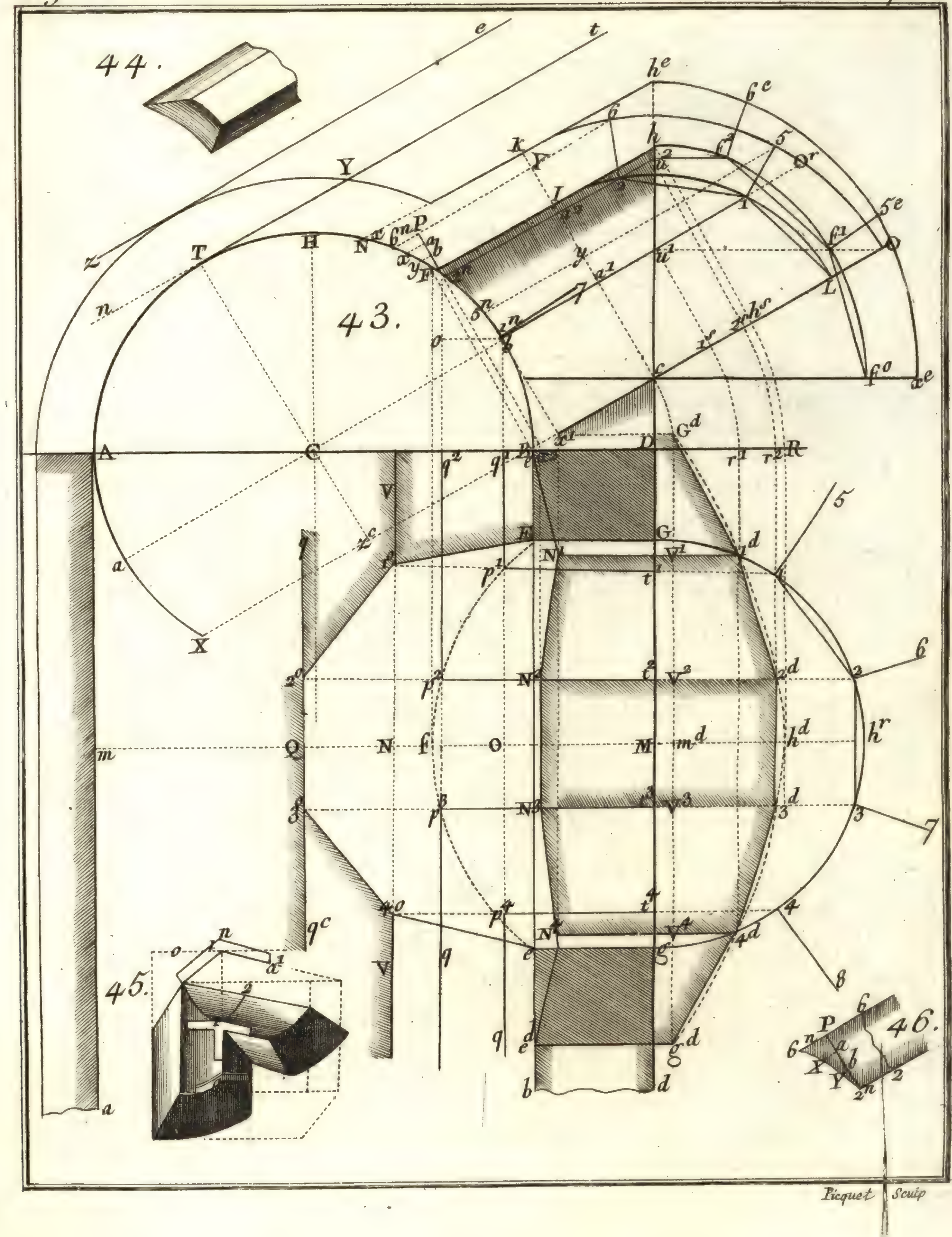
Fig. 43. de niveau, dont nous avons parlé ci-devant ; la ſeule différence eſt que le berceau racheté X A H B, ſeroit plus grand qu'un berceau ordinaire, dont les naiſſances doivent toujours être ſur un diametre *a b*, au lieu qu'étant ici ſur une corde X B, les parties *a* X, *b* B deviendroient en talud. C'eſt ſuivant cette ſuppoſition que nous avons fait la projection de la deſcente, pour avoir les longueurs des arêtes des lits & leurs avances les unes ſur les autres ; mais pour éviter la confuſion des lignes de l'épure, nous les avons tranſporté par des arcs de cercles ſur une horiſontale réelle A B, prolongée pour faire la projection & le développement du berceau de niveau, ce qui ne change rien aux dimenſions, puiſque les premieres longueurs trouvées ont été portées ſur B R, partie de A B prolongée.

L'application du trait ſur la pierre ſera facile à concevoir, pour peu que l'on y faſſe d'attention; nous avons commencé par faire paſſer une ſurface horiſontale par l'arête du lit de deſſous pour y rapporter l'inclinaiſon de la deſcente, par une direction perpendiculaire à la commune interſection du plan horiſontal avec la doële plate, & du vertical, paſſant parallelement à la direction de la deſcente avec le vertical, ainſi les biveaux ſont bien appliqués pour le vouſſoir à branches. A l'égard de la conſtruction du raccordement des deux ſurfaces à vouſſoir ſimple, il eſt évident que les ſurfaces planes des lits de la deſcente coupant obliquement la doële cylindrique du berceau de niveau, elles y traceront des portions d'ellipſes dont les ordonnées ſont égales à celles du berceau de niveau, & dont les abſciſſes ſont entr'elles comme les largeurs des lits 1, 5 ; 2, 6, à l'égard de leurs projections verticales à l'arc droit $a^1 y$, a^2 Y, par le theorême premier du deuxieme Livre.

SECOND CAS.

Deſcente droite ſur le diametre de face, qui rachete un berceau de niveau obliquement.

Pl. 77. *Fig.* 50. Soit le rectangle *e* B D E (fig. 50) la projection du plan incliné de la deſcente paſſant par les impoſtes de niveau B & D du ceintre de face de deſcente B *h* D, lequel plan incliné eſt exprimé au profil par la ſeule ligne C*f e*, élevée en C*f* ſur l'horiſontale O A B, de la hauteur donnée C*f* B. Soit auſſi le rectangle *g* G F N le plan horiſontal d'un berceau de niveau dont la


44.
43.
45.
46.
Picquet Sculp

direction exprimée par le côté GE, fait des angles obliques avec la projection C M du milieu de la descente, savoir un aigu GMC, d'un côté, & un obtus EMC de l'autre; de sorte que la partie triangulaire eGE de la descente se trouve comprise dans le berceau de niveau, & de plus une autre partie triangulaire A G E, comme nous l'expliquerons ci-après. Sur B D, projection du diametre de la face de descente, ayant décrit le ceintre primitif BhD, circulaire ou elliptique, comme l'on voudra, & l'ayant divisé en ses voussoirs aux points 1, 2, 3, 4, on menera par ces points des paralleles à sa direction indéfinies 1 l^1, 2 l^2, 3 l^3, 4 l^4, qui couperont le côté G E du berceau aux points 1^i, 2^i, 3^i, 4^i. On portera ensuite les hauteurs des retombées 1 p^1, 2 p^2, hC sur le profil en Cf f^1, Cf f^2, Cf H, par où l'on menera des paralleles indéfinies à la rampe Cf e, comme H I, f^1, 2^t, f^1 1^t. On fera F N perpendiculaire sur le côté GF du berceau de niveau, pour avoir le diametre FN de son arc droit, qu'on suppose donné en plein ceintre F h^r N. Fig. 50.

Puis ayant prolongé la ligne B G, jusqu'au côté g N, qu'elle coupera en O, on décrira sur O G, comme diametre, la demi-ellipse O h^c G, dont le petit axe sera le diametre de l'arc droit FN, & sa moitié h^c C, égale à la hauteur de l'arc droit C^r h^r; cette demi-ellipse coupera le profil du plan de descente Cf e au point a, d'où l'on abaissera sur O G, la perpendiculaire a A, qui coupera OG au point A, par lequel & par le point E on tirera la ligne AE, qui sera la projection du diametre rampant ea. Par les points 1^i, 2^i, 3^i, 4^i, on élevera des perpendiculaires sur le diametre O G, qui le couperont aux points 1°, 2°, 3°, 4°, par lesquels on tracera des arcs elliptiques égaux au premier G a h^e, ce qui est très-facile dans la pratique en faisant couler une cerche ou un panneau sur la ligne O G, parallelement à lui-même, faisant appuyer le point G successivement sur les points 1°, 2°, &c. puis traçant le contour de cette cerche à chaque position, on aura les intersections de ces arcs avec les profils des joints de lit aux points a 1^t 2^t 3^t 4^t e, qui détermineront les longueurs de ces joints de lit; si l'on trace par ces points la courbe a I e on aura la projection verticale de la lunette que fait le berceau de descente dans celui de niveau à l'arête de rencontre.

Présentement, si l'on abaisse de ces mêmes points 1^t 2^t, &c. des perpendiculaires sur les projections des joints de lit corref-

Fig. 50. pondans prolongez 1 l^1, 2 l^2, 3 l^3, 4 l^4, on aura par leurs interſections les points l^1, l^2, l^3, l^4, pour les projections horiſontales des angles de la même lunette, formés par la rencontre des doëles plates; ainſi l'on tirera de l'un à l'autre des lignes droites qui formeront le polygone A l^2 E, pour projection horiſontale de la lunette. Par le moyen de ces deux projections de la lunette, nous formerons facilement les panneaux de la doële plate tout de ſuite en développement, après qu'on aura tracé l'arc droit. On tirera C*f d* perpendiculaire ſur le profil de la rampe *e* C*f*, laquelle coupera les profils des joints de lit aux points T & *t*; on portera la longueur C*f* T en p^1 1^r, & p^4 4^r, C*f t* en p^2 2^r, p^3 3^r, & par les points B, 1^r, 2^r, 3^r, 4^r, D, on menera des lignes droites qui ſeront les vraies largeurs des doëles plates. Pour en faire le développement, on portera les longueurs de ſuite ſur la ligne C*f d*, prolongée vers D^d, à commencer à un point pris à volonté comme L, en 1, 2, 3, 4, D^d (fig. 47). On menera par tous ces points L, 1, 2, 3, 4, D^d, des perdiculaires à la ligne *d* D^d indéfinies de part & d'autre, dont les longueurs ſeront déterminées par toutes les paralleles à cette ligne, qui ſeront tirées des points trouvés au profil de la lunette *a* 1^t 2^t 3^t 4^t *e*, leſquelles les couperont aux points a^d n^1 n^2 n^3 n^4 E^d d'un côté, pour la lunette.

Pour le développement de la face de deſcente, on tirera des paralleles à C*f* D^d par les points f^1, f^2, H, leſquelles couperont les tranſverſales aux points 1^d, 2^d, 3^d, &c. on menera par tous ces points de terminaiſon des lignes droites qui formeront le polygone a^d E^d D^d L, lequel eſt le développement de la doële de deſcente qui eſt élevée au-deſſus de l'impoſte du berceau de niveau du côté le plus court AB, de tout l'intervalle du couſſinet qui lui eſt ajouté a^d L B^d A^d.

Préſentement il faut former le développement du berceau de niveau dans la partie qui eſt traverſée par celui de la deſcente, pour lequel on tracera à diſtance priſe à volonté un axe ou une directrice *g*N, parallele à GE, puis par tous les points G, A, l^1, l^2, l^3, l^4, E, de la projection horiſontale de la lunette, on tirera à cet axe des perpendiculaires indéfinies, ſur chacune deſquelles on portera le développement des cordes de la portion de l'arc droit du berceau de niveau que la lunette retranche, C'eſt pourquoi par les mêmes points l^1, l^2, &c. on menera des paralleles à GE qui couperont l'arc droit F h^r N aux points *r*, *z*,

x, y. On portera donc ſur la ligne l^4 4^n la rectification des cordes de l'arc F r, pris depuis l'impoſte inférieure F juſqu'à la hauteur r, qui correſpond au point l^4, à commencer au point k^4 de l'axe de développement juſques en 4^n, où aboutit la corde de cet arc; de même on ajoutera la corde de l'arc rx, qui répond au point l^3, depuis k^3 de l'axe juſqu'en 3^n, & en continuant la longueur xy en k^2 2^n, &c. Si l'on tire par les points trouvés $æ$ 4^n 3^n, &c. des lignes droites, on aura le polygone $æ$ 2^n a^o g, qui eſt le développement des doëles plates du berceau de niveau à leur rencontre avec la deſcente, dont le diametre rampant eſt la ligne $æ$ a^o, & le reſte en triangle a^o g $æ$, eſt une partie de développement du berceau au-deſſous du diametre de la lunette.

Les angles des têtes des panneaux de doële plate qui doivent ſe joindre à l'enfourchement étant trouvés comme nous venons de le dire, il s'agit de *trouver le biveau*, c'eſt-à-dire, l'angle que ces ſurfaces planes doivent faire entr'elles. Prenant pour exemple le vouſſoir à branches de l'enfourchement d'un ſecond rang, comme 3, 4, on ſe contentera de prendre la projection d'une partie de chacune des doëles plates de niveau & en deſcente compriſes dans le parallelograme l^3 R l^4 Q. On tranſportera cette projection en une figure à part (fig. 48.) comme 3 r 4 q, dont on prolongera la diagonale 4, 3 indéfiniment vers X, de même que le côté 4 r vers i; on élevera au point 3 la perpendiculaire 3 x, qu'on fera égale à la hauteur sx de la figure 50, qui eſt la différence de hauteur des points l^3 & l^4 de la lunette. On tirera x 4, ſur laquelle on fera une perpendiculaire x P, qui rencontrera 4 X en P, par où l'on menera à la même 4 X une perpendiculaire yi, qui coupera 4^r prolongée en i. On élevera enſuite ſur le côté 3 r la perpendiculaire 3 d, égale à 3 x; on fera l'angle 3 de égal à celui de la deſcente B C^f a, dont le côté de coupera r 3 e en e; par les points 4 & e on tirera une ligne 4 y qui coupera la perpendiculaire P y au point y; enfin on portera la longueur P x en P X ſur la diagonale 4, 3 prolongée; ſi l'on tire du point X aux points y & i, des lignes droites, elles comprendront l'angle y X i, *que l'on cherche*, pour aſſembler les panneaux de doëles plates de rencontre des berceaux en deſcente & de niveau. *Fig. 48 & 50.*

Il faut remarquer que dans ce trait, non plus que dans le précédent, nous n'avons pas fait mention de panneaux de lit,

parce qu'ils ne ſont pas néceſſaires pour les vouſſoirs d'enfourchement, en ſuivant notre méthode; ils ſont ſeulement néceſſaires pour les têtes des deſcentes, deſquelles nous avons ſuffiſamment parlé au tome précédent, en parlant des voûtes ſimples; il eſt inutile d'en repéter la conſtruction; on pourra y avoir recours en cas qu'on ait oublié la maniere de les faire.

Quant à l'intervalle de chaque lit entre la tête d'entrée & celle de la lunette, on ſait qu'il doit être incliné à la doële ſuivant la coupe de lit & de doële priſe à l'arc droit, ſelon la maxime génerale pour toutes ſortes de berceaux.

Application du trait ſur la pierre.

Ayant dreſſé un parement pour ſervir de doële plate de la deſcente ou du berceau de niveau, ſuivant la convenance de l'appareil, on y appliquera le panneau deſtiné pour le rang dont il eſt dans l'un ou l'autre berceau, lequel eſt tracé à l'épure. Prenant pour exemple le ſecond de la deſcente $l^3 p^3 p^4 l^4$, (fig. 50.) dont le panneau eſt (fig. 47.) le trapeze $n^4\ 4^d\ 3^d n^3$, ou ſeulement une partie de ce panneau, on en tracera le contour ſur le parement, puis avec le biveau trouvé $y X i$, (fig. 48) on abattra la pierre au long du côté 3, 4, de la figure 49, pour avoir un nouveau parement $4\,c\,d\,3$, ſur lequel on appliquera le panneau de doële plate du berceau de niveau, qui doit s'y joindre, marqué (à la figure 51,) $c\ 3^n\ 4^n\ d$, dont on tracera le contour; enfin avec les biveaux de lit & de doële pris à l'arc droit de la deſcente, $7^r\ 3^r\ 4^r$ pour le lit de deſſus, & $8^r\ 4^r\ 3^r$, pour celui de deſſous, on abattra la pierre pour former les lits ſuivant les côtés tracés par le moyen du panneau de doële; on en uſera de même pour les lits du berceau de niveau, dont les coupes ſe prendront ſur l'arc droit N h^r F.

Explication démonſtrative.

La conformité de ce trait avec le précedent fait ſenſiblement appercevoir les raiſons de ſa conſtruction, dans ce qui concerne la maniere de trouver les panneaux de la doële plate par la voie du développement des deux ſurfaces, l'une du berceau en deſcente, dont les longueurs des joints de lit ſont priſes ſur le profil de la rampe, parce qu'elles ſont raccourcies dans la projection horiſontale, qui ne lui eſt pas parallele. L'autre développement, qui eſt celui du berceau de niveau, eſt formé ſur la projection

projection horisontale de la lunette, qui donne la juste mesure des intervalles des angles de rencontre des doëles plates de l'un & de l'autre berceau; & l'arc droit F h^r N développé, c'est-à-dire rectifié, donne les éloignemens *k n* de l'intervalle vuide que forme la lunette en descente dans le berceau de niveau, ce qui est entiérement conforme à la construction précédente. Il faut seulement expliquer ce qui est particulier à celle-ci, qui consiste dans la maniere d'assembler ces différens panneaux de doële plate, pour leur donner l'inclinaison qu'ils doivent avoir entr'eux, parce que nous ne trouvons pas la même facilité qu'au précédent de les assembler par une supposition de plan horisontal, l'angle de la direction de la descente étant oblique à celle du berceau horisontal; or les angles des plans doivent toujours être pris sur des perpendiculaires à leur commune intersection.

Il est démontré au problême XIV, qui est le dernier du troisieme Livre, que si les deux plans dont les projections sont les triangles 3 *q* 4, 3 *r* 4, sont également inclinés au vertical, dont la projection est la ligne 3, 4, leurs intersections avec le plan horisontal seront les lignes 4 *i*, 4 I équidistantes du milieu P, & que par la construction de ce probl. l'angle I X *i* sera celui de l'intersection mutuelle de ces plans. Dans le cas présent ces plans sont inégalement inclinés à l'horisontal exprimé par la ligne *e r*, passant par le point 3, savoir, la doële plate qui est dans le berceau de niveau, suivant sa hauteur *s x* de la figure 50, égale à *d* 3 de la figure 48, & la retombée *s r*, qui répond entre mêmes paralleles à *l'* R, égale à 3 *r* de la figure 48, par conséquent la ligne *d r* exprime son inclinaison à l'égard d'une verticale 3 *d* suivant la direction de la descente. *Fig. 48.*

Présentement, pour trouver suivant la même direction la pente de la doële en descente, il faut remarquer que nous ne connoissons que la hauteur du point *d*, l'angle droit *e* 3 *d*, & l'angle de rampe G *e a* de la figure 50, & non pas la retombée ou sa valeur, comme au plan précédent; c'est pourquoi nous faisons l'angle 3 *d e* égal au complément de G *e a*, qui nous donne par l'intersection de son côté *d e* la valeur *e* 3 de cette retombée, donc l'angle *e d r* exprime en profil l'inclinaison des deux plans, & comme la ligne *e r* n'est pas, ou peut ne pas être, perpendiculaire à la diagonale 4, 3, quoiqu'elle soit dans le même plan que la ligne *y i* aussi horisontale, l'angle ne doit être mesuré que suivant le plan qui passe par cette ligne & le point

x en l'air, repréſenté par la conſtruction en y X i, qui doit être ſuppoſé renverſé du haut en bas, & tourné de droite à gauche, pour être dans ſa ſituation naturelle, parce qu'il eſt ſaillant, formant l'arête de la lunette, & non pas un angle rentrant; mais on ſait que l'angle d'un biveau doit être le contraire de celui qu'on veut former.

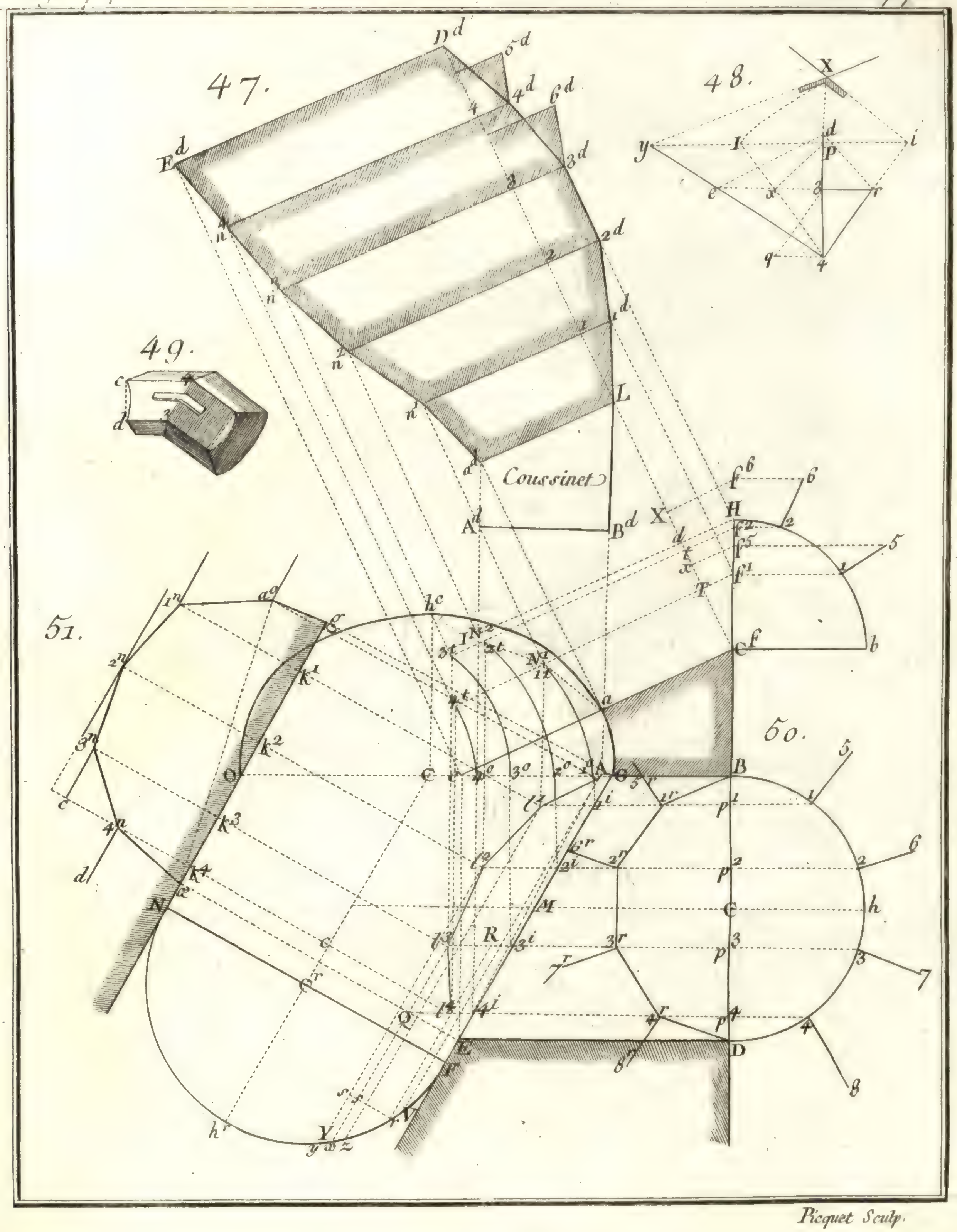
Troisieme Cas.

Deſcente biaiſe par ſon entrée de niveau, rachetant un berceau de niveau obliquement.

Dans les exemples des deux cas précédens nous avons ſuppoſé que le plan de deſcente, paſſant par les impoſtes du berceau incliné à l'horiſon, c'eſt-à-dire, le plan de rampe, étoit perpendiculaire aux plans verticaux paralleles à ſon axe, d'où il réſultoit que le profil ou la projection verticale de ce plan de rampe étoit exprimée par une ſeule ligne droite, & que le diametre de l'arc droit & celui de face y étoient exprimés par un ſeul point, parce que ces deux ceintres avoient un diametre horiſontal commun. Préſentement nous ſuppoſons que la face de deſcente D E eſt oblique à la direction C M, mais cependant que le diametre de ſon ceintre D E eſt de niveau, d'où il ſuit que le plan de rampe devient incliné au plan vertical paſſant par la direction C M, & par conſéquent que l'arc droit devient rampant, comme nous l'avons dit au problême X I I, en parlant des *voûtes ſimples*, page 187; ainſi ce plan de rampe a deux inclinaiſons, l'une ſuivant la direction, l'autre d'une impoſte à l'autre, c'eſt-à-dire en travers ſuivant ſes côtés. D'où il ſuit que ce plan ne peut plus être exprimé au profil par une ſeule ligne de même eſpece, ni par un parallelograme, comme aux voûtes ſimples, mais par un trapeze R A F E f, qu'il faut trouver, comme nous allons le dire.

Plan. 78. Fig. 52.

Soit A K I B (fig. 52) le plan horiſontal d'un berceau de niveau, & D A g E, la projection d'une deſcente biaiſe dont le plan de rampe rencontre celui de niveau ſuivant la ligne A g, de ſorte qu'il entre dans le berceau de niveau de la partie triangulaire B A g, parce qu'il coupe la doële du berceau de niveau ſuivant une ligne courbe L A elliptique, laquelle avance en L au-devant de B, d'une longueur B L, égale à la retombée de la hauteur f L de l'arc du berceau de niveau, où le côté E g de


47.
48.
49.
50.
51.
Coussinet
Picquet Sculp.

la descente coupe celui du berceau de niveau. Ainsi ayant fait sur le côté D A l'angle D A R, égal à celui de rampe, on lui fera en D la perpendiculaire D R, qui coupera la ligne de rampe en R, par où l'on menera l'horisontale R E*f*, égale à l'obliquité E *r* de la face D E sur la perpendiculaire D *r* à la direction CM. Par le point E*f* on menera E*f* G, parallele à RA, le rectangle A G E*f* R sera le profil du plan de rampe prolongé jusqu'à l'horisontal DK; mais à cause que ce plan rencontre la doële du berceau horisontal A K I B, il faut chercher la partie triangulaire F A G de ce plan, qui est retranchée par la section de la doële. *Fig. 52.*

Ayant tiré B I perpendiculaire à B A, on décrira l'arc droit B H I, du berceau de niveau circulaire ou elliptique, & sur D A prolongée en K jusqu'à la rencontre de son côté I K, on décrira une ellipse A h^e K, avec les deux axes donnés, savoir, A K pour le grand, & B I pour le petit axe. Par le même point B, on menera une perpendiculaire à D A, qui coupera E*f* G, (étant prolongée) en *b*; la ligne *b* A sera le diametre de la projection verticale de la section plane sur B A; sur le point A on élevera une verticale A T. On tirera ensuite par *b* une parallele à D A, qui coupera A T en V, par où on menera V *o* parallele à R A, qui coupera l'arc A *x* h^e au point *x*, d'où on tirera une parallele à D A, qui coupera E*f* G au point F, & la ligne A T au point *u*; on portera *x u* de B en L sur E B prolongée, le point L sera la projection de la rencontre de l'imposte de la descente avec la doële du berceau de niveau, laquelle imposte est représentée en profil par la ligne E*f* G, où cette même section est représentée par le point F; de sorte que si l'on tire de chacun de ces points des lignes au même point A, le triangle mixte BLA, dont L A est elliptique, représente à la projection horisontale, celui que le plan de rampe retranche de la doële du berceau de niveau, lequel est aussi représenté au profil par le triangle mixte O F A.

Présentement, si l'on suppose un plan vertical passant par les points L & A, il coupera la doële de la descente suivant un arc rampant exprimé au profil par F h^i A, dont nous pouvons faire usage pour trouver la projection horisontale de l'arête de rencontre des deux berceaux, & même une projection inclinée sur le plan de rampe, comme on va le dire. Ayant fait sur le diametre d'entrée de descente D E le ceintre primitif D S E, ses

Fig. 52. divisions en voussoirs aux points 1, 2, 3, 4, & les projections de ses joints de lit suivant la direction du berceau à l'ordinaire, p^1 5, p^2 6, &c. prolongés indéfiniment, qui couperont la ligne L A aux points 5, 6, 7, 8, on menera par ces points des perpendiculaires sur D A, aussi prolongées indéfiniment, qui couperont la ligne F A aux points a^1, a^2, a^3, a^4, sur lesquels on portera les hauteurs des retombées du ceintre primitif correspondantes, savoir, 1 p^1 en a^1 1^i, & a^4 4^i; 2 p^2 en a^2 2^i & a^3 3^i; & par les points F 4^i 3^i, 2^i 1^i A, on tracera l'arc rampant F h^i A. Par tous les points trouvés 1^i, 2^i, 3^i, 4^i, on menera des paralleles à D A qui couperont la verticale A T aux points f^1, f^2, f^3, f^4, par lesquels on menera des paralleles à la rampe R A, qui couperont l'arc A x h^e aux points 3, 2, 4, 1, & en un point au-dessous de x, provenant du point u, lequel point n'est pas marqué pour éviter la confusion de la figure, qui est déja fort chargée en cet endroit de lignes & de lettres. Par les points 3, 2, 4, 1, de l'arc A h^e K on abaissera des perpendiculaires sur le diametre A K qui le couperont aux points k, l, m, n, par lesquels si l'on mene des paralleles à A B, leurs intersections avec les projections des joints de lit donneront les points l^1, l^2, l^3, l^4, où seront les angles de rencontre des doëles plates des berceaux en descente & de niveau, *qu'il falloit premierement trouver.*

Si au lieu de tirer par ces mêmes points des perpendiculaires à l'horisontale A K, on en tire d'autres à la ligne de rampe R A, prolongées jusqu'aux projections correspondantes des joints de lit, on aura une espece de projection inclinée sur le plan de rampe A N^1 N^2 N^3 N^4 B, dont on peut faire usage pour le trait, pourvu qu'on prenne bien garde de distinguer les suppositions de plan horisontal & de plan de rampe changé en horisontal; car la partie B g égale à G A, qu'elle représente, doit être alongée suivant la distance z A; mais comme cette projection inclinée ne pourroit servir que pour trouver les têtes des panneaux de doële plate de la descente à l'enfourchement, nous allons y pourvoir par le moyen d'en faire le développement. Il faut auparavant supposer l'arc droit formé par les moyens que nous avons donné au tome précédent, en parlant des descentes simples, page 196, lequel arc est rampant; ou bien, pour ne pas renvoyer le lecteur, on peut le chercher par le moyen du profil qu'on vient de faire de l'arc F h^i A. Par tous les points

1^i, 2^i, 3^i, 4^i, on abaiſſera des perpendiculaires ſur cette ligne A R, & par tous les points a^1, a^2 des paralleles à la même ligne A R, qui couperont les perpendiculaires précédentes prolongées en des points qui détermineront les ordonnées de l'arc droit rampant D h^r R^o, qu'on portera ſur le diametre D R^o, trouvé comme nous l'avons dit, au lieu cité, pour les voûtes ſimples.

L'arc droit étant tracé, on aura toutes les largeurs des doëles plates, néceſſaires pour en faire le développement. On placera à volonté une directrice A^d R^d (fig. 53) ſur laquelle on portera de ſuite les largeurs inégales D 1^r, 1^r 2^r, 2^r 3^r, &c. de la fig. 52, en A^d, 1^r, 2^r, 3^r, 4^r, R^d, (de la fig. 53.) & l'on tirera par tous ces points A^d, &c. des perpendiculaires à la directrice, qui formeront le développement d'un berceau droit ; mais comme il eſt coupé obliquement par la rencontre de celui de niveau, il faut en chercher les reculemens d'échancrure. On commencera par porter la longueur A z, priſe ſur A R à la figure 52, de R^d en g^d, pour tirer g^d A^d, qui ſera une ſeconde directrice biaiſe, repréſentant g A ; on prendra enſuite la longueur G F du profil de la figure 52, qu'on portera en g^d B^d de la fig. 53, pour avoir le point de l'impoſte B^d le plus reculé. *Fig. 53.*

Pour les autres, on tirera par les points a^1, a^2, a^3, a^4 du profil des paralleles à l'horiſon, qui couperont la verticale A T en des points qu'on ne peut déſigner par des lettres à la figure, parce qu'ils ſont trop près les uns des autres, deſquels on menera des paralleles à la rampe R A, juſqu'à l'horiſontale A K, comme x o, y m, &c. leſquelles ſeront coupées par des perpendiculaires à la rampe provenant des points trouvés ſur l'arc A h^e en 3, 2, 4, 1, qui ſont ceux de rencontre de la deſcente avec l'arc droit à chaque joint de lit; les intervalles de ces paralleles à la rampe, qui reſtent entre l'horiſontale A K & leurs ſections avec les horiſontales correſpondantes, provenant des points a^1, a^2, a^3, a^4 de la ligne F A, ſeront les reculemens, qu'il faut porter depuis la ſeconde directrice g^d A^d de la figure 53, ſur les joints de lit du développement en 1^d, 2^d, 3^d, 4^d, &c. Par exemple, ſuppoſant que la perpendiculaire 3 y, coupe la ligne y m, provenant du point a^3, par le moyen de l'horiſontale menée par a^3, juſqu'à la verticale A T, qu'elle coupera en un point au-deſſous de u, d'où eſt tirée la ligne um, parallele à la rampe R A, l'intervalle y m ſera porté au développement du point o^3 en 3^d; ainſi des autres.

Fig. 53. On peut remarquer que les points 3, 2,4, 1, de l'arc A h^eK s'avancent ou se reculent vers T, ou vers *r*, d'une ligne T *r* parallele à R A, que l'on a tiré pour ne pas faire le renvoi de ces avances sur la ligne R A prolongée, où les lignes multipliées auroient causé trop de confusion; d'où il suit que les têtes de doëles plates 1^d 2^d, 2^d 3^d se reculent inégalement des lignes droites qui ont servi de directrices au développement.

Il n'est pas nécessaire de parler ici du développement de la fig. 54, qui est celui de l'échancrure que le berceau en descente fait par sa pénétration à la surface de celui qui est de niveau, parce qu'il ne differe de ceux dont nous avons parlé aux deux traits précédents, qu'en ce qu'il est rampant sur son diametre *a l*, dont la position se trouve en portant la corde A *x* de la fig. 52, en I *l* de la figure 54, sur l'inclinée I *l*, où le point I provient de B, & *l* du point L, comme la figure le montre. Le reste du trait concernant les biveaux de lit & de doële, & de doële plate de descente avec la correspondante de niveau, se fera de même, ainsi qu'aux traits précédens. L'application du trait sur la pierre sera aussi exactement la même. Nous ne parlons point ici des panneaux de lit, parce que suivant notre méthode ils sont inutiles pour les voussoirs d'enfourchement, & que pour la face de descente, ils ont été donnés aux traits des voûtes simples en descente, au problême XII, auquel on pourra avoir recours. Il est visible que si l'arc de face biaise, dont le diametre a été supposé de niveau, étoit rampant & l'arc droit de niveau, ce trait deviendroit beaucoup plus simple & plus facile, parce que le plan de rampe n'auroit plus qu'une inclinaison; d'où il suivroit que sa section avec l'horison seroit d'équerre en A P, & que le profil de ce plan ne seroit plus qu'une ligne droite R A.

REMARQUE.

Il faut remarquer, que supposant le diametre du ceintre de face de niveau, plus il approchera du parallelisme du côté A B du berceau de niveau, moins l'arc d'arête d'enfourchement sera rampant; de sorte que si D E étoit plus oblique, comme en D Q, qui est parallele à A B, les impostes de la lunette deviendroient tout-à-fait de niveau, & au contraire la différence sera d'autant plus grande que la face approchera de la perpendiculaire D *r*.

Explication démonſtrative.

Nous avons rendu raiſon au problême XII du tome précédent, page 193, pourquoi l'obliquité de la face de deſcente à l'égard de la direction horiſontale cauſoit une double obliquité dans le plan de rampe; il nous reſte à rendre raiſon de la maniere que nous avons employé pour trouver les projections horiſontale & inclinée de la rencontre des deux berceaux. Nous ſuppoſons un plan vertical paſſant par les naiſſances A & L de l'arc ou arête de l'enfourchement, & parce que cette arête eſt à double courbure, elle avance en ſurplomb au-delà de la ligne droite A L ſelon des diſtances horiſontales, qu'on auroit pu meſurer par des perpendiculaires ſur A L, par les retombées de l'arc droit du berceau de niveau B H I; mais à cauſe que ces avances doivent ſe prendre le long des joints de lit, qui lui ſont obliques, on a décrit le ceintre de ſection oblique parallele à ces lits, qui eſt la demi-ellipſe A h^e K, laquelle repréſente ſeule toutes ſes égales, qui couperoient les plans verticaux paſſant par les projections de lit $p^1 l^1$, $p^2 l^2$, $p^3 l^3$, $p^4 l^4$, prolongés au travers du berceau de niveau.

Conſidérant ainſi un plan vertical ſur la ligne D K, la ligne verticale T A repréſentera la ſection du plan vertical ſur L A avec ce premier, & parce que nous avons fait la projection verticale de ſa ſection à l'arc rampant F h^i A, & tranſporté toutes les hauteurs de ſes diviſions ſur T A, il eſt viſible que toutes les lignes menées par ces hauteurs $f^3\ f^2\ f^4\ f^1$, parallelement à la rampe B A, repréſenteront exactement les joints de lit de la deſcente; par conſéquent auſſi leur ſection avec l'arc vertical A h^e, du berceau de niveau aux points 3, 2, 4, 1, leſquels points étant tranſportés par la projection ſur l'horiſontale A K, marqueront exactement les avances de la lunette ſur le côté A B, du berceau de niveau; & parce que cette ligne A K repréſente toutes les prolongations des projections des joints de lit, il eſt viſible qu'en tranſportant les points d'avance trouvés ſur chaque joint en particulier, par le moyen des paralleles au côté A B, on les arrangera chacun à leur place; par conſéquent la projection horiſontale de la lunette eſt bien faite. *Fig.* 52.

Quant à la projection inclinée ſur le plan de rampe, il eſt viſible que ſi l'on tire par le point A, le plus avancé de la rampe, une ligne A f, perpendiculaire à A R, elle pourra être conſidé-

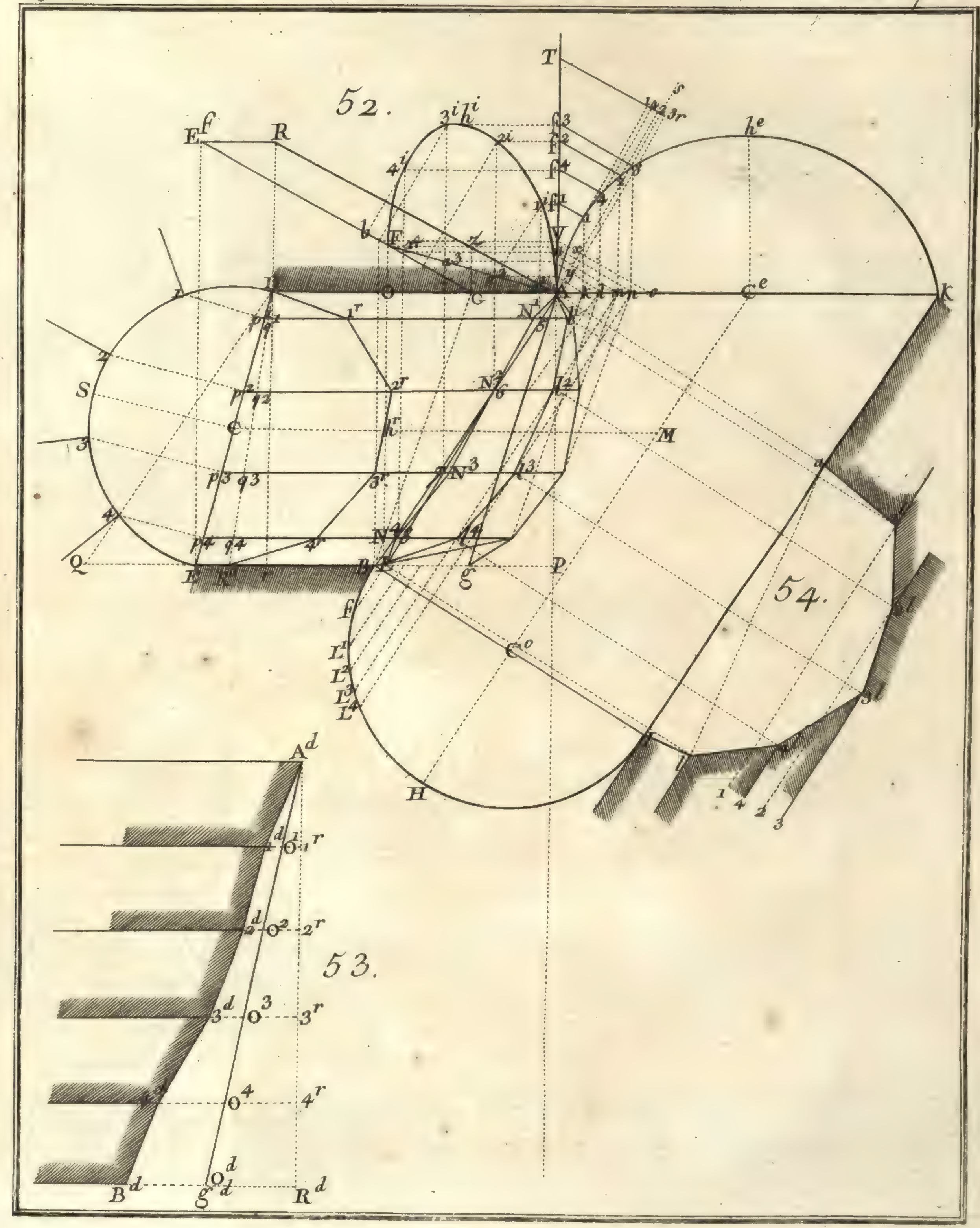
rée comme la projection verticale d'un plan perpendiculaire à celui de rampe, qui coupe tous les lits de la descente au dedans ou au dehors de l'arête d'enfourchement; dans ce trait cette arête est partie dedans, comme depuis *x* jusqu'à 2, & partie au dehors comme le joint marqué 3, & comme la section du plan de rampe avec celui des impostes du berceau de niveau *est donnée* en A*g*, sur le plan horisontal, par une ligne droite parallele à D E, nous la faisons servir de directrice du développement, parce que la directrice à l'angle droit sur la direction horisontale de la descente tombe au dessous de l'horison en A P, à cause de l'obliquité transversale du plan de rampe, ce qui n'arriveroit pas si ce plan n'avoit d'autre inclinaison que celle de la descente suivant sa direction.

Quatrieme Cas.

Lunette rampante biaise, faite par un berceau biais en descente qui en rachete un autre par le bout.

On peut dire que le trait dont il s'agit est le même que les deux précédens, avec quelques circonstances différentes; l'une que le berceau en descente ne rachete pas celui de niveau à ses impostes ou à ses piédroits, mais au dessus dans la voûte même; l'autre, que le biais est supposé si grand que la direction horisontale de la descente fait un angle très-oblique avec celle du berceau de niveau. Sur cet exposé il semble inutile d'en donner un exemple; mais parce que le P. Derand s'y est brouillé plus que son Graveur, dont il se plaint, & que M. de la Rue n'en a rien dit, j'ai cru que je ne devois pas en faire de même, sans cependant m'attacher à corriger le trait du P. Derand, parce qu'ayant suivi une méthode différente de la sienne dans les descentes, je ne dois pas m'en écarter ici, mais au contraire en faire voir l'étendue à toutes sortes de cas & la facilité.

Soit (fig. 55) A B E D, le plan horisontal de la lunette percée dans un mur qui termine obliquement & en descente, ou si l'on veut perpendiculairement, un berceau de niveau I V X K, dans lequel la lunette soit percée obliquement, en sorte que la direction horisontale D K fasse un angle fort aigu A D I, ou fort obtus F D K, avec celle du berceau de niveau. Il faut ici, comme par-tout où il peut y avoir plusieurs ceintres, se déterminer au


52.
53.
54.

au choix du primitif, faisant attention aux changemens que cause le ceintre de face donné de niveau rampant; car s'il est de niveau, l'arc droit sera rampant, & le plan de *l'abajour* incliné au plan vertical; comme cette inclinaison est désagréable à la vue par dedans, nous supposerons le diametre de l'arc droit de niveau circulaire, ou si l'on veut elliptique, dont un des axes soit de niveau. *Fig. 55.*

Soit donc $d^r h b^r$, l'arc droit de la descente divisé en ses voussoirs aux points 1, 2, 3, 4, par lesquels on menera autant de paralleles à sa direction horisontale, qui rencontreront le côté KX du berceau de niveau aux points L, M, N, O, P, par lesquels on élevera des perpendiculaires au côté de la descente D A prolongé en K, qui couperont ce côté aux points *l*, *m*, *n*, *o*, *p*. Soit aussi le demi-cercle F H G, l'arc droit du berceau de niveau fait sur une ligne F G, perpendiculaire aux côtés I V, KX, prolongés en F & G. On fera sur KD, comme grand axe, & avec C G ou C H, pour petit axe, une ellipse K *a* D, qui sera la section oblique d'un plan vertical passant par la direction D A prolongée, sur laquelle ellipse on pourra former un panneau ou une cerche, pour en répéter le contour, en traçant à chaque joint des ellipses égales, comme nous le dirons ci-après. On fera ensuite le profil de la descente sur la ligne KD, prenant la ligne D R pour hauteur donnée jusqu'à l'imposte la plus basse de l'arc de face, qui sera rampant suivant notre supposition de l'arc droit donné, & l'angle D R *p*, égal au complément de celui de la descente, qu'on suppose aussi donné, ou pris à fantaisie. Du point R pour centre, & de l'intervalle $c d^r$ de l'arc droit, supposé circulaire, on décrira un quart de cercle *q* 1 2 S, terminé par RS, perpendiculaire sur *p* R, & divisé également aux points 1, 2, S, comme l'arc droit aux points 1, 2, *h*, & par les points 1, 2, S, on menera des paralleles à la ligne de rampe *p* R, prolongées indéfiniment, comme SS, 2 3^f, 1 4^f, par le bas, & poussées vers le haut jusqu'à la ligne D T, lesquelles lignes seront les projections verticales des joints de lit équivalentes chacune à deux; savoir, au joint de la droite & de la gauche du berceau, par ce qu'on suppose le plan de rampe *p* R perpendiculaire au plan vertical, & les assises de droite & de gauche d'égales hauteurs, par conséquent qu'un même plan passe par les joints de lit paralleles au plan de rampe.

Fig. 55. Cela ſuppoſé : ayant poſé le bout du panneau, ou de la cerche faite ſur l'ellipſe KSD, on marquera le point *a*, où ſon contour coupe la ligne de rampe *p*R, pour la naiſſance la plus baſſe de l'arête de la lunette, dont le point A eſt la projection. On fera enſuite couler le panneau ou cerche ſur l'axe horiſontal KD, en ſorte que le point K ſoit avancé en *l*, où la perpendiculaire L*l* coupe l'axe KD; alors le contour de cette cerche coupera la projection verticale du premier joint 1 1*f* au point 1*f*. On fera de même couler le même panneau ſur KD, en ſorte que ſon bout K ſoit poſé en *m*, & l'on marquera le point 2*f*, où ſon contour coupe la ſeconde ligne, qui eſt la projection verticale du joint 2 2*f*, on le pouſſera enſuite en *n*, pour marquer ſa rencontre avec la troiſieme 3 3*f*, au point 3*f*; on continuera à le faire couler en *o*, pour marquer l'interſection de la même ligne au point 4*f*; enfin on le pouſſera en *p*, pour avoir l'enterſection avec la ligne de rampe en *b*, qui ſera la naiſſance haute de la lunette dont B eſt la projection. Par tous les points trouvés on menera des lignes droites qui ſeront les cordes des doëles plates à l'enfourchement, & ſi l'on mene une ligne courbe arrondie de l'un à l'autre, on aura la courbe *a* 1*f* 2*f* 3*f* 4*f* *b*, qui ſe croiſe en *x*, ce qui marque qu'en cet endroit il y a deux points oppoſés qui ſont de niveau, parce que cette courbe eſt la projection verticale de l'arête de l'enfourchement de la lunette. Par le moyen de cette courbe on fera la projection horiſontale, en abaiſſant de tous ces points des perpendiculaires qui rencontreront les projections horiſontales des joints de lits correſpondans à l'endroit où ſe trouve un des chiffres; ſavoir *a*A, donnera le point A ſur l'impoſte AD; 1*f* 1*p*, donnera le point 1*p* ſur la projection 1 L, la ligne 2*f* 2*p*, donnera le point 2*p* ſur 2 M, 3*f* 3*p* &c. Et par tous les points trouvés A, 1*p*, 2*p*, 3*p*, 4*p*, B, on tracera la projection horiſontale de l'arête d'enfourchement de la lunette, & l'épure ſera faite.

Les panneaux de doële plate de la deſcente auront leur longueur donnée par le profil, & leur largeur ſur l'arc droit; ainſi on comptera de part & d'autre de la ligne RS, qui eſt la projection verticale de l'arc droit, les longueurs R*a*, R*b*; la longueur *o*1 1*f* ſera le ſecond côté du premier vouſſoir, dont la largeur ſera la corde *q* 1, ou *d*r 1, au plan *d*1 *h* *b*r, en continuant à compter ſeulement depuis l'arc droit, on aura les longueurs *o*1 1*f* & *o*2 2*f*, pour le ſecond vouſſoir avec la corde

de l'arc droit 1, 2 pour largeur; & ainsi des autres qu'on peut prendre & ranger de suite en développement, comme on a fait à la figure 52 de la planche précedente. Les panneaux de doële plate du berceau de niveau se trouveront par le moyen du développement de la projection horisontale, suivant son arc droit F H G, lequel donnera l'intervalle des lignes A a^n, 1^p 1^n, mesuré par la corde a^n 1^n; l'intervalle des lignes 1^p 1^n, 2^p 2^n, par la corde 1^n 2^n, & ainsi des autres directions du berceau de niveau jusqu'à son arc droit, comme nous l'avons dit aux trois traits précedens, dont celui-ci n'est qu'une espece de repétition. Les biveaux de doële à l'enfourchement se trouveront de même qu'il a été dit au problême quatorzieme du troisieme livre, & ci-devant pag. 71. Et enfin les biveaux de doële & de lit se trouveront sur l'arc droit aux angles 3 1 x, 1 2 y, ce qui suffit pour tailler toutes les faces des voussoirs. *Fig. 55.*

COROLLAIRE.

De cette construction suit la maniere de faire les abajours en lunette entiere, ou en façon de puits inclinés, tels que sont ceux des *Tours bastionnées* de Landaw; il ne s'agit que de faire les profils & les projections verticales & horisontales du berceau en descente dans un double contour, au lieu qu'ici ils ne sont qu'à moitié, supposant le ceintre de face, comme l'on voudra; mais si on le fait circulaire comme auxdites tours, l'arc droit devient une ellipse si surbaissée, à cause de la roideur de la ligne de rampe, qu'il donnera très-peu de jour; ce rapport de l'arc de face & de l'arc droit a été suffisamment expliqué au problême XII du tome précedent, en traitant des voûtes simples en descente.

CINQUIEME CAS.

Lunette ou berceau en descente, qui en rachete un de niveau par le bout, suivant la même direction.

Nous avons supposé dans le cas précedent que les directions horisontales de la descente & du berceau de niveau se croisoient, ici nous supposons que quoique l'axe de la descente fasse un angle avec l'horison, cet angle est dans un plan vertical parallele à la direction du berceau de niveau; cette différence

ne change pas la nature de la courbe d'arête de rencontre des doëles, qui eſt toujours une ellipſimbre, par le theor. XIX du premier livre, mais elle change un peu la conſtruction du trait.

Fig. 56. Soit, fig. 56, XC l'axe du berceau de niveau, & M *m*, la projection horiſontale de celui en deſcente, qui lui eſt parallele (par la ſuppoſition) à la diſtance donnée *c m*. Soit DE, le diametre du berceau de niveau, dont le milieu eſt C; on portera la diſtance *c m* de C en *c*, où ſera le milieu du diametre du berceau en deſcente vu par le bout. Du point C, pour centre, on décrira l'arc droit du berceau de niveau, que nous ſuppoſons un demi-cercle ou une demi-ellipſe DHE, & du point *c* on décrira le ceintre primitif A *h* B du berceau en deſcente, quel qu'il ſoit, circulaire ou elliptique, pris à l'arc droit, ou à l'arc de face droite, lequel ſera diviſé en ſes vouſſoirs aux points 1, 2, 3, 4, par leſquels on menera des verticales A a^n, 1, 21; 2, 22; 3, 23; 4, 24; B b^n, qui couperont le ceintre du berceau de niveau aux points 21, 22, 23, 24, par leſquels on menera des paralleles à DE indéfinies.

Sur l'horiſontale N a^n on fera l'angle de rampe donné NGR, dont le ſommet G ſera à volonté, & par le point R de hauteur donnée, on abaiſſera la verticale R *b*. Du point R, pour centre, on diviſera le quart de cercle ou d'ellipſe *s* b^r, tel que doit être l'arc droit de la deſcente, ſuivant le ceintre primitif donné, & par ſes diviſions 1^r 2, on menera des paralleles à la rampe qui couperont les correſpondantes horiſontales tirées par les points a^n, 21, 22, 23, 24, b^n, & dans la ſuppoſition que le diametre de l'arc droit de la deſcente ſoit de niveau, chacune de ces inclinées répondra à deux des horiſontales dont nous parlons; ainſi la ligne de rampe RG coupera l'horiſontale provenant du point a^n en G, & celle qui provient du point b^n en f^a, ainſi les points f^a & G ſont les profils des naiſſances de l'arête de rencontre des doëles des deux berceaux; de même l'inclinée paſſant par le point 1^r, coupera les deux horiſontales provenant des points 21 & 24 aux points 1^n, 4^n, & l'inclinée paſſant par le point 2^r, donnera les interſections des horiſontales provenant des points 22 & 23 en 2^n 3^n; la courbe f^a 4^n 3^n 2^n 1^n G ſera le profil de l'arête de rencontre des berceaux. Il ſera facile de faire auſſi la projection horiſontale de la même arête par le moyen des mêmes points du profil.

Ayant fait la projection horisontale du berceau en descente à *Fig. 56.* l'ordinaire, par le moyen de ses retombées $A p^1 p^2 c$, &c. placée parallelement à la ligne de base de rampe N G, comme en $aoqb$, on abaissera par tous les points du profil f^a 4^n 3^n 2^n 1^n G, des perpendiculaires qui couperont celles de la projection horisontale aux points F, 1^l, 2^l, 3^l, 4^l, g, par lesquels on tracera la projection de l'arête d'enfourchement. Nous avons supposé que l'arc droit étoit de niveau, mais s'il ne l'étoit pas, & que le plan de rampe fût incliné, comme aux descentes biaises dont la face d'entrée est de niveau, il faudroit faire le profil du plan de rampe comme nous l'avons fait au troisieme cas de ce problême, ce qui ne change rien au trait, mais qui le rend seulement un peu plus composé.

Les projections verticales & horisontales de l'arête de lunette étant données, il est clair que l'on a tout ce qui est nécessaire pour former les panneaux ; car les longueurs de leurs côtés, & la différence des avancemens & reculemens de leurs têtes sont données au profil, & l'intervalle de ces côtés, c'est-à-dire, la longueur des panneaux est donnée à l'ordinaire à l'arc droit. Les biveaux de lit & de doële sont aussi donnés au même arc droit, & les biveaux de rencontre des doëles plates à l'enfourchement se trouveront de la même maniere qu'il a été dit au premier cas des descentes, pag. 71. L'application du trait sur la pierre par panneaux sera aussi la même qu'à tous les cas précédens; mais pour abréger on peut le faire plus simplement par la voie de l'équarrissement.

Autrement par équarrissement.

L'épure étant tracée comme nous venons de le dire, & la *Fig. 57.* pierre destinée au voussoir qu'on veut faire étant choisie de grosseur convenable, on y fera deux paremens à l'équerre l'un à l'autre, savoir, un pour servir de supposition horisontale L D A, l'autre par conséquent sera en supposition verticale E F A D, passant par l'arête du joint de lit du berceau de niveau. Supposant, par exemple, qu'on veuille faire un voussoir du second rang, on prendra la retombée 2 1 x, qu'on portera perpendiculairement à l'arête A D dans le lit horisontal, pour y tracer une parallele gh à cette arête. On prendra de même la hauteur 2 2 x de cette retombée, qu'on portera au plan vertical sur D A en B K, pour y tracer aussi une parallele K G; ces deux paralleles

Fig. 57. ſeront les arêtes des joints de lit de deſſous & de deſſus. Enſuite on prendra avec la ſauterelle le ſupplément de l'angle de la deſcente, qui eſt l'angle obtus 21 1'' 1', pour le tracer ſur le parement vertical en A B *c*, & par le point *c*, on tirera *c m* parallele à D L, ſur le parement vertical où ſe termine le vouſſoir, & l'on abattra la pierre quarrément ſuivant la ligne inclinée B *c* & cette parallele *c m*; après quoi on portera ſur l'arête *c m*, la longueur 21 *x* de la retombée, & ſur l'arête *c* E, celle de ſa hauteur 22 *x*, traînant ſur ces deux paremens leurs longueurs parallelement, ou ce qui eſt la même choſe, leur menant des paralleles qui marqueront les arêtes des doëles & des lits de deſſous & de deſſus, & leur rencontre avec celles qu'on avoit tracé ſur le lit horiſontal *g h*, & ſur le lit vertical *r q*, & l'on abattra la pierre pour le grand berceau, ſuivant la cerche de l'arc 21, 22, & pour celui de la deſcente, ſuivant la cerche de l'arc 1, 2.

La rencontre des doëles formera l'arête d'enfourchement, comme par haſard, ſans qu'on en connoiſſe la courbe. Il ne reſte plus qu'à former les lits ſuivant les biveaux mixtes de lit & de doële pris ſur les arcs droits des deux berceaux. A l'égard de la face, on la fera comme nous l'avons dit des voûtes ſimples, au problême XII, du deuxieme tome, auquel nous renvoyons auſſi pour la ſituation des joints de doële & de tête.

Explication démonſtrative.

Ce problême & le précédent ſont fondés ſur notre méthode générale, qui eſt de couper les voûtes par des plans paralleles entr'eux. Au précédent, nous avons coupé le berceau en deſcente par des plans verticaux paralleles à ſon axe, qui ont donné dans cette voûte cylindrique inclinée à l'horiſon des parallelogrames, & des ellipſes dans la voûte horiſontale. Ici, comme la direction horiſontale des deux voûtes qui ſe rencontrent eſt la même, la ſection faite par un plan vertical paſſant par l'axe ou parallelement à l'axe de la deſcente, eſt auſſi parallele à la ſection par l'axe du berceau de niveau; ainſi dans les profils des joints de lit, il ne ſe rencontre que des lignes droites, qui ſont les côtés des ſections en parallelogrammes, dont la rencontre donne les points du contour de l'arête d'enfourchement, qui eſt une ellipſimbre.

Il faut ſeulement remarquer, pour l'intelligence de l'épure, qu'il y a trois ſortes de deſſeins raſſemblés. 1°. La projection

horisontale de la lunette F lg. 2°. La verticale du profil G 1^n 2^n 3^n 4^n f^a, faite sur un plan vertical parallele à la direction M m de la descente. 3°. L'élevation DHE & A s B, faite sur un plan vertical AYB parallele à l'arc droit, représenté au plan horisontal par la ligne ab & AYB, & au profil par la ligne H R, laquelle élevation doit être censée tournée perpendiculairement à la direction des deux voûtes, en sorte que son plan seroit représenté en profil par la ligne ff D. Il faut encore remarquer que cette élevation n'est faite que pour trouver des points correspondans du ceintre primitif A h B, dans le ceintre de l'arc droit du berceau de niveau DHE, sans égard à la hauteur respective de leurs diametres, qui sont rassemblés sur une même ligne DE, quoiqu'ils soient éloignés (si l'on veut) de toute la distance des points D & R, ne s'agissant que de la position du centre c, à l'égard de la distance horisontale du centre C, prise sur une perpendiculaire à la direction horisontale de la descente. *Fig. 56.*

On remarquera enfin, que le ceintre primitif A h B qui sert à l'arc droit, n'est pas dans sa situation naturelle dans cette élevation, où il devroit être incliné suivant la ligne RG du profil; mais comme on le suppose couché à angle droit sur la ligne DE, & que le diametre AB est commun au diametre de la face, il est indifférent qu'il soit raccourci par la projection en A s B, puisque la ligne ch étant à l'angle droit sur DE, sera toujours dans le même plan vertical étant inclinée ou bien verticale, de même que toutes ses paralleles A a^n; 1, 21; 2, 22; 3, 23; 4, 24; B b^n : donc les plans verticaux passans par ces lignes donneront toujours les mêmes points a^n, 21, 22, 23, 24, b^n, dans l'arc droit DHE du berceau de niveau, de même que dans le ceintre de face surmonté, qui est représenté par la demi-ellipse AYB, dont le petit axe AB est commun à l'arc droit; par conséquent les arcs 21, 22, 23, &c. sont bien correspondans aux arcs 1, 2; 2, 3, &c. du ceintre primitif compris entre les sections des plans paralleles qui passent par les joints de lit, *ce qu'il falloit trouver* pour en avoir les retombées & les hauteurs.

CHAPITRE II.

Des rencontres des voûtes cylindriques avec les coniques.

Les voûtes coniques en demi-cônes completes, qui ſont les ſeules trompes, ne ſont pas fort communes, mais les voûtes & les murs en portion de cônes tronqués ſont très-fréquentes dans l'architecture militaire; telles ſont les embraſures, les flancs concaves, les orillons convexes, les tours, les contreſcarpes arrondies au devant des angles ſaillans, &c. dans leſquelles ſont percées des portes ou des embraſures; nous allons parcourir tous les cas des rencontres des cônes avec les cylindres.

PROBLEME III.

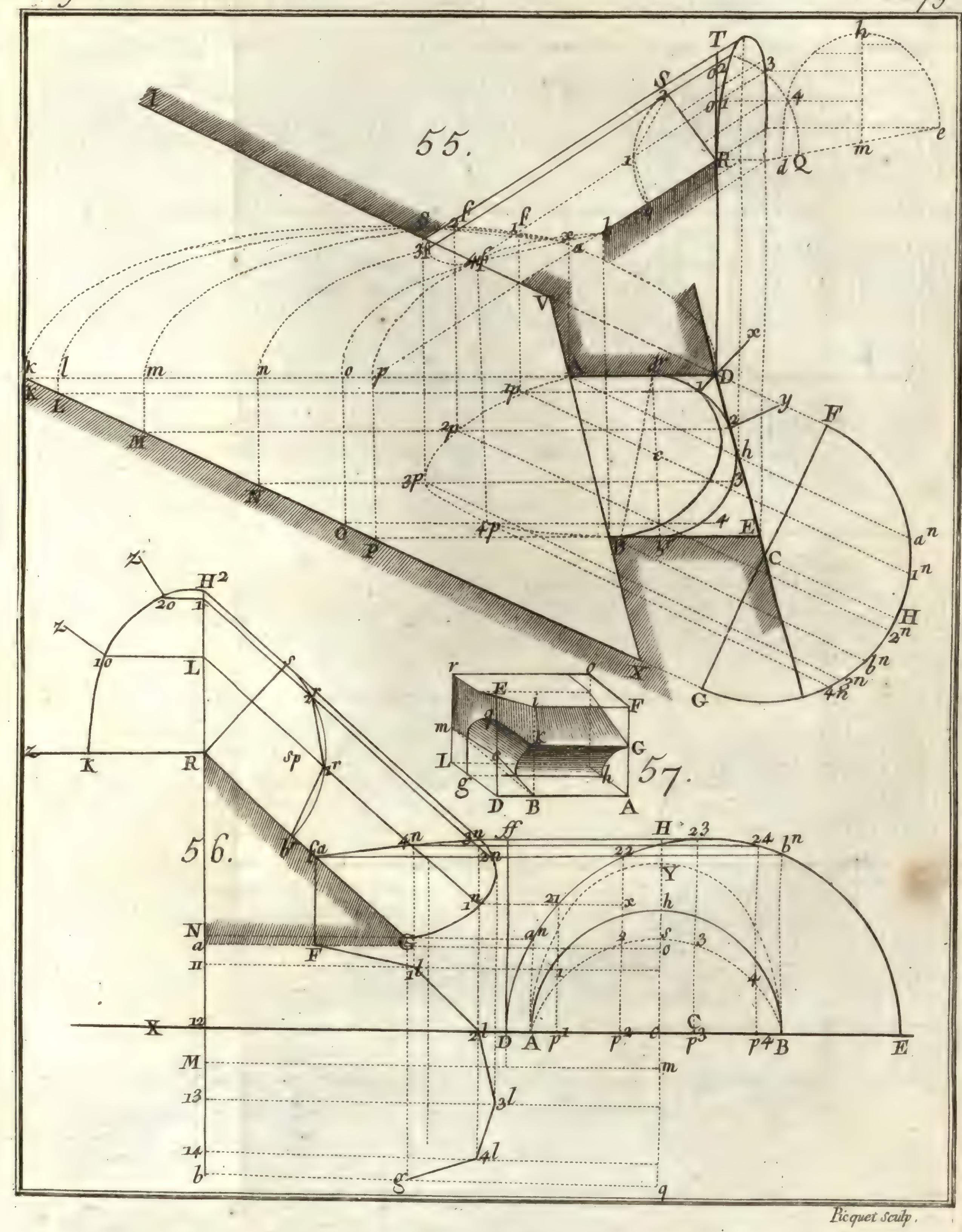
Faire l'arête de rencontre d'un berceau quelconque avec un mur ou une voûte conique.

On peut conſiderer un berceau comme étant de niveau, ou incliné en deſcente, rachetant une tour en talud, ou comme étant racheté par une lunette ou une voûte conique; dans le premier cas le cylindre pénétre le cône, dans le ſecond le cône pénetre le cylindre.

Premier Cas.

Porte droite ou biaiſe en tour ronde, ou creuſe & en talud.

Plan 80. Fig. 59. Soit (fig. 59) l'arc de cercle ou d'ellipſe KXO, la baſe horiſontale d'une portion de tour creuſe en talud, comme un arondiſſement de contreſcarpe dans laquelle eſt percée une porte en berceau, dont la projection eſt ADEB, droite ou biaiſe, c'eſt-à-dire, dont l'axe CX paſſe par le centre C' de la tour, qui eſt au bas de la planche, ou n'y paſſe pas; nous choiſiſſons ici pour exemple une porte biaiſe, parce qu'elle eſt un peu plus difficile que la droite, & que cet exemple ſert pour les deux eſpeces de portes. On commencera par ſe déterminer au choix du ceintre primitif, qui peut être pris en quatre ou cinq différens endroits & ſituations, comme nous l'avons dit des portes en



Picquet Sculp.

en tour ronde ſans talud. 1°. Sur un plan vertical ou en talud, paſſant par la corde A B. 2°. Sur l'arc A X B rectifié. 3°. Sur le même développé en baſe de développement du cône. 4°. Sur l'arc-droit. *Fig.* 52.

Le P. Derand & après lui M. de la Rue, prennent pour ceintre primitif l'arc de développement de la baſe du cône, pour pouvoir faire les têtes des vouſſoirs exactement égales. Dans les fortifications, on prend ordinairement l'arc droit pour ceintre primitif, parce qu'on veut que les voûtes ſoient intérieurement en plein ceintre. Ici nous prendrons ce ceintre ſur la corde A B, en ſituation verticale, ou inclinée en talud, parce qu'ordinairement les inégalités qui en reſultent aux têtes des vouſſoirs, pour peu qu'ils ſoient d'un nombre au deſſus de cinq, ne méritent pas qu'on y faſſe attention, lorſque le diametre de la porte eſt peu conſidérable, comparé à la circonférence de la tour, ce qui arrive ordinairement; & l'on peut dire que l'opération pour faire des têtes égales, ſuivant le trait des Auteurs, eſt une délicateſſe ſuperflue.

Par un point D, pris à volonté ſur un des piédroits A D, on menera D E parallele & égale à A B, ce qui n'eſt pas dans la figure, mais qu'il faut ſuppoſer, ſur laquelle on décrira le ceintre primitif D *h* E, circulaire ou elliptique, puis l'ayant diviſé en ſes vouſſoirs aux points 1, 2, 3, 4, & abaiſſé des perpendiculaires ſur ſon diametre, on menera par leurs projections p^1, p^2, p^3, p^4, des paralleles à la direction de la voûte qui ſerviront à trouver l'arc droit D *s* R, & la projection de l'arête à double courbure de la face de la porte en A h^t B, comme il ſuit. Ayant élevé ſur E D prolongée une verticale D V, par un point D pris à volonté, on fera l'angle du complément du talud V D E, puis on menera par tous les points des diviſions du ceintre primitif 1, 2, 3, 4, des horiſontales qui couperont la ligne V D aux points y^2, V, & le profil du Talud F D aux points f^1, fy, F, qui donneront les reculemens; ſavoir V F pour le milieu de la clef, $y^2\ fy$ pour les lits de deſſus des deuxieme & quatrieme vouſſoirs, & $V^1\ f^1$ pour les premier & cinquieme, & de même f^5 & f^6 pour l'extrados.

Il faut remarquer que les longueurs de ces reculemens diminueroient ſi le ceintre primitif avoit été pris ſur un plan incliné au talud, au lieu du plan vertical que nous ſuppoſons; car alors il faudroit porter la longueur D V en D fy, ſur F D, & tirer

Fig. 59. fy, y^2 parallele à F V ; on voit que le reculement du milieu F V eſt plus grand que le même pris en fy, y^2 ; ainſi des autres reculemens correſpondans aux diviſions 1, 2, 3, 4, des joints de tête, comme il a été dit au tome I I, en parlant des voûtes ſimples de face en talud. On portera enſuite tous ces reculemens du talud ſur une ligne A L, qu'on fera perpendiculaire à l'arc A X B, qui eſt une portion de la baſe de la tour concave, en ſorte que cette ligne A L, étant prolongée, paſſe par le centre C^t de la tour, ſi elle eſt circulaire, ou que cette ligne ſoit perpendiculaire à la tangente en A, ſi cette baſe eſt elliptique; ainſi l'on portera V F en A L, fy, y^2 en A 2^u, f^1 V^1 en A 1^u, & par ces poits 1^u 2^u L, on tracera des arcs concentriques à l'arc A X B, qui couperont les projections des joints de lit aux points t^1, t^2, t^3, t^4, par leſquels on tracera à la main la courbe A h^t B, qui ſera la projection horiſontale de l'arête de rencontre du mur en talud avec la doële du berceau que l'on cherche ; laquelle projection eſt ſuffiſante pour tailler la porte *par équarriſſement*, ce qui eſt le plus convenable & le plus commode.

On peut auſſi opérer par le moyen des panneaux flexibles, mais ſans autre avantage que celui de pouvoir faire les têtes exactement égales en œuvre, parce qu'il faut que la ſurface conique, concave ou convexe, de la partie de la tour que comprend chaque vouſſoir, ſoit faite par la voie de l'équarriſſement, avant que de pouvoir y appliquer le panneau pliant dont on doit tracer le contour. Nous avons fait remarquer ailleurs que la méthode du P. Derand, & après lui de M. de la Rue, de former le développement de la baſe du cône, n'étoit pas convenable à la pratique, parce que l'extrême longueur du rayon de l'arc de cercle qui doit exprimer ce développement la rend d'une exécution très-embarraſſante & ordinairement défectueuſe, auquel cas il faut avoir recours à notre probl. huitieme du troi-
Fig. 58 & 59. ſieme livre. Il s'agit de trouver le contour *d m e* (fig. 58.) moins concave que K X O de la baſe de la tour creuſe, mais qui en ſoit le développement, ſur lequel arc il faut prendre la partie *a m b* égale au contour de l'arc A B de la baſe de la porte ; pour cet effet il faut faire C F perpendiculaire ſur C S & égale au rayon C^t A, de la baſe de la tour, auquel on ajoutera le plus grand reculement f^6 V^6 de l'extrados de la fig. 59 ; puis faiſant l'angle C F *d* égal à celui du talud donné, on prolongera le talud F D ou F *d*, juſqu'à ce qu'il rencontre l'axe C S en S,

où ſera le centre des arcs de développement qui doivent paſſer par toutes les hauteurs des diviſions de la porte ; ainſi l'arc *dme* ſera celui du pied de la tour, ſur lequel on prendra par petites parties une longueur *amb*, égale à l'arc AXB du pied de la tour ; c'eſt le trait des Auteurs cités.

Pour montrer l'inconvénient, l'embarras & le peu de *conſéquence de cette opération*, ſuppoſons un cas très-ordinaire, qui eſt celui d'un arrondiſſement de contreſcarpe de dix toiſes de rayon & un ſixieme de talud, le rayon de ſecteur du développement aura environ 61 toiſes, c'eſt-à-dire 366 pieds, avec laquelle longueur il faut faire un ſimbleau pour tracer l'arc demandé pour la baſe de la porte, qui eſt ordinairement très-petite, dans le cas dont nous parlons, mais qui ne ſeroit encore rien quand on la ſuppoſeroit de la grandeur d'une porte-cochere ; de ſorte que ſuppoſant qu'on veuille s'aſſujettir à la minutie de ce développement, on trouvera qu'un arc dont la corde ne peut être tout au plus que de 8 pieds, ne différera pas ſenſiblement de ſa corde. En ce cas on n'a rien de mieux à faire que de chercher trois points de cet arc par le probl. VIII du troiſieme Livre, & enſuite le tracer ſans le ſecours du centre par le probl. I. du deuxieme livre ; mais il faut avouer qu'à moins que la tour ne fût d'un fort petit diametre & la porte très-grande à ſon égard, ce ſeroit s'amuſer à la bagatelle. Cet arc de baſe développée ſera un peu concave à la tour creuſe, comme la moitié *da* C^a, de la fig. 60, & convexe à la tour ronde, comme à la moitié C^x *be* de la fig. 61. Du milieu de cet arc, on décrira le ceintre primitif *ahb*, qu'on diviſera en ſes vouſſoirs aux points 1, 2, 3, 4, mais de ces ponits on n'abaiſſera pas des à plombs ſuivant l'uſage ordinaire, on tirera des lignes au centre de l'arc de développement, comme 1 b^1, 2 b^2, &c. qui ſeront convergentes ; on en fera de même pour les points d'extrados 5, 6, &c. leſquelles lignes reſſerreront auſſi cette eſpece de projection à la tour creuſe, & l'élargiront à la tour ronde, comme on voit aux fig. 60 & 61 ; & comme le centre où il faut tirer ces lignes ſera ſans doute hors de la place où l'on tracera l'épure, il faudra avoir recours au probl. I. du troiſieme Livre ; ainſi on ſe donne bien des opérations, ſans aucun avantage, qu'une régularité de diviſion des vouſſoirs en œuvre, qu'on trouve à très-peu près par la voie de l'équarriſſement. *Fig. 60 & 61.*

Fig. 59. Cette élevation de face déployée étant faite, on tirera du centre C' de la tour, une ligne A L avec laquelle on fera l'angle du talud T A L, & l'on portera ſur la ligne A T les longueurs des lignes 1 b^1, 2 b^2, &c. aux points A f^1, A f 2, & par les points f^1, f^2, on abaiſſera des perpendiculaires ſur A L, qui la couperont aux points 1'', 2'', par leſquels on tracera des arcs concentriques à la tour qui couperont les fauſſes projections tirées par les points b^1, b^2, C a, &c. de la fig. 60, comme on a fait à la fig. 59, en ſuppoſant le ceintre primitif de la fig. 60 ou 61 placé en D h E de la fig. 59, & l'épure ſera achevée.

Application du trait ſur la pierre par équarriſſement.

Fig. 59 & 62. Ayant dreſſé un parement $abcd$ (fig. 62) de ſuppoſition horiſontale, par exemple, pour former le vouſſoir de la ſeconde aſſiſe qui paſſe par les points 1, 2, du ceintre primitif, on en dreſſera un ſecond à l'équerre du premier, qui ſera donc ſuppoſé à-plomb $bcef$, & l'on en fera un troiſieme $efgh$, jaugé au premier à la hauteur totale 6 n. Puis on levera un panneau ſur la projection q^2 t^2 $t^1 k d^5$ q^2, (fig. 59) on l'appliquera ſur le premier lit horiſontal pour en tracer le contour, qui ſera un pentagone irrégulier & mixte. On prendra enſuite la retombée 1 g de la fig. 59, qu'on portera au premier lit quarrément à l'arête bc, en t^1 1^r, de la fig. 62, & la hauteur 2 g de la même retombée, au deſſus de la même arête bc en 2 2^r, pour tracer la ligne 2 2^r; enſuite on abattra la pierre entre ces deux lignes t^1 1^r & 2, 2^r en portion de doële creuſe cylindrique, par le moyen d'une cerche formée ſur l'arc 1^r 2^r de l'arc droit de la fig. 59. On poſera enſuite le même panneau du lit de deſſous au lit de deſſus pour y tracer l'arc t^1 t^2, de la portion de l'arête de la porte, & par le moyen d'un autre panneau, on tracera l'arc circulaire i t^6, qui n'eſt pas parallele à t^1 t^2. On abattra la pierre quarrément, ſuivant l'arc t^1 t^2, tracé au lit de deſſus, & par cette opération on formera une portion cylindrique verticale qui coupera l'horiſontale qu'on vient de faire ſuivant l'arête inclinée qui répond à celle de l'arc 1, 2 de l'élevation; en cet état la tête du vouſſoir ſeroit faite, ſi la face n'avoit pas de talud; mais comme il y en a ſuivant l'arc circulaire tracé au lit de deſſus i t^6, il faut abattre la pierre à la regle entre cet arc i t^6 & l'arête déja faite pour former la ſurface conique en talud; enfin avec les biveaux mixtes de lit & de doële 1^r 2^r 6^r pris à l'arc droit pour le lit de

deſſus, & $2^r\ 1^r\ 5^r$, pour celui de deſſous, on achevera la pierre, faiſant le joint t^1 K à-plomb, ſuivant la ligne du panneau, qui a été tirée du centre C^t de la tour, & la pierre ſera achevée, comme elle eſt repréſentée à la fig. 63.

J'ai entré ici dans un grand détail de la coupe & de l'application du trait, parce qu'il s'agit d'un ouvrage qui eſt très-fréquent dans les fortifications, où les portes des galeries de mines ſont ordinairement percées dans les arrondiſſemens des contreſcarpes, où il convient qu'elles ſoient d'une direction biaiſe pour dévoyer la galerie de deſſous la capitale, contre ce qu'ont pratiqué certains Directeurs, peu dignes de l'être, qui ont ſuivi autant qu'ils ont pu la direction de la capitale. Or je ſai que bien des gens qui ne ſavent point la coupe des pierres, ce qui n'eſt pas rare, ſe ſont trouvés très-embarraſſés pour l'exécution de ces portes, & n'en ſont venus à bout qu'en traçant les vouſſoirs ſur les ceintres, & les deſcendant & remontant à pluſieurs repriſes, pour les préſenter & ragréer; travail inutile & long, qu'on s'épargne quand on ſait comment s'y prendre; il arrive même ſouvent que dans ces tâtonemens, on *coupe*, c'eſt-à-dire, on gâte la pierre en pure perte, de ſorte qu'il faut en prendre une autre, & recommencer; alors *on ſent qu'un Ingénieur a beſoin de ſavoir la coupe des pierres.*

Application du trait par panneaux.

Pour faire uſage des panneaux, il faut les tracer ſur une matiere flexible comme du carton, & faire une portion de ſurface conique de la tour ſuivant la projection du reculement des arcs concentriques de la même tour, comme $1^u\ t^1$, $2^u\ t^2$, (fig. 59.) & appliquer ſur cette partie le panneau de tête du vouſſoir demandé, tel qu'il eſt tracé aux fig. 60 ou 61, pour les tours creuſes, ou rondes; en quoi l'on voit que cette pratique, dont j'ai fait voir l'embarras, ne donne aucun avantage ſur celle de l'équarriſſement, puiſque pour faire cette portion de ſurface conique, il faut en prendre la baſe inférieure & ſupérieure, comme on a fait au trait par équarriſſement, & qu'enfin ſi l'on veut ſe piquer d'exactitude, il ne faut pas (ſuivant l'uſage des auteurs) faire les joints de tête en ligne droite, puiſqu'ils ſont les développemens des arcs de quelqu'une des ſections coniques, leſquels développemens ſur la ſurface du cône ſont toujours des lignes courbes;

ainsi le meilleur est de faire ces sortes de portes par la premiere méthode de l'équarrissement.

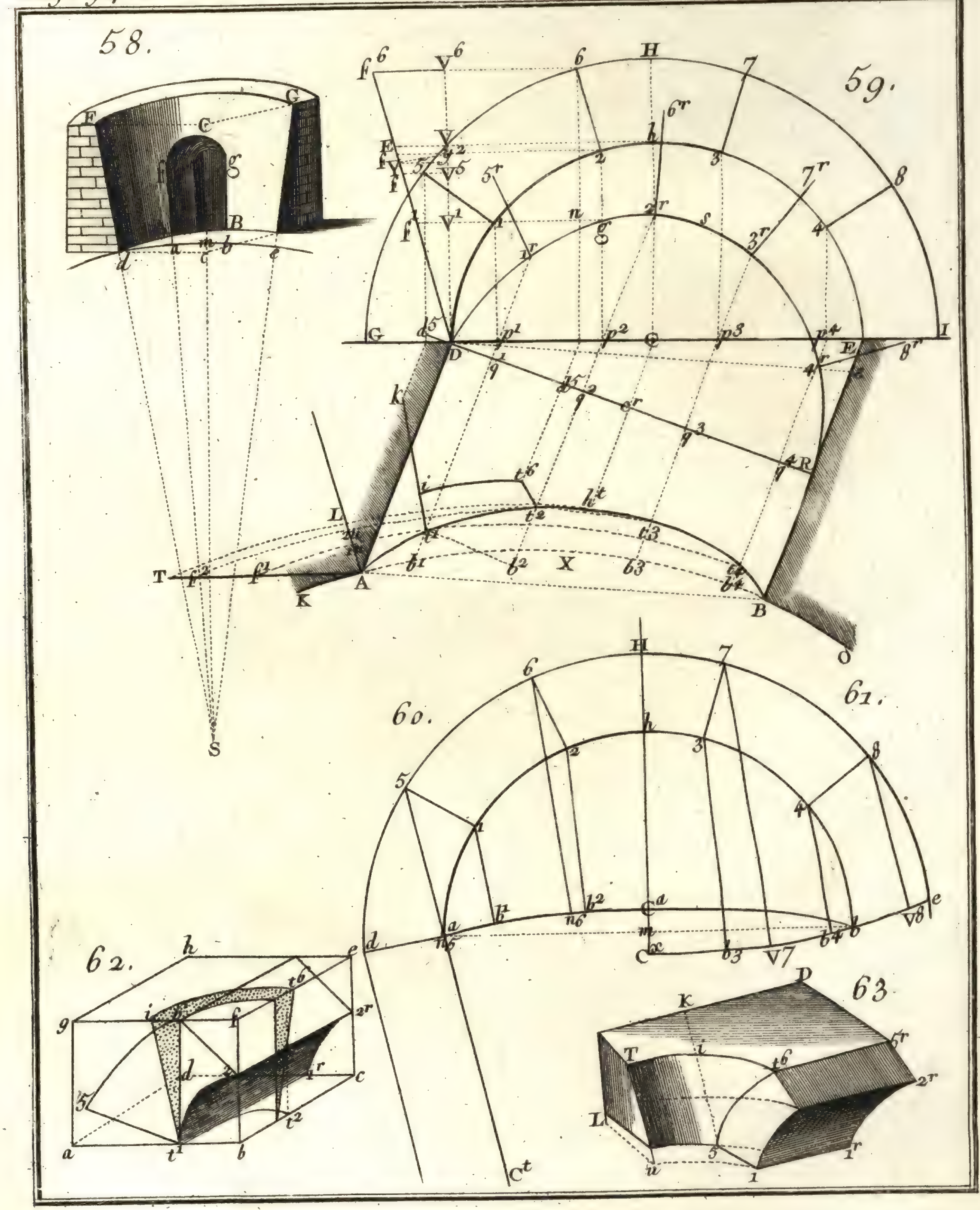
Deuxieme situation du berceau à l'égard du cône, lorsque le berceau est incliné à l'horison.

En termes de l'art,

Descente droite ou biaise en tour ronde, ou creuse & en talud.

Nous avons choisi pour exemple dans le trait précédent la
Plan. 81. tour creuse, ici nous choisirons la tour ronde & la porte biaise.
Fig. 64. Il est clair, par ce que nous avons dit ci-devant, qu'on peut prendre le ceintre primitif en six endroits différens. 1°. Sur un plan vertical situé de deux manieres, ou perpendiculaire à la direction horisontale de la descente. 2°. Ou biais à cette direction, suivant l'obliquité de la corde A B de l'arc horisontal de la tour que la baye de la porte comprend. 3°. Sur un plan incliné situé aussi de deux manieres, ou à l'arc droit qui est perpendiculaire au plan de la rampe de la descente, par conséquent incliné à l'horison. 4°. Ou sur la corde A B dans un plan incliné, suivant le talud de la tour. 5°. On pourroit compter une cinquieme position, qui seroit sur un plan perpendiculaire à la direction horisontale par sa base, mais incliné suivant le talud de la tour. 6°. Enfin on peut former le ceintre primitif sur la surface du cône développée en surface plane, pour pouvoir faire les divisions des voussoirs exactement égales, comme il a été dit au trait précédent. Nous choisissons ici la plus simple & la plus convenable pour la pratique, qui est de faire le ceintre primitif sur la corde A B, ou ce qui revient au même sur la tangente T N, qui lui est parallele & égale en D E sur un plan vertical.

Soit (fig. 64.) l'arc O B A une portion de la base de la tour, & le quadrilatere mixte I A B K la projection horisontale de la descente dans la tour, laquelle porte est ici biaise, parce que la direction de son milieu C M ne passe pas par le centre C^r de la tour. Il en est ici comme aux descentes biaises simples, on peut faire l'arc de face ou de niveau ou rampant; supposant qu'on veuille le faire de niveau, on menera par le point K du piédroit qui avance le plus, une ligne K L parallele à A B, qui coupera le piédroit A I prolongé en L. On fera ensuite le profil de la tour & de la rampe, pour celui de la tour on fera l'angle L A S égal


58.
59.
60.
61.
62.
63.

à celui du talud donné, comme au cinquieme ou ſixieme de la *Fig.* 64.
hauteur; & pour celui de la rampe, on fera l'angle A L F égal à celui du complément de la deſcente, dont le côté L F coupera le côté A S de la tour en F, par où l'on menera une horiſontale F G pour la poſition des impoſtes de l'arc de face, où il faut trouver le point G de l'impoſte, qui répond au point B du plan horiſontal.

Par le point K on menera une perpendiculaire ſur A L prolongée, qu'elle coupera en k, par où on menera k G parallele à L F, qui donnera ſur l'horiſontale F G le point G d'interſection, où ſera l'impoſte qui répond à B. On fera enſuite ſur A B, ou ſur ſon égale D E, comme diametre, le ceintre de face D h E, & ſon extrados T H N; l'ayant diviſé en ſes vouſſoirs aux points 1, 2, 3, 4, on abaiſſera ſur ce diametre des perpendiculaires 1 p^1, 2 p^2, &c. & enſuite on fera les projections des joints de lit p^1 q^1, qui couperont l'arc A C B aux points o^1, o^2, o^3, o^4, par leſquels on menera des perpendiculaires ſur L A qui couperont cette ligne en des points que je n'ai pu marquer dans la figure pour éviter la confuſion, mais ſeulement le point b provenant de B; j'appellerai les autres b^1, b^2, &c. par leſquels on menera des lignes au ſommet du cône, qui eſt à la rencontre de la ligne du talud A S avec celle d'à-plomb qui paſſe par le centre C^t, comme on le voit à la fig. 65 en s.

Mais comme ce ſommet du cône s peut-être très-loin, ſelon la largeur de la tour & la roideur du talud, il ſeroit fort incommode de l'aller chercher hors de la place où l'on trace l'épure; alors il faut avoir recours au probl. I du troiſieme livre, page 335. Suppoſant ces lignes (que j'appelle des b S) tirées ſur le profil, (fig. 64.) on décrira ſur G F prolongée pour baſe la moitié du ceintre primitif C D h en c D^e h^e, avec ſes diviſions 1 4, 2 3, par leſquelles on menera des paralleles à F G qui couperont chacune deux lignes correſpondantes b S, b^1 S, b^2 S, aux points 1, 2, 3, 4, du profil, par leſquels on tracera à la main la courbe F 1, 2 h 3, 4 G, qui ſera la projection verticale de la face de deſcente ſur la tour ronde. Préſentement, il faut faire le profil de la même deſcente en dedans ſur la tour creuſe, lequel ſera beaucoup plus facile, parce qu'on ne lui ſuppoſe point de talud dans l'intérieur concave. Ayant tiré les projections des joints de lit à l'ordinaire p^1 q^1, p^2 q^2, &c. qui couperont l'arc concave I m K aux points n^1, n^2, n^3, n^4, on menera par ces points

Fig. 64. des verticales, & par les points de profil de l'arc de face des inclinées paralleles à la rampe L F qui couperont ces verticales aux points i, V^1, V^2, V^3, V^4, k, par où on menera à la main une courbe qui ſera la projection verticale de l'arc de face concave, lequel ſera rampant de la hauteur I i.

L'intervalle des deux projections de face ronde, c'eſt-à-dire convexe, & de face creuſe, c'eſt à-dire concave, donnera les longueurs des joints de lits, qu'on ne peut trouver ſur le plan horiſontal, où elles ſont raccourcies par la projection; c'eſt pourquoi nous n'avons pas commencé par faire la projection horiſontale des arêtes des arcs de face extérieure & intérieure. La projection de l'arc de face creuſe en dedans eſt donnée à l'arc I m K, parce qu'elle eſt ſuppoſée ſans talud. Pour faire celle de l'arc de face extérieure qui eſt en talud, il faut prendre pour rayon la longueur Cf F, qui eſt la diſtance de l'axe au côté du cône ſur une horiſontale, & du centre C^t de la tour tracer un arc de cercle qui coupera le piédroit I A en f, & le piédroit K B en g, où ſeront les reculemens Af, Bg que donne la hauteur F de la deſcente ſur la baſe de la tour; de même avec la longueur C 1 pour rayon, & du centre C^t, on tracera un arc qui coupera les projections p^1 q^1, p^4 q^4, aux points 1^t 4^t; ainſi du reſte. La même pratique qui a ſervi à faire les profils de l'arête de la doële avec la face de la projection horiſontale, ſervira à faire le profil de l'extrados Nf 8^x 7^x Hf comme la figure le montre, & ſa projection horiſontale p^n 8^t 7^t 6^t 5^t t.

Il ne reſte plus que l'arc droit à tracer de la maniere qui a été expliquée au tome précédent, en parlant des voûtes en berceau, ſimples, biaiſes & en deſcente, que je vais repéter pour ne pas y renvoyer le lecteur, avec une petite variété de conſtruction. Par un point L, pris à volonté ſur la ligne de rampe L F, on lui tirera une perpendiculaire L h^r, qui coupera l'autre ligne G k en r, & les projections en profil des joints de lit 1, 1^r; 2, 2^r, &c. prolongées aux points R^1, R^4, R^2, R^3, les milieux m^e, m^1 m^2 de ces points, ſeront ceux des abſciſſes du demi-diametre de l'arc droit, dont les ordonnées ſe prendront ſur une même ligne tracée au plan horiſontal. Ayant porté la différence L r des impoſtes en k R, on tirera K R qui coupera les projections horiſontales des joints de lit aux points q^1, q^2, m, q^3, q^4, les longueurs m q^2, m q^1, m R ſeront les ordonnées que l'on cherche, leſquelles (parce que l'arc droit eſt rampant) ne doivent

pas

pas être à angle droit avec le demi-diametre $m^e h^r$ incliné, qui est cependant dans un plan vertical, mais on aura seulement l'angle qu'elles doivent faire avec L h^r. Du point m^e, milieu de L r, pour centre, & de l'intervalle m R ou m K, pour rayon, on fera de part & d'autre des arcs de cercles k G en L, & F L prolongée en k^r, la ligne k^r L sera le diametre rampant auquel les autres ordonnées passant par m^1, m^2, seront paralleles & égales à mq^1, mq^2, & l'arc droit sera fait passant par k^r h^r I^r. *Fig. 64.*

Dans les traits des voûtes simples nous avons donné la maniere de tracer les ceintres de niveau & rampans des faces de descente & de montée, parce que nous les avons supposé planes; ici nous n'en faisons pas de même, parce que ces faces étant à double courbure, une projection verticale n'en marqueroit pas le véritable contour, ainsi elle deviendroit inutile pour la pratique. L'arc droit, les projections horisontales & verticales étant tracés, on aura tout ce qui est nécessaire pour former les panneaux si on opere par leur moyen, ou bien pour appliquer le trait sur la pierre par équarrissement, comme on a fait au trait précédent, dont celui-ci ne differe qu'en ce que le berceau est en descente, au lieu que l'autre étoit supposé de niveau.

Si l'on opere par panneaux, on peut en trouver toutes les mesures au profil & à l'arc droit. Ceux de doële, qui seront des trapezes mixtes, auront pour distance de leurs côtés paralleles la longueur de la corde de l'arc droit, & pour longueur des côtés celle des joints de lit compris entre les deux profils des faces; mais pour avoir des points des courbes convexes de tête de descente & concaves de tête de montée, il faudra les chercher en sous-divisant les arcs des têtes du ceintre primitif 1, 2; 2, 3, &c. ce qu'on n'a pas fait ici pour ne pas trop embrouiller le trait. Les panneaux de lit seront de même des trapezes mixtes composés des joints de lit pris au profil & de l'intervalle de la doële & de l'extrados, dont les avances des têtes sont données au même profil, comme celles des joints de doële.

Application du trait sur la pierre.

Pour tailler les voussoirs de cette voûte à la face de descente avec facilité & justesse, il faut opérer partie par panneaux de doële & partie par équarrissement de tête, parce que à la

Fig. 64. tête l'arête de doële & de face eſt une courbe à double courbure, & que celles des joints y ſont des courbes planes des ſections coniques, toutes leſquelles courbes ſe forment exactement ſans les connoître, par le moyen de l'équarriſſement. Pour y parvenir il faut une petite préparation dans la projection horiſontale, qui eſt de tirer par le point de l'arc & de l'arête inférieure avec le joint du vouſſoir qu'on ſe propoſe de faire, une ligne droite au centre de la tour C^t, laquelle coupera l'arc circulaire concentrique qui paſſe par l'angle de la même arête avec le lit ſupérieur.

Suppoſant, par exemple, qu'on veuille faire le ſecond vouſſoir, on tirera par le point 2^t une ligne au centre C^t qui coupera l'arc de cercle paſſant par les points 1^t & 4^t au point z; ou ce qui revient au même & qui eſt le plus convenable, on tirera par le point 1^t la ligne $1^t C^t$ qui coupera l'arc de cercle concentrique paſſant par les points 2^t 3^t au point X; la ligne 1^tX, ou $2^t z$ ſervira comme on le dira ci-après. On fera encore une petite préparation à l'élévation, qui eſt de tirer par l'angle 23 le plus haut une horiſontale 23 X & une verticale par le plus bas 14 V, qui coupera l'horiſontale au point X. Ayant dreſſé un parement pour ſervir de doële plate, (fig. 66) on y appliquera le panneau 1^d 2^d $n^2 n^1$ fait comme à toutes les épures précédentes, par le moyen des longueurs des côtés donnés au profil & de leur poſition à l'égard d'une directrice D B^d priſe au profil en G*d* ou ailleurs; il n'importe.

Le contour du panneau étant tracé, on aura les quatre angles du vouſſoir, mais non pas les courbes des têtes. On prendra avec la fauſſe équerre ſur le profil l'angle de rampe & d'à-plomb *k* GV, puis du point 23 pour centre à l'élévation, & de l'intervalle 2^t X pris au plan horiſontal, on décrira un arc ſur la tête ébauchée, puis avec le biveau de l'angle *k* GV on abattra la pierre pour y faire une plumée qui ſera un côté de cylindre, au-dedans de laquelle & à la hauteur donnée à l'élévation 14 X, on fera un trou d'environ un pouce de profondeur pour y placer la longueur de la petite ligne 1^t X, comme on voit à la figure ✠ au haut de la planche 81 en t^1 X, en ſorte que le point t^1 ſoit toujours diſtant du point 2 de l'intervalle dont nous venons de parler 2^t X.

Par ce moyen, on aura trois points de la ſurface conique de la tour, dont les deux 1 t^1 ſont ſur un côté, en ſorte qu'on y peut

appliquer la regle & prolonger ce côté tant qu'on veut. Secondement on a les deux points 2 & X ſur une ſection plane parallele à la baſe du cône, par conſéquent ſi l'on prend ſur le côté 1 X prolongé un point à volonté comme *a*, on pourra en trouver un ſecond *y* en prenant le reculement du talud *a* T ſur le côté cylindrique donné par le biveau en 1^t Y du plan horiſontal, ſur la droite 1^t C^t, & tirant par le point Y une parallele à X 2^t, qui coupera la ligne 2^t C^t au point *y*. *Fig. 64.*

Si l'on dégauchit les quatre points donnés X 2 & *a y* (fig. ✠) par le probl. I du 2 tome, on aura la poſition du point *y* ſur le côté du cône tronqué de la tour, & par conſéquent on pourra exactement en former la ſurface, comme nous l'avons dit pour les portions du cône au commencement du même tome; ſavoir, en appliquant la regle ſur les points 2 & *y*, qui ſont ſur le côté du cône, & appuyant la cerche qui eſt donnée à l'arc 1^t 2^t du plan horiſontal ſur les points, X de la figure ✠, & la cerche de l'arc Y*y* auſſi donnée au plan horiſontal par un arc de cercle concentrique au précédent, ſur les points *a*, *y*, pour y former un arc parallele à la baſe & au précédent 2 X; ainſi l'on formera exactement la ſurface conique de telle grandeur qu'on voudra, tant en hauteur qu'en largeur. La formation de cette ſurface donnera déja un des contours de l'arête de doële & de tête qui eſt conique, & la formation de l'arc cylindrique qu'on creuſera à l'ordinaire pour la doële du berceau en deſcente déterminera & formera comme par hazard l'arête à double courbure que l'on ſe propoſe de faire. La doële étant formée, il ſera aiſé de former les courbes des joints de tête 1, 8; 2, 7, à la même ſurface conique de la tour, parce qu'en abattant la pierre à l'ordinaire avec les biveaux de lit & de doële, on formera de même ces joints de tête courbe 1, 8; 2, 7, par une eſpece de hazard, ſans s'embarraſſer s'ils ſont elliptiques, paraboliques ou hyperboliques, & cependant par une opération qui eſt très-exacte en elle-même.

Explication démonſtrative.

Si l'on ſuppoſe pluſieurs plans verticaux paſſans par les joints de lit de la deſcente, il eſt clair que leurs ſections à la ſurface de la tour en talud, qui eſt un vrai cône tronqué, ſeront toutes des hyperboles dont les ſommets ſont déterminés aux points 6 H, h^2, h^t de la fig. 65, où ces plans verticaux, qui ne ſont

Fig. 64 & 65. repréſentés en élevation que par des lignes droites, coupent le côté de la tour L prolongé en S. Si l'on décrit enſuite l'arc de cercle L D qui eſt la baſe de la tour, & qu'on prolonge les mêmes lignes qui repréſentent les plans dont nous parlons, elles couperont cette baſe aux points 1, 2, 3, &c. qui détermineront l'amplitude de chaque hyperbole. On a donc deux choſes données pour décrire chaque hyperbole, qui ne ſuffiſent pas en général, mais qui ſuffiſent ici, parce que le cône eſt donné; par conſéquent leur centre le ſera, qui eſt la troiſieme *donnée* néceſſaire pour la déterminer.

Cela ſuppoſé, ſi l'on examine notre conſtruction, on reconnoîtra qu'elle eſt la même que celle que nous avons donné au ſecond Livre, (tome I, pag. 277) parce que les diviſions des vouſſoirs en profil 14, 23 &c. (à l'élévation, fig. 64.) donnent des hauteurs de plans horiſontaux qui coupent l'axe du cône en C^1 C^2, &c. & le côté du cône AS en F, 1, 2, par conſéquent qui déterminent les rayons des cercles des différentes ſections paralleles à la baſe *f g*, 1^t 4^t, 2^t 3^t. Or le contour de l'hyperbole formée par le plan vertical correſpondant à la diviſion de chaque vouſſoir coupe ce cercle en un point qui eſt commun aux deux ſections, donc ce ſera aux points 1^t 2^t &c. provenans des diviſions 1, 2 du ceintre primitif, ce qu'il eſt facile de concevoir pour peu qu'on donne d'attention à la fig. 65, où l'on a tracé dans la moitié de l'élévation L S C les ſections verticales en profil, & dans la moitié C S O les demies hyperboles en élévation, où leurs ſommets f^1, f^2, ſont déterminés par les horiſontales menées des ſommets du profil h^1 h^2.

Par le moyen des points trouvés à la projection horiſontale de l'arête de la porte en deſcente avec la tour, on a trouvé d'autres points de la projection verticale de la même arête, ce qui marque qu'elle eſt à double courbure. Quant à la courbe de l'arête de la même deſcente avec la ſurface concave de la tour, il eſt aiſé de voir qu'elle eſt toute repréſentée en projection horiſontale par l'arc I K, parce que la ſurface intérieure étant à-plomb, cet arc repréſente toutes les ſections horiſontales qu'on peut faire à différentes hauteurs. Ces hauteurs ne ſont plus les mêmes qu'à la face h^e D^e, de l'élévation, fig. 64, parce que les joints de lit ſont inclinés en deſcente, mais elles ſeront toujours déterminées par l'interſection des verticales élevées ſur les points V^1 V^2, &c. avec les profils des joints

de lit, ce qui donne pour la projection verticale de cette arête la courbe $k\,V^4\,V^3\,V^2\,V^1\,I^r\,i$, qui détermine toutes les longueurs des joints de lit *qu'il falloit trouver* avec leurs positions respectives d'avance & de réculement nécessaires pour former les panneaux.

TROISIEME SITUATION DU CYLINDRE A L'ÉGARD DU CÔNE.

De la rencontre des voûtes coniques avec les corps cylindriques verticaux.

Nous venons de parler de la pénétration des cylindres dans les cônes, ici par l'inverse nous traitons de celle des cônes dans les cylindres, ce qui renferme plusieurs cas de variations accidentelles, qui ne changent rien au fond de la construction, mais cependant qui constituent des différences de noms des voûtes. Premierement, l'axe du cône peut être horisontal ou incliné, ce qui fait la trompe, ou voûte en canoniere, de niveau ou rampante. Secondement, cet axe peut être perpendiculaire à la corde de l'arc de la tour où la voûte conique se termine, ce qui fait la trompe *droite*; ou il peut être oblique à cette corde, ce qui lui donne le nom de *biaise*. Troisiemement, dans ce qui concerne la tour, elle peut être *creuse*, c'est-à-dire concave, ou *ronde*, c'est-à-dire convexe. Enfin la concavité ou convexité de la tour que la voûte ou trompe rachete, peut être un arc d'un petit nombre de degrés, ce qui n'a pas de nom particulier, ou d'un demi-cercle entier, ce qui en donne un nouveau qui est celui de *trompe de Montpellier*. Nous avons parlé ailleurs de la différence des noms de trompe & de canoniere; le premier signifie le demi-cône entier, & le second une voûte en demi-cône tronqué.

Tous ces cas peuvent être réduits à deux, l'un des voûtes coniques où l'axe est horisontal, l'autre de celles où il est rampant, parce que le plus ou le moins de concavité ou de convexité de la tour ne produit d'autre changement qu'à la longueur des joints de tête; la convexité les augmente depuis l'imposte jusques vers la clef, & la concavité au contraire les diminue aux mêmes endroits. Secondement la variation du biais ne produit qu'une inégalité de longueur de ces joints de la droite à la gauche. Enfin la trompe & la canoniere ne different en

rien pour la conſtruction, car ſi l'on ôte le trompillon d'une trompe, le reſte peut être appellé voûte en canoniere, c'eſt-à-dire une portion de cône tronqué.

PROBLEME IV.

Faire une voûte conique dans une tour à-plomb.

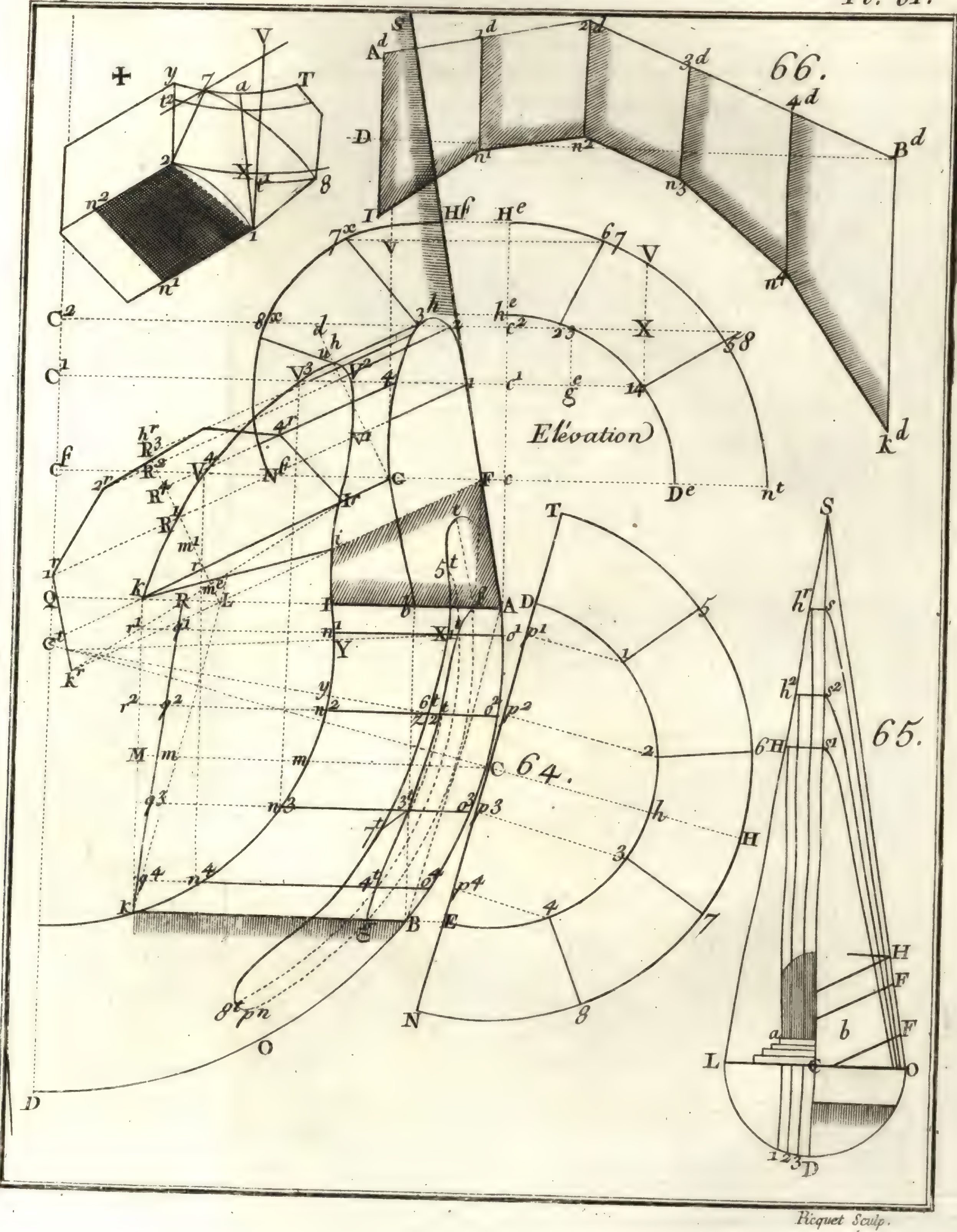
La tour peut être ronde ou creuſe, & la voûte horiſontale par ſon axe & par le diametre de ſon ceintre de face, qui eſt à double courbure.

PREMIERE ESPECE,
où les impoſtes ſont de niveau.

Canoniere, ou trompe en tour creuſe.

Pl. 82. *Fig. 67.* Soit (fig. 67.) l'angle rentrant ASB dans lequel on veut conſtruire une voûte conique, dont les piédroits AS, BS ſont égaux & de niveau; ſoit ADB l'arc concave qui eſt la projection de la tour creuſe, dont la ſurface retranche par ſa rencontre la partie BDAB du cône droit, & forme pour l'arête de face une courbe à double courbure. Pour parvenir à ſa formation on peut opérer, comme nous l'avons dit au troiſieme livre, par addition ou par ſouſtraction, c'eſt-à-dire que l'on peut prendre le ceintre primitif de la trompe ſur la baſe extérieure du cône AB qui eſt toute hors de cette voûte, & après l'avoir ſuppoſée pleine, en retrancher la partie du vuide, ou bien la ſuppoſer coupée par un plan vertical perpendiculaire à ſon axe comme en GF, & ajouter à ce cône droit la partie mixte reſtante pour atteindre à la tour creuſe GADBFD.

Nous choiſirons ici la voie de l'addition comme la plus ſimple. On tirera par le point D, où l'arc de la tour ADB coupe l'axe SC, une perpendiculaire GF à ce même axe, ſur laquelle comme diametre compris entre les piédroits SA, SB, on décrira un demi-cercle G*h*F pour ceintre primitif, qu'on diviſera en ſes vouſſoirs aux points 1, 2, &c. d'où l'on abaiſſera des perpendiculaires qui donneront par leur interſection avec ce diametre les points K, L, par leſquels on tirera du ſommet S des lignes droites qui couperont l'arc ADB de la projection de la tour aux points z^1 z^2; les lignes Sz^1, Sz^2 ſeront les projections des



Picquet Sculp.

joints de lit à la doële, dont il faut chercher la valeur par des profils, parce qu'ils ſont racourcis par cette repréſentation. On prendra ſi l'on veut pour baſe de ces profils la ligne S ſ B, ſur laquelle on portera la longueur SK en S k, SL en Sl pour élever ſur les points k & l des perpendiculaires $k\,k^2$, $l\,l^1$ qu'on fera égales aux à-plombs 2 K, 1 L; par les points k^2 l^1 & par le ſommet S on tirera les indéfinies Sn^1, Sn^2, dont il faut chercher la longueur; l'on portera la projection Sz^2 en SN, & Sz^1 en S M ſur la baſe de profil S B, enſuite par les points N, M on élevera des perpendiculaires qui couperont les lignes Sk^2 Sl^1 prolongées aux points n & m; les lignes S n & S m ſeront les valeurs des projections des joints de lit qu'on cherche. Fig. 67.

Préſentement il ſera aiſé de faire les panneaux de doële plate en commençant par celui des vouſſoirs de la trompe droite qui eſt le cône inſcrit SGF, par exemple pour le ſecond 1, 2.

Ayant tiré à part (fig. 68.) une ligne s^d F égale à S F de la fig. 67, on décrira du point s^d pour centre, & avec la même $s^d f$ pour rayon, l'arc F f dans lequel on inſcrira la corde 1 2 du ceintre primitif G h F (fig. 67.) laquelle donnera le point f, par lequel & le point s^d, on tirera la ligne indéfinie $s^d f^k$, ſur laquelle on portera la longueur S F de la fig. 67. De même ſur le côté s^d F prolongé, on portera la longueur S m en $s^d l^m$; la ligne $k\ l^m$ ſera la corde de la tête de la doële plate $s^d k\, l^m$, de laquelle retranchant la pointe $t\, s^d\, r$ pour l'eſpace donné qu'occupe le trompillon STR, le trapezoïde $t\,k\,l^m\,r$ ſera le panneau de la doële plate que l'on cherche, lequel excede le creux de la tour d'un ſegment d'ellipſe $k\ l^m$ provenant du ſegment de cercle de la projection z^2 2 z^1, que l'on retranchera comme il ſera dit à l'application du trait ſur la pierre. Nous ne propoſons point de chercher les panneaux de lit de cette voûte, dont la tête eſt une courbe en arc d'ellipſe, qu'on pourroit trouver comme nous l'avons dit en parlant de la porte en tour creuſe, parce que nous pouvons nous en paſſer par une voie d'équarriſſement, par laquelle on les forme, ſans qu'il ſoit néceſſaire de les connoître. Il reſte ſeulement à trouver les biveaux de lit & de doële & ceux de doële & de tête, de la même maniere que nous l'avons dit au ſecond tome, en parlant de la trompe droite & de la trompe plate. Fig. 67. & 68.

Application du trait ſur la pierre.

Fig. 67. Après avoir formé un parement pour ſervir de doële plate, on y appliquera le panneau de celle du vouſſoir qu'on ſe propoſe de faire pour en tracer le contour, par exemple celui qui eſt dans une partie de la fig. 68, $t\ k\ l^m\ r$. Puis avec le biveau de doële & de tête, on abattra la pierre pour former une ſeconde ſurface plane, qui ſera un pan de la tour creuſe, qu'on ſuppoſe premierement circonſcrite à un priſme de pluſieurs côtés. On fera enſuite à part (fig. ✠) un triangle rectangle 1 u 2, avec trois lignes données, ſavoir, la corde de la projection de la tête $z^2\ z^1$; la différence des hauteurs des extrêmités des joints priſe au profil, qui ſera $n\ h^2$ qu'on aura en menant par le point le plus bas m, une parallele à la baſe B S, & la troiſieme, qui ſera l'hypotenuſe de ce triangle, ſera égale à la ligne $k\ l^m$.

Cette préparation étant faite, on prendra avec la fauſſe équerre l'angle 1 2 n, & l'on poſera une de ſes branches ſur l'arête de la tête plate 1 2, l'autre donnera une ligne d'à-plomb n 2 ſur le parement de tête plate; par la même maniere avec l'ouverture de l'angle 2 1 m, ſupplément du précédent, on tracera une ſeconde ligne d'à-plomb n 2, ſur laquelle on portera la hauteur 2 u en 1 m, pour tirer la ligne 2 m, à laquelle on tirera une parallele $n\ o$ à hauteur 2 n, priſe à volonté, cependant le plus loin que la pierre pourra le permettre. On levera enſuite une cerche convexe ſur l'arc concave B $z^1\ z^2$, ſuivant laquelle on creuſera deux plumées ſur les lignes 2 m, $n\ o$, par le moyen deſquelles on formera un parement creux à la regle, comme il a été dit pour tout ſegment de cylindre & de doële de berceau, lequel parement ſera celui de la tour creuſe..

Préſentement il ne s'agit plus que d'abattre les lits avec les biveaux de lit & de doële, comme aux voûtes coniques ordinaires à la regle, la ſection de la ſurface plane du lit avec ce parement formera une tête de joint de lit en arc elliptique, ſans qu'on en ait connu auparavant la courbure, & le vouſſoir ſera achevé à la tête ſupérieure: l'inférieure du côté du trompillon ſe fera comme à toutes les trompes. On a deſſiné à la fig. 69 une embraſure dans un flanc concave, dont la conſtruction eſt la même qne celle de la trompe en tour creuſe.

SECONDE

SECONDE ESPECE.

De la trompe en tour ronde, & en particulier de la trompe de Montpellier.

La conſtruction de la trompe en tour creuſe dont nous venons de parler conduit facilement par une opération contraire à celle de la trompe en tour ronde ; & comme celle de Montpellier eſt la plus convexe qu'il eſt poſſible de faire (comme on peut le voir à la fig. 70, où elle eſt repréſentée en perſpective), nous en donnerons le trait pour exemple. Soit (fig. 67), l'angle B S A celui des piédroits ſur leſquels on veut faire une trompe, que nous ſuppoſons égaux ; ayant tiré par leurs extremités A, B, une ligne droite, on la fera ſervir de diametre à un demi-cercle A E B, qu'on tracera à deux fins, l'une pour exprimer la ſaillie de la tour ronde dont il eſt la projection, l'autre pour ſervir de ceintre primitif à la conſtruction de la trompe dont il repréſente la ſection verticale du cône droit coupé par la ligne A B. Ayant diviſé ce demi-cercle en ſes vouſſoirs aux points 1, 2, 3, 4, on abaiſſera à l'ordinaire les perpendiculaires 1 p_1, 2 p^2, &c. ſur le diametre A B, pour avoir la projection de ces diviſions aux points p^1 p^2, par leſquels, & par le ſommet S de la trompe, on tirera des lignes qui couperont le même arc B E A, conſideré comme projection de la tour, aux points Q^1 Q^2 ; les lignes S Q SQ^2 ſeront les projections des joints de lit. *Fig.* 70. *Fig.* 67.

Il faut préſentement chercher la valeur de ces projections, de la même maniere que nous avons fait pour la tour creuſe, par le moyen d'un profil pour chacune, dont on prendra la baſe ſur S A prolongée pour la commodité. On tranſportera les projections des joints de lit compriſes ſeulement dans le cône droit ſur une baſe priſe à volonté, par exemple S A, portant^s p^1 en^s o^1, ^{s} p^2 en^s o^2, &^{s} C en$s$ a, puis on élevera ſur tous les points $a\,o^2\,o^1$ des perpendiculaires ſur^s A, qu'on fera égales aux hauteurs des retombées du ceintre primitif, ſavoir $ah = $ C E, $o^2 f^2 = 2\,p^2$, $o^1 f^1 = 1\,p^1$, & par les points h, f^2, f^1, & le ſommet^s, on tirera des lignes indéfinies^s h^e, ^{s} 2^x, S 1^x, dont il faut trouver la terminaiſon aux points h^e 2^x 1^x. On portera les projection totales des joints de lit SQ^1, SQ^2, SE en Sq, So, SE, & par les points q, o, e, on élevera ſur la baſe S e des perpendiculaires qui couperont les profils des joints de lit aux points demandés

Fig. 67. & 68. e^h 2^x 1^x, les lignes S e^h, S 2^x, S 1^x feront la valeur des joints de lit à la doële.

Avec ces longueurs des joints on peut bien faire, comme au trait précédent, un panneau de doële plate triangulaire s^d 2^d 1^d de la fig. 68, qui fera la valeur de celui de la projection S Q^1 Q^2, de la fig. 67; mais comme il reste encore au dehors un segment de cercle Q^1 1 Q^2, qui est la projection d'une partie de la tour ronde, il faut en ajouter la valeur au panneau triangulaire de la fig. 68, ce que l'on peut faire de deux manieres. Premierement, en changeant l'arc de cercle Q^1 1 Q^2 en arc elliptique, dont on trouvera plusieurs points par le probl. IX du deuxieme livre, page 175. Secondement, par une autre maniere qui facilite l'exécution; on inscrira ce segment de cercle dans un angle formé par deux tangentes, pour changer la face de la tour ronde cylindrique en prismatique à plusieurs pans.

On tirera du centre C aux points Q^1 Q^2 des rayons C Q^1, C Q^2, ausquels on tirera des perpendiculaires Q T, Q T, qui se couperont en T, & feront des tangentes au segment Q^1 1 Q^2. Si le ceintre primitif A E B est circulaire, ces lignes feront égales entr'elles; mais si il étoit surhaussé ou surbaissé, elles feroient inégales dans le rapport des diametres conjugués, & ne feroient plus perpendiculaires aux lignes C Q^1, C Q^2; en ce cas pour tirer ces tangentes, il faut avoir recours au probl. III du deuxieme livre, page 156. Pour trouver la valeur de ces tangentes, il faut chercher celle de la ligne S T, qui donnera le point x de leur rencontre, à la figure 68 : comme cette ligne coupe le diametre A B en y à la fig. 67, on lui élevera une perpendiculaire y x^e, qui coupera la corde 1, 2 au point x^e. On portera ensuite la longueur S y en S Y sur la base S A des profils, & on lui fera une perpendiculaire Y X égale à la hauteur y x^e. Par les points S & X on tirera l'indéfinie S t^e, qui sera terminée au point T^x par une verticale t^e T^x, provenant du point T de la projection horisontale S T portée en S t^e, la ligne S T^x fera la valeur de la ligne S T que l'on cherche.

Pour placer cette ligne dans le panneau (fig. 68.) on tirera la la corde b^2 b^1, sur laquelle on portera du point b^2 la longueur x^e 2 du ceintre primitif en b^2 y; on tirera par les points s^d & y la ligne s^d x égale à S T^x de la fig. 67, qui donnera le point x de la fig. 68; si l'on tire de ce point les lignes x 1^d, x 2^d, le trapezoïde s^d 1^d x 2^d fera le panneau de la doële plate que l'on

cherche, duquel on retranchera pour le trompillon le triangle t t s^d r, suivant la longueur donnée s T^x de la fig. 67. Il faut présentement, comme à la trompe précédente, chercher les biveaux de doële & de tête, pour donner à cette doële plate l'inclinaison qu'elle doit avoir avec les plans de la tour circonscrits à la surface de la tour ronde qu'on se propose de faire; & comme il y en a deux pour une seule tête de voussoir, suivant les lignes de projection Q^1 T, Q^2 T, il faut aussi deux biveaux différens, qu'on trouvera de la même maniere qu'il a été dit pour la trompe plate, tome 2, pag. 88, & pour la trompe droite, pag. 228. *Fig. 67 & 68.*

Application du trait sur la pierre.

Ce que nous avons dit de l'application du trait de la trompe précédente en tour creuse, sur la pierre, peut servir ici pour la tour ronde, avec cette différence qu'ici chaque voussoir étant terminé à la tête par deux surfaces, il faut y doubler l'opération en prenant pour chaque pan une hauteur V T^x, qui soit la différence des angles de la tête du voussoir, pour en former le côté vertical du triangle rectangle q^1 V T^x, qui donnera les angles du biveau de la tête du voussoir 1^d x ou x 2^d, avec l'arête des pans, laquelle est représentée à la projection par le point T, comme l'angle obtus q_1 T^x r de la fig. sur le chiffre 70, ou son supplément à deux droits T^x q_1 O, pour tracer sur chaque pan une horisontale O T^x, comme on a fait au trait précédent, pour avoir 2 m, ou no à la fig. ✠, sur lesquelles horisontales on posera la cerche concave formée sur l'arc convexe AE, qui doit servir à former la surface convexe de la tour ronde de la même maniere qu'on a formé la concave de la tour creuse, où l'on voit que nous supposons qu'on a formé les surfaces des pans par le moyen des biveaux de doële & de tête. La portion de surface convexe de la tour que doit occuper la tête du voussoir étant formée, on abattra la pierre avec les biveaux de lit & de doële pour former les lits, dont les sections avec cette surface cylindrique formeront des joints de tête en arcs elliptiques, sans le secours des panneaux de lit, & cependant fort exactement, quoique par une espece de hasard, sans connoître ces arcs.

Il ne reste plus à présent qu'à creuser la doële avec les cerches convexes formées sur les arcs des têtes du côté du trompillon,

Fig. 67. & ſur un plus grand à la tête ſupérieure ; mais comme cette tête n'eſt pas plane, on ne peut y tracer un arc de cercle ou d'ellipſe comme aux trompes à face plane ; c'eſt pourquoi nous allons donner une maniere d'y poſer un biveau mixte, dans une ſituation qui ſoit verticale lorſque le vouſſoir ſera mis en place ; par conſéquent dont l'arc de doële puiſſe être pris ſur le ceintre primitif A E B. Ayant tiré le joint de tête 2, 7, on prendra dans ce joint un point 7 à volonté, duquel on abaiſſera une perpendiculaire 7, 9 ſur le diametre A B ; on portera la longueur S 9 en S *d* ſur S A, & par *d* on élevera ſur la même une verticale *d* 7^x égale à 9, 7, & par les points S & 7^x, on tirera la ligne S 7^x. On formera enſuite un triangle S 7 f^2 avec les trois lignes données S 7^x, S f^2 & 2, 7 ; l'angle S f^2 7 ſera celui du biveau que l'on cherche, dont on mettra un des bras ſur l'arête du lit & de la doële, l'autre donnera ſur le lit une ligne f^2 7, qui ſera verticale en œuvre, ſuivant laquelle on poſera la branche droite du biveau mixte 1, 2, 7, qui aura été formé au ceintre primitif ſur l'arc 1, 2, pour la branche courbe, & le joint 2, 7, pour la branche droite.

Il faut encore obſerver que la branche courbe doit être dirigée vers l'arête oppoſée de maniere qu'elle faſſe des angles égaux avec celle du lit de deſſus & celle du lit de deſſous, ce que l'on peut faire ſans peine lorſque la branche convexe du biveau eſt exactement égale à l'arc 1,2, parce qu'alors il n'y a qu'à la tenir de maniere que l'angle d'un côté & le bout de l'autre ſoient poſés ſur les côtés oppoſés de la doële. Par le moyen de la plumée qu'on fera avec ce biveau & l'arc de tête du trompillon, on formera la doële conique à la regle, comme nous l'avons dit au commencement du quatrieme livre, & cette ſurface rencontrant celle de la tour ronde qu'elle pénetre, formera la courbe à double courbure de l'arête de face, ſans qu'il ſoit néceſſaire d'en faire le développement pour en former un panneau flexible, comme font les Auteurs des livres de la coupe des pierres, ce qui n'eſt ni moins exact ni moins expéditif & qui eſt plus commode. L'avantage que l'on a encore dans cette conſtruction eſt qu'elle peut toujours avoir lieu, de quelque courbure (elliptique, ſurhauſſée, ou ſur-baiſſée) que puiſſe être le ceintre primitif.

Explication démonſtrative.

Pour réduire la voûte dont il s'agit à la régularité d'un cône

droit, proprement dit, lorſque le ceintre primitif eſt circulaire, ou droit, ſur une baſe elliptique, lorſqu'il eſt ſur-hauſſé ou ſurbaiſſé : nous avons décrit ce ceintre ſur un plan ſuppoſé perpendiculaire au triangle par l'axe du cône ASB, qui doit être ſuppoſé en ſituation verticale, & nous avons ſuppoſé d'autres plans verticaux paſſans par les diviſions des joints de lit, comme aux voûtes coniques ordinaires, auxquels nous avons ajouté l'excès compris dans le ſegment AEB, qui repréſente une portion de cylindre, ſuivant les principes que nous avons donné au livre III, page 357, pour la formation des figures irrégulieres, par l'inſcription ou la circonſcription des régulieres.

Pour faire ſentir l'avantage de l'inſcription plutôt que de la circonſcription, il n'y a qu'à faire remarquer que par ce moyen nous avons trouvé dans les lits un moyen de placer la branche du biveau mixte qui ſert à creuſer la doële, ce qu'on n'auroit pu faire après que la ſurface de la tour ronde a été formée, parce qu'alors la place du ceintre primitif auroit été enlevée. On voit que dans ce trait nous avons levé deux biveaux de plus qu'aux trompes coniques ordinaires, où l'on n'a beſoin que de biveaux de lit & de doële, & de tête & de doële. Ici nous en avons formé un troiſieme pour la poſition du biveau mixte, pour ſuppléer à l'arc qu'on décrit ſur les têtes planes, parce que celles-ci ſont courbes. Et enfin un quatrieme biveau pour tracer une ligne horiſontale ſur chaque pan de la tour ronde inſcrite dans un priſme, afin de pouvoir nous ſervir de l'arc horiſontal de la projection ou baſe de la tour.

SECOND CAS.

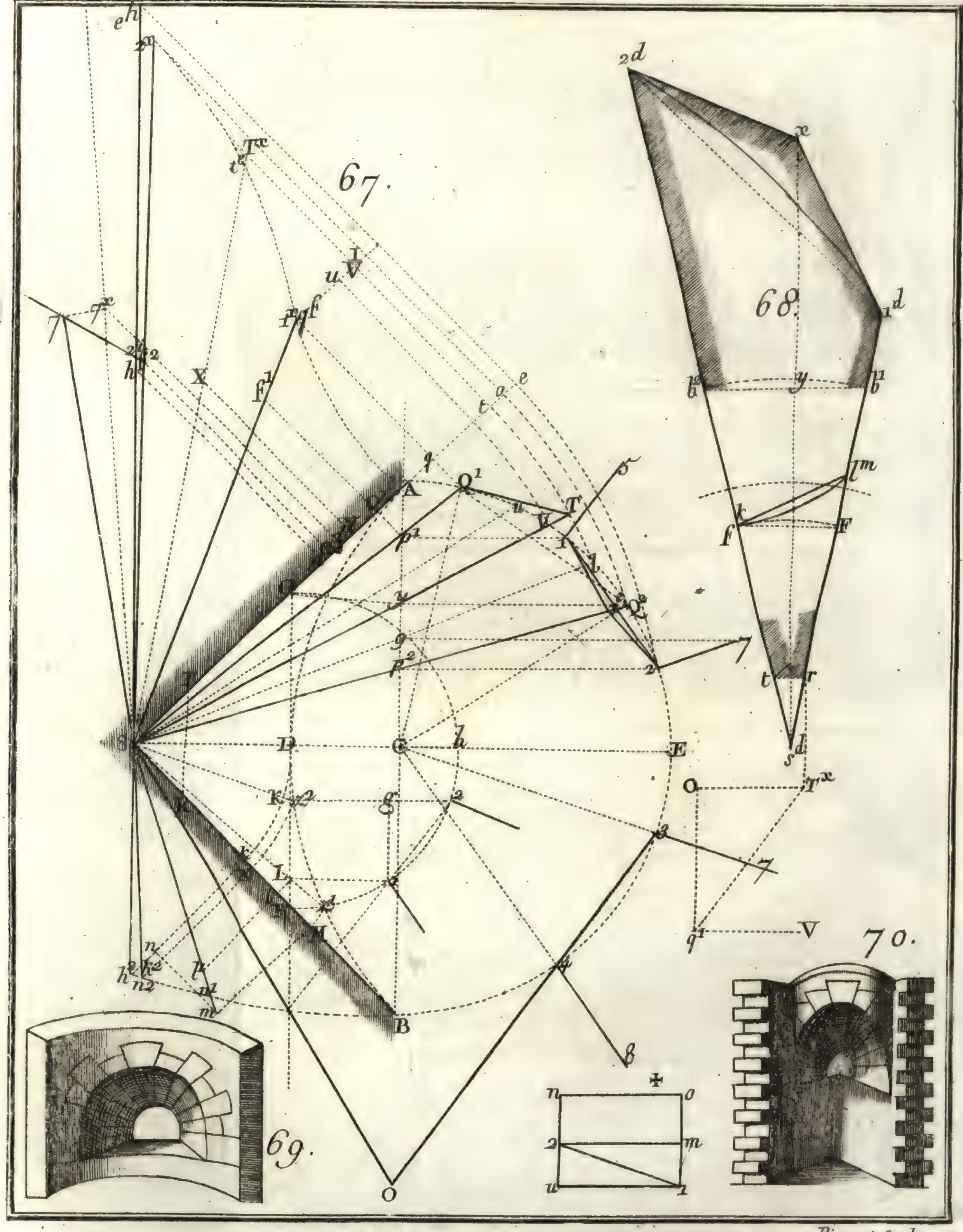
De la trompe conique rampante, en tour ronde ou creuſe.

La différence de ce trait au précédent conſiſte 1°. en ce que les impoſtes de la trompe ne ſont pas dans un même plan horiſontal comme dans la précédente, mais l'une eſt horiſontale & l'autre inclinée à l'horiſon. 2°. Que ſon axe eſt auſſi incliné à l'horiſon, d'où il ſuit que le diametre de toutes les ſections verticales par des plans perpendiculaires à la direction horiſontale de cet axe, ſont auſſi inclinées à l'horiſon; ainſi la courbe de l'arête de la doële avec la face du trait précédent eſt la rencontre d'un cône droit dont l'axe eſt

horisontal avec un cylindre vertical, & celle-ci est la rencontre d'un cône scalene de base Elliptique avec un cylindre vertical, ce qui fait si peu de changement à la construction qu'on auroit pu en renvoyer le détail à la précédente, si l'une ne servoit d'éclaircissement pour l'autre ; car il faut avouer que ces sortes de traits sont assez composés pour embarrasser le lecteur, & demander une grande contention d'esprit à ceux qui ne sont pas
Pl. 83, encore bien au fait. Soit donc (fig. 71.) ASB l'angle rentrant
Fig. 71. dans lequel on doit construire une trompe rampante en tour ronde, telle qu'elle est représentée en perspective à la fig. 75. Ayant divisé l'angle A S B en deux également par la ligne S H, qui coupera la projection du diametre A B en deux également en M, on prendra sur cette ligne S M, prolongée s'il le faut, le centre de la tour vers S, si elle est convexe, ou tout au plus jusqu'en M, comme à la trompe de Montpellier rampante, & vers H si elle est concave, selon que l'arc A D B sera grand ou petit, ou qu'il sera donné par la fleche D M ; on a supposé ici le centre de la tour en S pour plus grande simplicité du trait. La ligne S D sera la direction horisontale de l'axe de la trompe & sa projection, d'où il suit qu'elle sera plus courte que cet axe qui est incliné à l'horison.

Sur A B, comme base de l'élevation de la face, qui sera représentée renversée pour la commodité de l'épure, on élevera en B la perpendiculaire B R, égale à la hauteur du point B de l'imposte rampante S B, au dessus du point A de l'autre imposte de niveau, & l'on tirera la ligne A R, qui sera la ligne de rampe de l'arc de face représentée au plan horisontal par la ligne A B. On prendra ensuite sur S C prolongée la longueur C H égale à M A, ou plus ou moins grande, pour demi-diametre conjugué à A R, & par les points A, H, R on décrira la demi-ellipse A H R, qui sera le ceintre primitif ; on le divisera en ses voussoirs aux points 1, 2, 3, 4, ensorte que la clef, c'est-à-dire sa corde H 4, soit de niveau autant qu'il est possible.

Cette préparation, qui est particuliere à la trompe rampante, étant faite, le reste se fera de la même maniere que nous l'avons dit du trait précédent, avec cette seule différence, qu'au lieu de prendre les hauteurs des divisions du ceintre primitif sur son diametre rampant A R, on les prendra plus bas sur sa projection horisontale A B, aux perpendiculaires *d* 1, *e* 2, F 3, *g* 4, qui comprennent outre les ordonnées au diametre 4 *r*, 3 Q,



Picquet Sculp.

2 r^2, les hauteurs des points r, r^2, &c. sur l'horisontale B A, de sorte que l'on doit considérer la figure mixte A H R B comme le ceintre primitif composé d'une demi-ellipse A H R, & du triangle de rampe A R B. Comme les lettres de la figure de la projection horisontale sont relatives à celles des profils, il sera aisé d'y reconnoître la construction du trait précédent, sans qu'il soit nécessaire de la répeter. *Fig.* 71, 72, 73 & 74.

On a tracé à la fig. 72 un panneau de doële plate du troisieme voussoir, dont la projection horisontale est le triangle mixte S E^2 Y F^3 inscrit dans le trapezoïde S E^2 T F^3, où la ligne S T x est la valeur de la ligne S T de la fig. 71. On a aussi tracé à la fig. 73 le triangle S N f^3, qui donne l'angle S f^3 N, pour placer le bras droit du biveau mixte du lit & de la doële formé au ceintre primitif de l'angle mixte n 3 l 2, comme on a fait à la fig. 67, en S f^2 7. Enfin on a exprimé à la fig. 74 la maniere de tracer des horisontales sur les pans 2 u & u n^3, comme on a fait au trait précédent au-dessus du chiffre 70, & plus bas à la fig. ✠ pour le même sujet. On remarquera seulement ici qu'à cause de l'inégalité de la rampe, les pans à l'arête de la doële plate sont fort inégalement inclinés, ce qui n'arrive pas à celle de la trompe précédente.

Remarque sur cette construction.

Suivant la méthode de la réduction des corps ronds en polyédres, on se passe des panneaux de développement dont se servent le P. *Derand* & M. *de la Rue*, lesquels panneaux ne peuvent presque servir qu'à vérifier en partie ce qui a déja été fait ; car puisqu'ils sont faits sur des matieres flexibles comme du carton, des lames de plomb, &c. pour pouvoir être appliqués sur des surfaces courbes, ils les supposent déja faites, ce qui est cependant une partie de la question, puisqu'on cherche premierement le moyen de les faire pour y tracer l'arête de rencontre de la voûte conique.

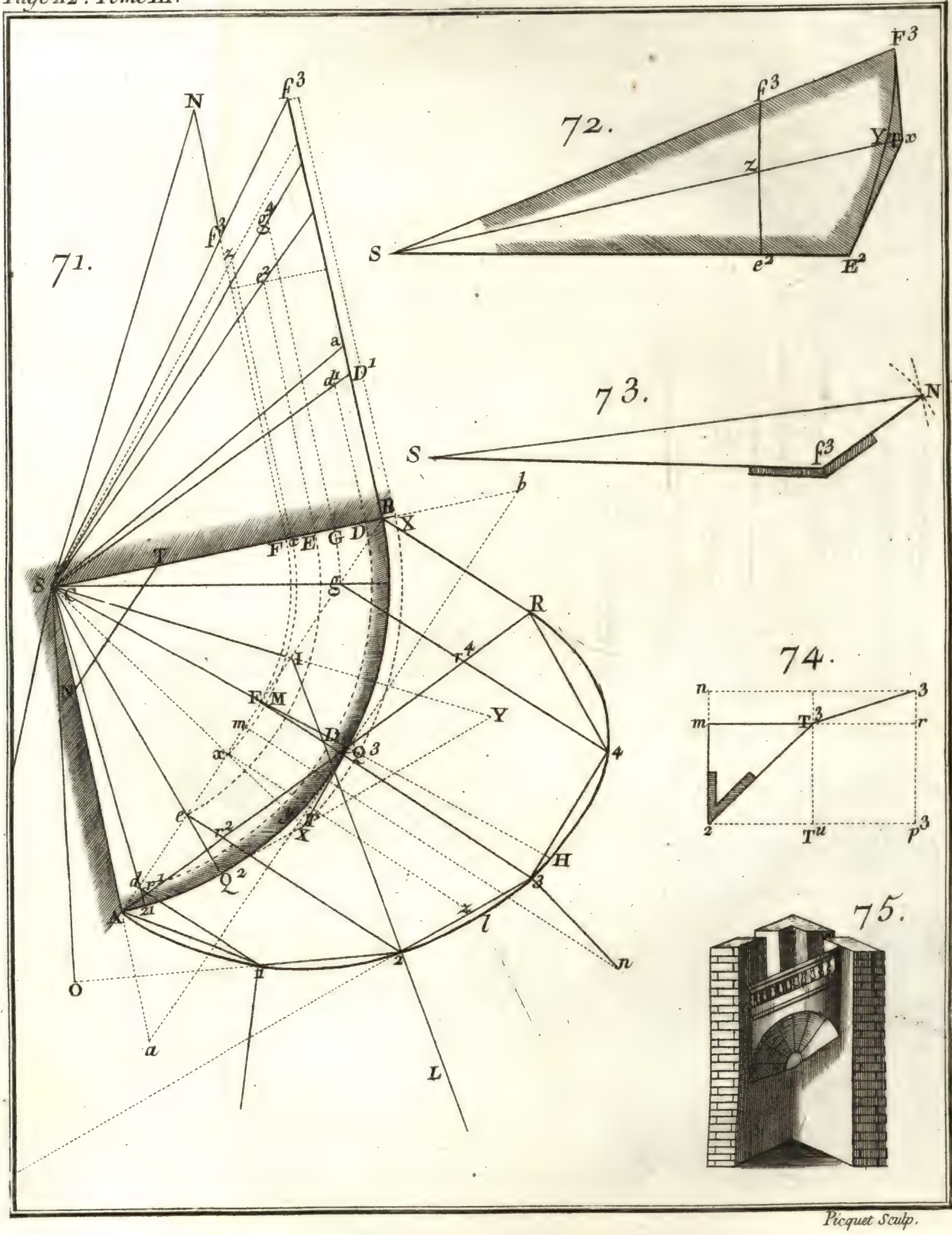
Troisieme Cas.

De la trompe conique rampante par son axe & par ses impostes, dont la base est renversée en situation horisontale ou inclinée, rachetant une tour creuse.

Premiere supposition, que la base du cône renversée est de niveau, représentée en perspective à la fig. 76.

Pl. 84, Fig. 76 & 78. Soit (fig. 78.) l'angle rentrant ASB, dans lequel on veut former une trompe renversée, qui serve de support à une tour creuse AMB, dont la base est de niveau, au lieu que dans les cas précédens elle étoit à plomb ceintrée. Ayant divisé l'angle ASB en deux également par la diagonale SC; on prendra sur cette ligne le point C, pour centre de la tour creuse, en tel endroit qui convient à sa grandeur; & de ce point C, on menera des perpendiculaires CA, CB aux côtés de l'angle donné SA, SB, pour y inscrire l'arc de base de la tour creuse AMB, lequel étant divisé en voussoirs aux points 1, 2, 3, 4, on menera par ces points des lignes droites au sommet de l'angle S, lesquels 1 S, 2 S, &c. seront les projections des joints de lit à la doële de la trompe. On décrira de même d'un point *c* pris à volonté sur la diagonale SC, un arc *fg*, terminé aussi par des perpendiculaires *fc*, *gc*, aux côtés des murs AS BS.

Présentement, pour avoir les véritables longueurs des joints de lit à la doële, on fera, comme à l'ordinaire, un profil pour chacun, mais dont la hauteur doit être commune à tous les voussoirs, au lieu que dans les autres elle étoit inégale à chaque voussoir. Cette hauteur SH est arbitraire, mais il est visible que plus elle sera grande à l'égard de l'horisontale du fond SM, plus la trompe aura de force pour soutenir la tour. On élevera sur AS, si l'on veut prendre cette ligne pour base de profil, la perpendiculaire SH, de la hauteur dont on voudra que la base de la trompe soit élevée au-dessus du point S de sa naissance, qui est le sommet du cône, & par le point H, on menera HÆ parallele & égale à AS, & l'on tirera la droite SÆ, qui sera la longueur d'une imposte, & son inclinaison le long du mur; ensuite on transportera la longueur S 1 en S*d*, & l'on menera D*d* parallele à SH. On portera de même la longueur S 2 en S*e*, & l'on tirera aussi *e*E parallele à SH, puis l'on menera par



Picquet Sculp.

par le ſommet S les lignes SE, SD, qui feront les longueurs des joints de lit en doële. Pour le trompillon, du point f on menera f F parallele à A Æ, & par le point F où cette ligne coupe SÆ, on menera FK parallele à Se, qui donnera les points G & I pour les angles des têtes des vouſſoirs appuyés ſur le trompillon, & l'épure ſera tracée.

Les *panneaux de doële* ſe feront, à l'ordinaire, de deux joints de lit à la doële & de la corde de l'arc de tête, dont on formera un triangle, par exemple, pour le premier vouſſoir, on portera à part, (fig 82.) la longueur du joint de l'impoſte S Æ en $s\,a^d$, puis du point s pour centre, & de l'intervalle SD de la fig. 78, on fera un arc en 1^d; & de l'intervalle de la corde A 1, pour rayon, & du point a^d pour centre, on fera un arc qui coupera le précédent au point 1^d, & l'on aura pour le premier panneau de doële le triangle $s\,a^d\,1^d$, dont on retranchera pour l'eſpace qu'occupe le trompillon, le triangle $s\,f^d\,g^d$, en portant SF de la fig. 78, en $s\,f^d$ de la fig. 82, & S G de la fig. 78, en $s\,g^d$ de la fig. 82; ainſi des autres vouſſoirs dont on a mis ici, en façon de développement, les panneaux de doële de ſuite, par où l'on voit que celui du milieu de la trompe, qui eſt la clef, eſt iſoſcelle $s\,2^d\,3^d$, ainſi que la projection S 2, 3 de la fig. 78. Les *panneaux de lit* ſont donnés par le profil en y ajoutant un angle droit pour le parement creux de la portion de tour qui s'appuie ſur la trompe: tels ſont les triangles S Æ H, SDH, SEH, dont les angles en Æ, D, E, ſont aigus, mais qui deviennent obtus, en y ajoutant l'angle droit; de ſorte que l'angle S Æ H ſe change en S Æ V, ainſi des autres qui deviennent de plus en plus obtus. A l'égard des petites têtes inférieures, il faudra prendre garde qu'elles ne ſoient pas trop obtuſes, parce que l'arête du trompillon deviendroit trop foible vers les impoſtes. *Fig. 78 & 82.*

On formera les *biveaux de tête & de doële*, & de lit & de doële, ſuivant la regle générale, en cherchant les ſections de la doële avec l'horiſon, de la tête avec l'horiſon, & du lit avec l'horiſon. Par exemple, pour le biveau de doële & de lit du ſecond vouſſoir S 1, 2; il eſt clair que la corde 1, 2, que l'on ſuppoſe dans un plan horiſontal ASB, eſt la ſection de la doële avec l'horiſon, mais non pas celle qui paſſe par le ſommet du cône S; ainſi en menant par ce point S une parallele SO indéfinie à la corde 2, 1 ou 3, 4, cette ligne SO ſera la ſection de la doële avec l'horiſon au plan horiſontal de la projection. Il eſt encore *Fig. 78.*

Fig. 78. clair, par les exemples des voûtes coniques ordinaires, que l'intersection des lits doit se faire suivant la diagonale SC, qui est la projection de l'axe du cône; ainsi l'on a tout ce qui est nécessaire pour trouver ce biveau. Pour le troisieme lit, par exemple, on prolongera la projection S 3 vers X^2. On élevera au point 3 la perpendiculaire 3, 3^h égale à *e* E ou S H; on tirera S 3^h, à laquelle on fera 3^h L perpendiculaire, qui rencontrera S X^2 au point L, par lequel on tirera la perpendiculaire O R^o, jusqu'à l'intersection de la ligne SO & de la diagonale SC; on portera L 3^h en L X^2, d'où on tirera les droites X^2 O, X^2 R^o, prolongeant cette derniere vers *y*; l'angle O X^2 *y* fera celui sur lequel on doit former le biveau de lit & de doële du joint qui passe par S 3.

Application du trait sur la pierre.

Ayant dressé un parement, on y appliquera le panneau de doële, & avec le biveau de lit & de doële on abattra la pierre en angle obtus; sur ce second parement on appliquera le panneau de lit qui lui convient, lequel donnera la position des joints de tête, entre lesquels on abattra la pierre pour former la tête de face creuse, par le moyen d'une cerche tracée sur l'arc A M B, posée d'équerre sur le parement creux & de niveau, ce qui se fera en la posant d'équerre aux arêtes des joints de tête. A l'égard de la tête du côté du trompillon, on la fera ou parallele à la premiere, ou perpendiculaire au joint de lit, alors elle devient conique concave, & le lit de dessus du trompillon, conique convexe. Si au lieu des biveaux de lit & de doële, on vouloit se servir de ceux de tête & de doële, il n'y auroit qu'à élever sur un point 4, par exemple, de la corde 4, 3, pris à volonté, une perpendiculaire 4 T prolongée jusqu'à la rencontre du plan de la doële avec l'horison à la ligne S O, & prendre sur cette corde 4, 3, prolongée en *z*, la ligne 4 *z*, égale à la hauteur *d* D, & tirer *z* T; l'angle T *z u* sera celui du biveau de tête & de doële, avec lequel on peut se passer de celui de lit & de doële pour tracer la pierre, comme dans le cas précédent de la trompe rampante.

Explication démonstrative.

Fig. 77. Pour se former une idée nette & géometrique de cette espece de trompe, il faut jetter les yeux sur la fig. 77, où est

représenté un cône scalene renversé *a n b m s*, dont la moitié *s m a b s* sert de support à une portion cylindrique *d e f*; mais comme ce demi-cône & ce demi-cylindre sont dans le vuide, il n'en reste que les surfaces adhérentes au massif de pierre compris & soutenu par les murs qui forment l'angle rentrant *a h b*, avec lesquels il commence à faire corps depuis les impostes *s a* & *s b*. Le profil ou la section de ce massif, passant par l'angle des murs & le côté le plus court du cône *s m*, est le triangle *h m s*. Cela supposé, il sera facile d'expliquer la construction de la trompe; car en supposant les lignes des impostes ou naissance *s a*, *s b*, en situation horisontale, au lieu de l'inclinée, on reconnoîtra que cette trompe peut être considérée comme une trompe conique de direction droite & de face inclinée en talud beaucoup plus grand que celle dont il est parlé au second tome, page 250, laquelle face étant couchée de niveau, devient la base d'une portion de tour creuse de beaucoup ou de peu de hauteur, quand ce ne seroit que le socle d'un balcon. Il est même de nécessité indispensable que la naissance de cette tour soit unie, & ne fasse qu'un corps avec la doële conique, parce que l'arête de la doële de la trompe avec cette face renversée deviendroit trop aiguë pour avoir la force nécessaire à l'usage de servir de support.

Il faut encore observer que la même jonction de la trompe avec la base de la tour creuse, se doit aussi faire dans les lits qu'il faut prolonger de la trompe à la tour, ce que l'on peut faire de deux manieres; ou en continuant la même surface du lit, auquel cas elle coupe la base de la tour obliquement par des joints inclinés, qui sont des portions d'ellipses; ou en faisant un angle dans le lit pour reprendre la direction verticale du joint montant de la tour, ce que l'on peut faire facilement en se retournant d'équerre sur les bouts des cordes de l'arc horisontal *a m b*; mais alors si l'on veut donner aux pierres de la tour la coupe qui leur est naturelle, on ne le peut qu'en faisant un ressaut du lit au joint montant.

Il nous reste à rendre raison de la pratique qu'on vient de donner pour trouver le biveau de doële conique & de tête cylindrique. Il faut relever par la pensée le triangle rectangle T 4 *z* en situation verticale sur le plan horisontal O S B, en le faisant mouvoir autour de son côté T 4, immobile dans ce plan, jusqu'à ce qu'il lui devienne perpendiculaire; en cet état la ligne 4 *u* sera une verticale dans le plan 4 *z* T, lequel est par conséquent *Fig.* 78.

aussi vertical; or parce que la ligne T 4 est, par la construction, perpendiculaire à la ligne 4, 3, qui est l'intersection d'un plan horisontal dans lequel est la base du cône renversé, avec le plan incliné de la doële plate passant par la corde 4, 3, il suit que les lignes T z & z 4 sont perpendiculaires à cette commune section 4, 3, dont leur ouverture est l'angle d'inclinaison des plans de la doële plate conique & d'une autre plane circonscrite à la cylindrique verticale passant par la même corde, parce qu'on a pris le supplément à deux droits T z u; *ce qu'il falloit démontrer.*

Seconde espece de trompe renversée, lorsque la tête est rampante.

Fig. 78 & 79. Supposant la même projection horisontale que pour la trompe renversée de niveau, & la même inclinaison d'une imposte S Æ, nous nous servirons de la fig. 78, à laquelle nous ajouterons la partie 79, qui est nécessaire pour trouver les ralongemens des joints de lit. Ayant tiré la corde A B de l'arc donné A M B, on élevera au point A la perpendiculaire A R, égale à la hauteur où la trompe doit monter depuis le point B jusques sur A, & l'on tirera la ligne de rampe B R: ensuite par les points 1, 2, 3, 4, des divisions des voussoirs sur l'arc horisontal A M B, on menera des perpendiculaires à la corde A B, prolongées jusqu'à la ligne de rampe B R, comme 4 *n*, 3 *p*, 2 Q, 1 *r*, & par les points *n*, *p*, Q, *r*, on menera des perpendiculaires à la ligne de rampe *n* 24, *p* 23, Q 22, *r* 21, sur lesquelles on portera les longueurs N 4, P 3, Q 2, K^a 1, qui donneront les points 21, 22, 23, 24, par lesquels on tracera l'arc elliptique B *m* R, qui sera la base inclinée de la trompe rampante, sur laquelle s'élevera sa tête ou face en tour creuse, si l'on veut, ou en voûte hélicoïde. Mais dans cette derniere construction il faut y faire un changement dont nous parlerons à la fin de ce livre. Nous considérerons seulement ici cette base comme plane; je veux dire, dont le contour est dans un plan incliné.

Ayant prolongé indéfiniment les lignes des hauteurs A Æ, *d* D, *e* E, qui étoient toutes égales dans la trompe précédente, on portera sur chacune la hauteur que la rampe y ajoute, savoir, sur A Æ, la hauteur A R du point Æ en a^2, sur *d* D, la hauteur K^a *r* du point D en d^2, la hauteur Q *q* de E en e^2, la hauteur P *p* de E en 3e, & la hauteur N *n* de D en 4e. Les lignes S a^2, S d^2, S e^2, S 3e, S 4e, S Æ, seront les vraies longueurs des joints de lit depuis le sommet S, dont on retranchera celles du trom-

pillon αy F, qui est tout d'une piece, & dont la tête sera proportionnelle & parallele à la base inclinée de la trompe. *Fig. 78 & 79.*

Présentement si l'on veut faire les panneaux de doële plate & son développement, on le peut commodément dans la même figure; sur S A prolongée, ayant pris S b^d égal à S Æ, pour base du triangle de la doële du premier voussoir, du point S pour centre, & de l'intervalle S 4e, longueur du second joint, pour rayon, on décrira un arc de cercle 4e 4^d, & du point b^d pour centre, & de l'intervalle B 24 ou R 21, corde du premier arc, on décrira un arc 1 4^d, qui coupera le précédent au point 4^d. De même, faisant du point 3e, jusqu'en D un arc avec le rayon S 3e, & du point 4^d pour centre, un autre arc avec la corde 2^1 2^2, ou ce qui est la même chose 2^4 2^3 pour rayon, on fera un arc qui coupera le précédent au point D, le triangle S D 4^d sera le second panneau de doële plate; ainsi des autres de suite, comme la figure le montre depuis le point b^d jusqu'en A^d.

Les biveaux de lit & de doële, & ceux de doële & de tête se trouveront, comme aux trompes coniques rampantes dont la face est verticale, en faisant un ceintre de face supposé sur une section verticale qui sera elliptique, dont les points principaux sont donnés sur la projection verticale, savoir, m^2 pour le sommet, Y pour l'imposte inférieure, x pour la superieure, de même que les points des intersections des joints de lit avec la courbe de ce ceintre, ce que l'on n'a pas fait dans cette figure pour ne la pas embrouiller, d'autant plus que cette espece de trompe est très-peu d'usage; nous nous contentons d'indiquer le moyen de la réduire aux regles des trompes rampantes ordinaires, pour trouver la section des doëles plates avec l'horison, & par conséquent les biveaux des lits & de ces doëles.

Remarque sur l'usage.

La premiere espece de trompe, dont la tête de face est de niveau, peut servir à racheter une voûte sphérique *ab ab* (fig. 80 & 81.) sur un quarré *s s s s*, parce que tous les arcs horisontaux de cette surface sont tangens aux murs *s s* sur lesquels elle est appuyée, ce qui rend cette jonction agréable à la vue, ou pour porter une balustrade de dégagement au plafond d'un escalier ouvert en rond dans son milieu sur une cage quarrée, comme on voit fig. 81; mais la même trompe simplement ram- *Fig. 80 & 81.*

pante ne peut ſervir à racheter un berceau rampant & tournant, comme le prétend le P. *Derand*, ſans y faire de changement, comme nous le dirons en ſon lieu.

Troiſieme ſituation des voûtes coniques à l'égard des cylindriques, lorſque les axes des deux voûtes ſont horiſontaux.

EXEMPLE.

Lunette ébraſée, trompe ou abajour qui rachete un berceau de niveau.

Plan. 85. Fig. 83. Soit, fig. 83, l'angle rentrant A S B, la baſe horiſontale d'une voûte conique qui pénetre un berceau de niveau, dont l'arc vertical C R eſt une partie de l'arc droit. Sur A B, comme diametre, on décrira, à l'ordinaire, un demi-cercle pour ſervir de ceintre primitif; nous n'en mettons ici que la moitié B*h* pour ne pas trop embrouiller ce trait, parce que ſuppoſant l'axe du cône S C droit ſur ſa baſe A B, une moitié de ſa baſe circulaire ou elliptique ſera égale à l'autre. Ayant diviſé le quart de cercle B *h* en ſes vouſſoirs, comme ici en deux & demi pour cinq vouſſoirs, aux points 3, 4, & ayant abaiſſé ſur ſa baſe A B des perpendiculaires qui la couperont aux points T, V, on menera par ces points & par le ſommet S, des lignes S T, 3^l, S V 4^l, prolongées au-delà de T & V indéfiniment; ces lignes feront la projection horiſontale des joints de lit, dont on déterminera la longueur par le moyen du profil qu'on fera comme il ſuit. Ayant prolongé l'axe S C indéfiniment vers *e*, on prendra ſur cette ligne, à volonté, un point C, duquel comme centre, & pour rayon C A ou C B, on répétera une moitié du ceintre primitif en *b* A, portant ſes diviſions B 4, 43 en *b* 1^4, & 1^4 23, par leſquels on menera des paralleles à la baſe *e* C, juſqu'à la rencontre de la perpendiculaire C D, qui la couperont en F & en G; enſuite du ſommet S & par les points F & G, on menera des lignes S G, S F, prolongées juſqu'à la rencontre de l'arc du berceau C R, l'une en K, & l'autre en M. On prolongera auſſi S A en N; les lignes S K, S M feront les projections verticales des joints de lit des diviſions 3, 4 du ceintre primitif, & de leurs deux correſpondantes & égales, leſquelles ſerviront à déterminer les longueurs des projections horiſontales; car ſi par les points K & M on mene des paralleles à A B, comme K 4^l, M

76.

79.

81.

77.

80.

78.

82.

Picquet sculp.

3^l, elles couperont les projections horisontales des mêmes joints *Fig.* 83.
aux points 4^l 3^l; ainsi S 3^l est la projection horisontale dont SM est la verticale, & S 4^l est celle du même joint de lit dont SK est la verticale ; or ni l'une ni l'autre de ces projections n'est égale au véritable joint de lit, mais elles servent à les trouver dans un second profil, comme nous l'avons expliqué en parlant des trompes.

Soit une ligne droite placée à volonté S o^b prise pour base du second profil, on portera sur cette base la longueur ST en S t, & S 3^l en S 3^b, de même SV en Su, & S 4^l en S4^b, & par les points t, u, 3^b, 4^b, on élevera des perpendiculaires, sur lesquelles on portera les hauteurs correspondantes à ces points, savoir, T 3 en $t f^3$, V 4 en $u f^4$, & par les points S, f^3, on menera la ligne Sf 3^x, qui coupera la perpendiculaire 3^b 3^x au point 3^x; la longueur S 3^x sera celle du vrai joint de lit : de même Sf prolongée donnera S 4^x pour le vrai joint de lit, dont la projection est S 4^l. Tous les joints que nous avons cherchés jusqu'à présent ne sont qu'à la doële, & suffisent bien pour faire les panneaux de doële plate ; mais pour former les panneaux de lit, qui donnent aussi les joints de tête, il faut faire un extrados E 8 7 e, & chercher les projections de ses joints qui doivent passer par les points 7, 8, de la même maniere que nous l'avons fait pour l'intrados Bh, ce que nous ne répeterons pas, parce que la figure & la quantité de pareils exemples qu'on a donné paroissent suffire. Ayant trouvé les projections X 7^l X 8^l, qui donnent pour projections des surfaces des lits les trapezes S 3^l 7^l X & S4^l 8^l X, on ne cherchera pas les longueurs des côtés X 7^l, X 8^l, mais les diagonales S 7^l, S 8^l; pour cet effet on les portera sur la base du second profil So^b en S 7^b, S 8^b, & ayant porté leur hauteur prise au premier profil en Oo, Ll sur les perpendiculaires 7^b 7^x & 8^b 8^x, on aura les points 7^x 8^x, les lignes S 7^x, S 8^x seront les diagonales cherchées.

Avec les trois lignes données pour les panneaux de doële, savoir les deux joints de lit & la corde d'une division du ceintre primitif, on parviendra à former la doële plate ; & avec les trois autres pour les panneaux de lit, savoir un joint de lit, une distance du sommet de la trompe à l'extrêmité de la tête à l'extrados, & l'intervalle de la doële à l'extrados au ceintre primitif, on parviendra à former les panneaux de lit. Premierement, pour les *panneaux de doële plate*, par exemple, pour un second voussoir au-dessus de l'imposte marqué 4, 3 (fig. 83, on

Fig. 83 & 84. prendra au profil la longueur Sf, ou, ce qui eſt le même, dans la trompe droite Sf, avec laquelle pour rayon, & d'un point s^d (fig. 84) pour centre, on fera un arc 3^f 4^f, dans lequel on inſcrira la corde 3, 4 du ceintre primitif, & l'on tirera les lignes s^d 3^f, s^d 4^f, ſur leſquelles étant prolongées, on portera les longueurs S 3^x, S 4^x du profil en s^d 3^x, s^d 4^x, la ligne 3^x 4^x ſera la tête biaiſe de la doële plate. Il ne reſte plus, pour achever cette doële qu'à y placer la tête 3^n 4^n du trompillon, ou de la ſection d'un mur, s'il s'agit d'une lunette, comme à la fig. 86, priſe à la fig. 83 en 3^n 4, pour en retrancher le triangle iſoſcele s^d 3^n 4^n, en faiſant un arc avec le côté S A^t pour rayon, qui coupera les côtés s^d 3^x, s^d 4^x en 3^n 4^n; le trapezoïde 3^n 3^x 4^x 4^n ſera le panneau que l'on cherche.

Préſentement pour y ajouter *les panneaux de lit* en développement, on prendra (fig. 83) la partie de la diſtance du ſommet S à l'extrados dans le cône droit inſcrit, qui eſt Sf^7 au profil, ou Sf^8, avec laquelle pour rayon & du point s^d de la fig. 84, pour centre, on fera un arc en fg, & de l'intervalle 3, 7 du ceintre primitif, pour rayon, & du point 3^f pour centre, on décrira un arc qui coupera le précedent au point f, par lequel & par le point s^d, on menera la droite s^d 7^x, qu'on fera égale à S 7^x du profil, & par les points 7^x & 3^x, on tirera une ligne qui ſera la corde de l'arc elliptique, qui eſt la ſection du plan du lit de la trompe dans le berceau qu'elle rachete, & ſi l'on tire la ligne 7^x 7^n parallele à 3^x 3^n, & 7^n 3^n parallele à f 3^f, on aura le trapeze 7^x 7^n 3^n 3^x, qui ſera le panneau de lit que l'on cherche. Par la même maniere on trouvera celui du lit de deſſous 4^n 8^n 8^x 4^x, comme il eſt aiſé de le concevoir par les ſignes rélatifs à ceux du profil.

Application du trait ſur la pierre.

On pourroit exécuter ce trait par des vouſſoirs à branche d'enfourchement, comme nous avons fait ceux de la rencontre d'un berceau en deſcente avec un berceau de niveau; il ſera facile d'en appercevoir la poſſibilité en comparant ce que nous avons dit page 61 avec l'épure de ce trait. Les reins de la voûte en berceau en ſeroient même mieux apuyés & mieux liés à la trompe; mais pour varier un peu les conſtructions, nous en donnerons ici une où il n'eſt pas néceſſaire de chercher le bi-

veau

veau d'inclinaiſon des deux doëles plates à l'enfourchement, comme au trait cité. On formera un panneau de lit de fauſſe coupe incliné à l'horiſon, mais perpendiculaire au plan vertical, paſſant par l'axe de la trompe SC, qui aura ſa tête de niveau, pour y pouvoir appliquer les biveaux mixtes des joints de lit en profil avec l'arc droit du berceau de niveau. Par exemple, pour former celui du ſecond vouſſoir 3, 4, qui eſt déſigné par une tête 4R, parallele à AB, & compriſe entre les à-plombs de doële 4V & d'extrados 8 *u*; ſi le cône inſcrit eſt droit, ce panneau ſera un triangle qui pourra toujours avoir pour un de ſes côtés la longueur de l'impoſte SA ou SB; ſi le cône n'eſt pas droit circulaire, mais que le ceintre primitif ſoit elliptique, on cherchera la valeur des projections par des profils; ayant porté SV en S*o*, on lui fera la perpendiculaire $o\,4^o$ égale à 4V, la ligne $S\,4^o$ ſera la valeur cherchée. De même ſur S*u*, projection de l'extrados 8, on élevera une perpendiculaire $u\,8^o$ égale à la précédente 4V ou R*u* : avec ces deux longueurs, & l'intervalle horiſontal 4R ou V*u*, on fera (fig. 85) un triangle $s^o\,4^u\,8^u$ dont on fera uſage comme nous allons le dire. *Fig. 83.*

Ayant dreſſé un parement pour y placer le panneau de doële plate $3^n\,3^x\,4^x\,4^n$, fig. 84, on y en tracera le contour & les points de répaire de la tête du cône droit inſcrit $3^f\,4^f$. On formera enſuite le lit de deſſus avec le biveau de lit & de doële trouvé, comme il a été dit au tome précédent, au trait de la trompe droite, page 227. On appliquera ſur ce ſecond parement le panneau du lit de deſſus $7^n\,7^x\,3^x\,3^n$, avec les points de répaires du cône droit inſcrit $f\,3^f$, pour en tracer le contour & y marquer ces points. Enſuite, au lieu de former le vrai lit de deſſous, on formera le faux lit, en abbattant la pierre avec le biveau 3, 4R, (fig. 83) dont une des branches ſera poſée ſur les repaires $3^f\,4^f$, & l'autre ſera d'alignement avec ces deux points & le répaire du lit de deſſus *f*; ainſi on formera un troiſieme parement ſur lequel on appliquera le panneau $4^u\,u\,s^o$ de la fig. 85, poſant le point 4^u ſur l'arête 4^f, & la ligne $4^u\,s^o$ au long de la même arête pour tracer la ligne $u\,4^u$, à laquelle on menera, par le point 4^x du panneau de la doële plate, une parallele qui ſervira à la poſition du biveau mixte SKQ du prémier profil, qui eſt l'angle du joint de lit SK avec l'arc droit du berceau KQ. *Fig. 84 & 85.*

Par le moyen de ce biveau, qu'on poſera quarrément ſur cette ligne, qui eſt en œuvre une horiſontale, on formera la doële

concave du berceau, en creusant, suivant la branche courbe convexe, une plumée au point 4^x qui est le plus bas, & si l'on veut, une seconde à côté, tirant vers l'extrados, qui donnera un second arc parallele au premier; ensuite on abattra la pierre suivant ces plumées, avec la regle posée d'équerre, qu'on fera couler sur les points 8^x, 3^x, 7^x, comme l'on a coutume de faire les segmens cylindriques, & la tête sera formée au lit de dessus sans en avoir connu la courbe. On abattra ensuite le faux lit avec le biveau de lit inférieur & de doële, qui coupera cette surface cylindrique suivant un arc elliptique qui se formera aussi sans l'avoir connu. On auroit cependant pu les tracer, comme l'on a fait les joints de tête du berceau en descente qui en rachete un de niveau, page 63, mais on peut s'en passer, comme l'on voit, & opérer avec exactitude. Enfin avec le biveau mixte 3, 4, 8, ou 4, 3, 7, pris à la face du ceintre primitif, & le biveau 7^3 3^n 4^n, ou 7^4 4^n 3^n pris sur l'arc A^t h B^t du trompillon, on creusera les deux têtes de la doële conique sous la doële plate, observant exactement de poser ces biveaux, l'un sur les trois repaires f $3f$ $4f$ (fig. 84), l'autre sur les lignes 7^n 3^n 4^n, pour y faire des plumées creuses, sur lesquelles on fera couler la regle pour former la surface conique, comme il a été dit au commencement du second tome, pour la formation de ces sortes de surfaces.

Fig. 84 & 85.

Explication démonstrative.

La formation de la voûte conique est visiblement la même que celle des simples, dont il a été parlé au tome précédent, par le moyen d'une pyramide inscrite dans le cône; mais comme la tête ou arête de face de cette voûte est à double courbure, nous avons inscrit au-dedans un cône droit, au-delà duquel est une partie saillante qui est bien déterminée par la projection verticale faite sur un plan parallele à l'axe du cône, mais non pas les longueurs des joints de lit qui y sont comprises, parce que leur direction étant inclinée à l'axe d'où elles tirent leur origine au sommet du cône, cette projection ne suffit pas pour en déterminer les longueurs; c'est pourquoi on est obligé de faire un second profil, qui donne la valeur des joints de lit jusqu'à l'arête d'enfourchement; d'où retranchant la partie du cône droit inscrit, le reste est l'excès de la voûte sur la trompe droite simple.

USAGE.

Quoique ce trait ne tombe pas ſouvent en pratique pour les trompes, il eſt très-fréquent pour les lunettes, qu'on fait ſouvent ébraſées pour donner ou recevoir plus de jour, comme dans les nefs des égliſes au-dedans des vitraux. On en voit de pareilles auſſi dans les fortifications, comme dans les noyaux des tours baſtionnées du Neuf-Briſack, où le magaſin à poudre qui y eſt pratiqué eſt éclairé par une lunette conique ſur-baiſſée, laquelle rachete le berceau du ſouterrein qui tourne par pans autour du noyau.

Nous devons ajouter ici une obſervation ſur le changement qui doit arriver lorſque la voûte conique eſt dans une ſituation contraire à celle du trait précédent, c'eſt-à-dire lorſque le ſommet du cône, qui étoit au-dehors du berceau en S, eſt au-dedans, par exemple en S^x, alors l'ébraſement qui ſe faiſoit du dehors au-dedans, ſe fait au contraire du dedans au dehors, comme ſont quelquefois les abajours. Il réſulte de cette différence de poſition du cône, que ſuppoſant toutes choſes égales, il faut que la projection de l'arête d'enfourchement, & par conſéquent l'arête même, ſoit faite en ſens contraire, tournant en concave ce qui étoit convexe, parce qu'au lieu que la clef étoit alongée de la quantité A N, elle ſe trouve ici racourcie de la quantité A 9, dont la projection *g* C eſt moindre que C*n*, quoique l'on ſuppoſe le cône égal; dans ce cas il ſemble qu'il convient d'opérer par circonſcription, en faiſant paſſer le cône droit par les impoſtes A B, qui ſont plus longues que la clef. *Fig.* 83.

Si l'on fait attention au trait dont il s'agit, tant dans l'un que dans l'autre cas, on reconnoîtra qu'il a déja été donné ci-devant, & ſous un autre nom, lorſque nous avons parlé de la rencontre des cônes avec les cylindres verticaux; car ſi au lieu de conſiderer le berceau comme horiſontal, on le ſuppoſe dans une ſituation verticale, on reconnoîtra que l'arc C Q*t*, qui étoit un profil, devient ſans aucun changement intrinſeque le plan horiſontal, & que le point N, qui eſt ici le profil du milieu de la clef, devient une des impoſtes; de ſorte que le premier cas, où la clef étoit convexe à ſon arête d'enfourchement, devient le ſecond dont nous venons de parler, où la même arête eſt concave.

Quatrieme ſituation des voûtes coniques à l'égard des cylindriques, lorſque les axes ſont inclinés à l'horiſon.

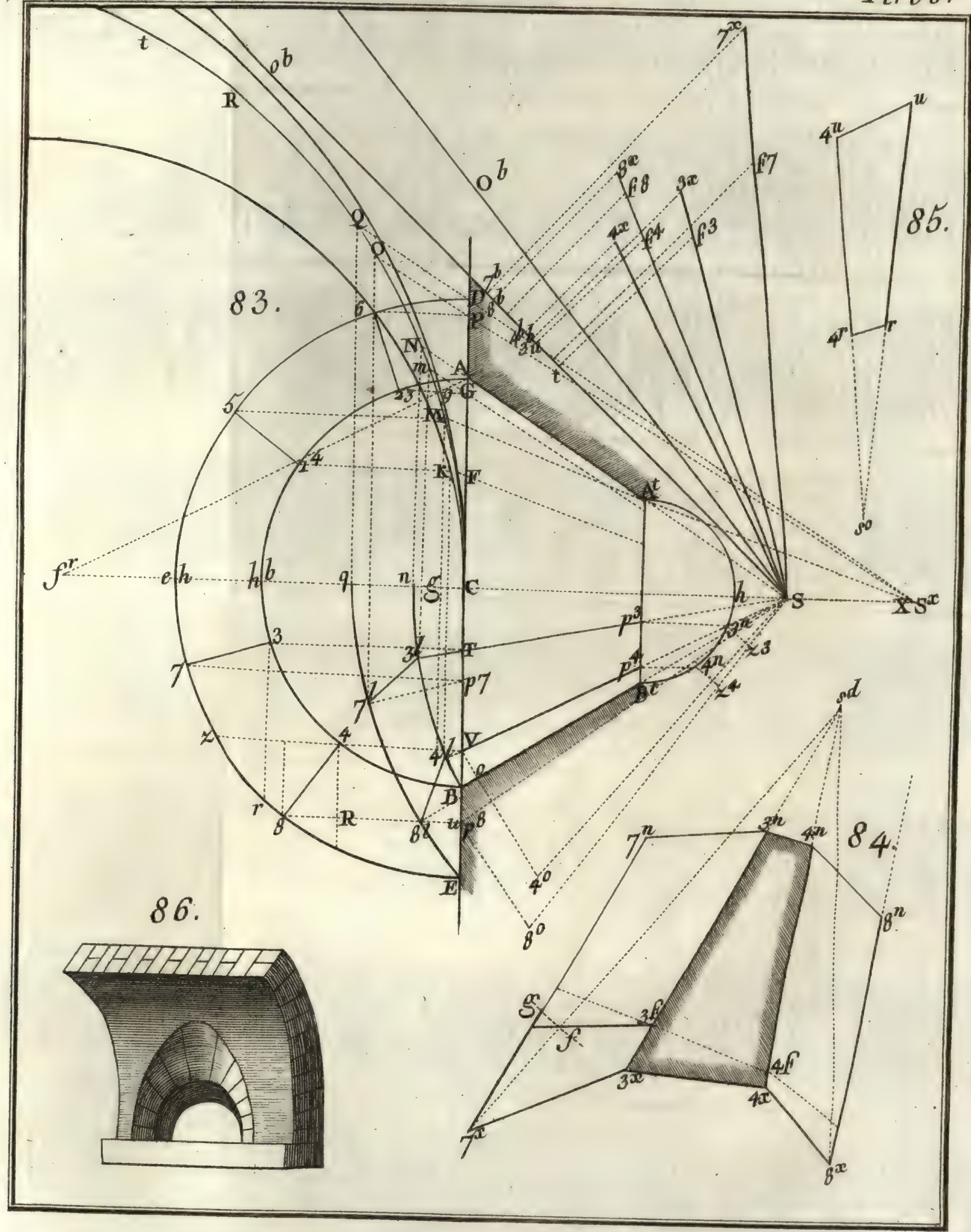
EXEMPLE.

Trompe conique biaiſe, dans un angle obtus, rampante par une impoſte & de niveau à l'autre, rachetant un berceau en deſcente.

Il ſemble, par l'énoncé de ce trait, que j'imagine des difficultés bizarres qui ne peuvent être d'aucun uſage dans la pratique; cependant j'ai eu occaſion de l'exécuter dans une petite lunette, où la deſcente ſouterraine au foſſé eſt extrêmement oblique à la direction de l'entrée d'un petit magaſin pratiqué dans l'épaiſ-
Plan 86. *Fig.* 88. ſeur du rampart, comme il eſt exactement exprimé à la fig. 88. J'ai dit que j'avois eu occaſion de mettre ce trait en œuvre, & non pas que je l'aye fait, parce que je n'ai fait les voûtes que de briques au lieu de pierre de taille, qui auroit cauſé une dépenſe inutile, dans un endroit ſi peu fréquenté; mais comme la brique n'eſt pas commune par-tout, il peut arriver qu'on ait beſoin d'en faire en pierre de taille, au moins l'arête d'enfourchement.

Fig. 87. Soit (fig. 87) l'angle obtus A S B, dont les côtés inégaux A S, B S ſont terminés en A & B par le piédroit G D d'un berceau G F E D, qui deſcend de D vers G. Il s'agit de voûter le renfoncement triangulaire A S B de maniere que ſa voûte appuye & rachete celle du berceau, ce qu'on ne peut mieux faire que par une trompe conique biaiſe, dont l'impoſte S A doit être rampante de S vers A de toute la quantité A*r* = A R, de la deſcente du berceau depuis B vers A, que nous avons exprimé par A R; enſorte que ſi l'on ſuppoſe les triangles S A*r* & B A R, qui ſont ici dans le plan du papier, ſe mouvoir autour de leur côté S A & B A juſqu'à ce qu'ils lui ſoient perpendiculaires, les points R & *r* ſe réuniront ſous A, & les lignes A*r* & A R n'en feront plus qu'une à plomb. J'ai dit qu'il falloit que la ſeule impoſte S A fût rampante, parce qu'il convient que l'impoſte S B, qui doit ſervir de linteau à une porte I K, ſoit de niveau.

Ayant donc fait au point A, qu'on ſuppoſera de niveau avec B, une perpendiculaire A R égale à la différence de niveau que donne la deſcente depuis B vers A; on tirera R B qui repréſentera l'impoſte de la deſcente du berceau, laquelle R B doit être priſe pour le diametre du ceintre primitif de la trompe, lequel



Picquet Sculp.

doit ramper comme l'imposte du berceau. Il faut présentement chercher le demi-diametre vertical C H de ce ceintre, pour lui *Fig.* 87.
donner la plus grande hauteur qu'il est possible, afin d'appuyer solidement les reins du berceau, échancrés par la rencontre de la trompe. On divisera A B en deux également en P, & l'on tirera P C perpendiculaire sur A B, qui coupera R B aussi en deux également en C. Par les points S & P on tirera la droite S*q*, qui coupera les impostes du berceau en descente, l'une en P, l'autre en *q*; la partie P*q* seroit le diametre d'une section elliptique du berceau, s'il étoit de niveau; mais comme il monte de A vers B, si l'on tire *q g* perpendiculaire sur A B, on reconnoîtra que le point *q* doit être au-dessus de P d'une quantité proportionnelle à la distance de P à *g*, en disant B A . A R :: B*g*. *g x*; ainsi ayant fait la ligne *q* Q égale à *g x* & perpendiculaire sur P *q*, on tirera P Q, qui sera le diametre rampant de la section du berceau coupé par un plan vertical passant par le sommet S de la trompe & par le milieu de sa clef.

Si l'on suppose le berceau en plein ceintre D V E à sa section verticale, le demi diametre C V donnera celui de l'ellipse à faire sur P Q; ainsi avec les deux diametres conjugués PQ & C V transportés en C L, & l'angle P C L que fait le diametre rampant PQ avec la verticale M L, on décrira la demie-ellipse PLQ, par le probl. 8 du second Livre. Soit donc P T L le quart de cette ellipse, on élevera sur S P, au point S, une perpendiculaire S *m* égale à C P, & (par le probl. III. du même Livre) on tirera de ce point *m* une tangente au quart d'ellipse P T L qui le touchera au point T, par où l'on abaissera une perpendiculaire sur S *q* qui la coupera au point Y; la longueur P Y exprimera la plus grande profondeur de la lunette dans le berceau suivant la clef de la trompe. Si du point P on éleve une perpendiculaire sur P *q*, jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne *m* T en *h*, la ligne P *h* sera le demi-diametre vertical du ceintre primitif de la voûte que l'on cherche.

Avec le grand diametre rampant R B, le demi-diametre vertical C H, qui doit être égal à P *h*, & l'angle de la descente R avec l'à-plomb C H, on décrira (par le probl. 8 du second Livre) la demie-ellipse R H B, dont on fera le ceintre primitif de la trompe. L'ayant divisé en ses voussoirs, par exemple en sept, aux points 1, 2, 3, 4, 5, 6, on abaissera de ces points des perpendiculaires sur A B, lesquelles étant prolongées, coupe-

ront le demi diametre rampant aux points o^1, o^2, o^3, &c. & l'horisontale A B aux points p, p, p, &c. par lesquels & par le point S on tirera autant de lignes jusqu'à la rencontre de l'imposte opposée du berceau F E, pour avoir autant de diametres des sections du berceau qu'il y a de joints de lit à la trompe; lesquels diametres doivent tous être rampans, les uns en montant les autres en descendant, ce qu'il est facile de connoître en tirant du point S, sommet de la trompe, une ligne S N perpendiculaire aux côtés du berceau; les sections obliques faites par les joints de lit de la trompe prolongés, seront en descente depuis O vers X, & en montée depuis O vers C''.

Fig. 87.

Pour trouver facilement la quantité dont chacune de ces ellipses doit ramper, on menera par le point O une ligne r O b parallele à R B, & par tous les points m^1 m^2 m^3, &c. où les projections des joints de lit prolongées coupent la ligne du milieu X C'', on lui menera des perpendiculaires qui couperont la ligne de rampe r O b aux points z^1, z^2, z^3, z, &c. Par tous les points m^1, m^2, m^3, &c. on tirera des perpendiculaires $m\ l$ aux projections des joints de lit prolongés S m^1, S m^2, &c. sur lesquelles on portera les longueurs $m^1\ z^1$, $m^2\ z^2$, en dessus depuis O vers C'', & en dessous depuis O vers X, lesquelles lignes donneront les points c^1, c^2, c^3, c, &c. qui seront les centres des différentes ellipses qu'il faut tracer, dont le diametre vertical C L^1, C L^2 est toujours égal à C'' V. Les demi-diametres rampans & verticaux de toutes ces demi-ellipses étant donnés & leurs angles de conjugaison, on les décrira par le probl. 8 du second Livre, comme on les voit dans la figure; il ne reste plus qu'à trouver la rencontre des joints de lit de la trompe avec chacun de ces quarts d'ellipses. Sur chacun des joints de lit en projection, on élevera une petite perpendiculaire au point S, qu'on fera égale à la distance de la ligne A B de niveau avec le diametre R B rampant, & une seconde perpendiculaire sur A B, au point où cette projection de joint de lit coupe la ligne A B.

Ainsi, par exemple, pour le second joint S p^2, on élevera au point p^2 la perpendiculaire $p^2\ h^2$, qu'on fera égale à la hauteur de retombée 2 o^2 du ceintre primitif R H B; ensuite au point S on fera la petite perpendiculaire S 2^s égale à $p^2\ o^2$, & par les points 2^s & h^2 on tirera la droite $2^s\ x^2$ qui coupera le quart d'ellipse $p^2\ x^2\ l^2$ au point x^2, d'où l'on abaissera sur l'horisontale S m^2 la perpendiculaire $x^2\ y^2$, qui donnera le point y^2.

de la projection de la rencontre du joint de lit avec l'arête de la lunette, à son intersection avec la surface du berceau, que l'on cherche. On cherchera de même tous les points x pour avoir les vraies longueurs des joints de lit en S x, & tous les points y pour avoir la courbe Ry^2 Y yB de la projection de l'arrête de rencontre des deux doëles de la trompe & du berceau. *Fig.* 87.

Cette projection & les longueurs des joints de lit étant données, il est visible, par tous les exemples des enfourchemens des traits précédens, que l'on a tout ce qui est nécessaire pour former les panneaux de doële plate & chercher les biveaux, & enfin pour tracer les voussoirs par équarrissement, si l'on veut, en faisant un lit de supposition horisontale passant par A B, ou parallelement à A B, au-dessus dans les voussoirs qui approchent de la clef, & au-dessous pour la naissance en R, & rapportant à ce plan de supposition toutes les hauteurs des retombées du ceintre primitif sur l'horisontale passant par le point le plus bas du voussoir, ce qui est facile à concevoir & à exécuter, si l'on a compris ce qui a été dit dans toute cette seconde partie des voûtes composées.

Explication démonstrative.

Si l'on suppose des plans verticaux passant par les joints de lit de la trompe prolongés, il est évident qu'ils feront deux sections, l'une triangulaire dans le cône, parce qu'ils passent par son sommet, l'autre elliptique dans le cylindre, parce qu'ils le coupent tous (à la réserve d'un seul) obliquement à son axe; par conséquent l'intersection de tous les triangles avec toutes les ellipses qui sont dans les mêmes plans verticaux, sera l'arête de rencontre des deux surfaces ; d'où il suit que si de tous ces points d'intersection on abaisse des verticales $x y$, on aura, sur le plan horisontal, la projection de cette arête qui est courbe à double courbure. Mais a cause que le berceau est supposé en descente, & le point S de niveau avec le point B, il arrive que le plan du triangle par l'axe sera incliné à l'horison suivant la ligne R B, par conséquent que le sommet S sera d'autant plus haut que tous les points p de la ligne A B (qu'on suppose de niveau avec B), que chacun de ces points p approchera de B, où S & B sont de niveau; c'est pourquoi nous avons porté sur le point S les hauteurs op, op, qui marquent de combien l'im-

poste est au-dessous du niveau de S & de B. On peut remarquer que ces hauteurs, ainsi rangées autour de S, donnent des rayons d'une spirale S 1^s 2^s 3^s, &c.

CHAPITRE III.

Des rencontres des berceaux avec les voûtes sphériques.

L'Uniformité de la sphere n'offre pas beaucoup de combinaisons de rencontres avec les berceaux. Quant à la sphere considérée en elle-même, il n'y en a que deux; savoir, lorsque l'axe du berceau passe par le centre de la sphere, & lorsqu'il n'y passe pas: mais si l'on fait attention à l'arrangemenr de ses lits & à la situation du berceau à l'égard de l'horison, on pourra multiplier les cas de ces rencontres. 1°. Lorsque le berceau est vertical, comme une tour. 2°. Lorsqu'il est horisontal. 3°. Lorsqu'il est incliné en descente. Nous allons traiter de chacun en particulier.

PROBLEME V.

Faire un berceau en situation quelconque qui rachete une voûte sphérique.

PREMIER CAS.

Berceau droit ou biais, de niveau, qui rachete un cul-de-four.

Pl. 87, Fig. 89. Soit (fig. 89.) le trapeze ABDE le plan horisontal d'un berceau de niveau, dont le demi-cercle BHD est l'arc-droit, & la ligne *c x* son axe prolongé, qui ne passe pas par le centre C de la sphere FPAE; ce qui fait une rencontre biaise, que nous choisissons pour exemple, parce qu'elle est un peu plus difficile que la droite, qui est celle où l'axe du berceau passe par le centre C de la sphere; dans le premier cas, les voussoirs d'enfourchement sont égaux de part & d'autre de la clef, au lieu qu'ici ils sont tous differens.

Ayant divisé le ceintre primitif du berceau, (qui est ici l'arc-droit BHD) en ses voussoirs aux points 1, 2, 3, 4, on menera par ces points des paralleles à la direction indéfinies 1 n^1, 2 n^2, &c. On fera ensuite un profil de la voûte sphérique sur son diametre FG, qui est parallele à la direction du berceau; à son milieu on élevera une perpendiculaire CP, sur laquelle on portera les hauteurs des retombées du berceau 1 p^1, 2 p^2, en Cr^1, Cr^2, par où l'on tirera des horisontales qui couperont l'arc

87.

88.

Picquet Sculp.

l'arc F P en t^1, t^2, d'où l'on abaissera des perpendiculaires sur la base du profil F G, qui la couperont aux points Q^1, Q^2. Du point C pour centre, on tracera par ces points des arcs de cercles concentriques qui couperont chacun deux des projections de lit du berceau correspondantes; savoir, l'arc sur Q^1 coupera la projection p^1, n^1, au point n^1, & sa pareille provenant du point 4, qu'on suppose de même hauteur que le point 1, au point n^4. L'arc passant par Q^2 coupera de même les deux projections des joints de lit à côté de la clef en n^2, n^3. Par les points trouvés A n^1, n^2, n^3, n^4, E, on tracera une courbe qui sera la projection de l'arête de l'enfourchement du berceau & de la voute sphérique, laquelle courbe est un Ellipsimbre. Au lieu de cette courbe, il suffira de mener des lignes droites d'un point à l'autre, qui en seront les cordes. *Fig. 89.*

Nous n'ajoutons pas de profil de la courbe de l'arête d'enfourchement, parce qu'il est inutile pour trouver les longueurs des joints de lit, qui sont déja donnés à la projection, dans la supposition que le berceau soit de niveau. Il n'en est pas de même lorsqu'il est en descente, comme on le verra au trait suivant. Par le moyen des longueurs des joints de lit A B, n^1 p^1, n^2 p^2, &c. on fera les *panneaux de doële plate du berceau*, suivant la maniere ordinaire; par exemple pour le quatrieme voussoir, ayant porté à part la corde 3, 4, en 3^d 4^d, de la fig. 91. & ayant tiré deux perpendiculaires par ses extrémités 3^d, 4^d, on portera sur l'une la longueur p^4, n^4, & sur l'autre la longueur de la projection p^3 n^3: le trapeze p^3, n^3, n^4, p^4, sera le panneau que l'on cherche; ainsi des autres, qui sont tous tracés de suite à la fig. 91. *Fig. 91.*

Présentement il faut faire le *panneau de doële plate de la* partie de la *voûte sphérique* que comprend le voussoir d'enfourchement, dont la projection horisontale est le triangle mixte n^3 q n^4, compris par l'arc n^3 q, la ligne droite q n^4, provenant du centre C, & la corde n^3, n^4, commune aux deux doëles du berceau & de la voûte sphérique. On tirera du centre C, par les deux extrêmités de la ligne n^3, n^4 & par son milieu, des lignes droites entre les deux projections des lits de dessus & de dessous comme n^3 t, q n^4, & M m, & les cordes n^3 q & t n^4, qui couperont la ligne du milieu M m prolongée en y & z.

Cette préparation étant faite au plan horisontal, on en fera encore une profil, on portera la fleche M y, en t^2 V, & z m en

t^1 u, sur l'horisontale t^1 r^1, & l'on tirera la ligne V u. On déterminera ensuite la longueur du voussoir de la voûte sphérique, qui peut s'étendre au-delà de l'enfourchement, autant que la grandeur de la pierre qu'on veut employer le permettra, comme q d; mais pour la facilité de l'exemple, nous n'embrasserons que la partie de l'enfourchement n^3 q. On portera dans une place à part la corde t n^{-} en N T, de la fig. 90, sur le milieu de laquelle on fera une perpendiculaire Mm, égale à la ligne V u, du profil, par l'extrémité M de laquelle on tirera une parallele à T N, sur laquelle on prendra la longueur M Q égale à M q, de la fig. 89, & M n égale à M n^3; le trapeze Q n T N sera celui de la doële plate d'un voussoir de la voûte sphérique, de laquelle il faut retrancher pour le berceau de niveau le triangle T n N, fait par la diagonale n N. Si le voussoir étoit plus long, on pourroit lui ajouter la longueur q d, déterminée au plan horisontal par q d en Q d, de la fig. 90, & n^4 i en N i; mais alors il faut tirer les cordes d n & i t, qui donneront les plus grandes fleches, par conséquent la ligne V u du profil sera plus éloignée de t^2, t^1, & le panneau sera fait.

Fig. 89 & 90.

Application du trait sur la pierre.

Fig. 89. Ayant dressé un parement de supposition horisontale, on y tracera les angles rectilignes q n^3 p^3, & n^3 q S, dont l'un est celui de la corde q n^3 avec la projection n^3, p^3, de la projection du joint de lit du berceau, l'autre est celui de la même corde avec le joint montant de la voûte sphérique, sur lequel on portera la retombée b u, pour mener une parallele à cette corde, suivant laquelle on abattra la pierre avec le biveau de doële plate & d'horison V u o^1, pour former la doële plate de la voûte sphérique, sur laquelle on appliquera le panneau qu'on vient de faire à la fig. 90 pour y en tracer le contour & former le voussoir en portion de voûte sphérique avec ses lits, comme il a été dit en parlant des voûtes simples, tom. 2, pag. 350, de la même maniere que si la voûte n'étoit point pénétrée par un berceau; à la réserve du lit de dessous qu'il ne faut pas encore faire, parce que le plan de supposition horisontale, qui est le premier parement qu'on a fait, doit servir pour la formation des deux doëles.

Par le moyen de ce parement, on formera la partie du

berceau qui aboutit à la doële ſphérique, par la même maniere qu'on vient d'employer, c'eſt-à-dire, avec le biveau de la doële & d'horiſon O 4 3, avec cette différence, qu'il ne ſera pas néceſſaire d'y faire une préparation de doële plate. On formera ce biveau tout d'un coup mixte, ayant une branche droite O4 & une courbe 4 l 3, en faiſant couler la branche droite ſur le parement de ſuppoſition horiſontale perpendiculairement à la ligne n^4 p^4, qu'on y ſuppoſe tracée par le point n^4 parallelement à la premiere n^3 p^3, & abattant la pierre ſuivant l'exigence de la branche courbe 4 l 3, qui doit être auſſi toujours perpendiculaire à la même ligne. Les deux doëles creuſes étant finies, on prendra les biveaux mixtes de doële & de lit de deſſous, ſuivant leſquels on abattra la pierre, pour former le lit plan du berceau & le lit conique convexe de la voûte ſphérique, leſquels, par leur interſection, donneront l'arête de rencontre des deux lits, & la pierre ſera achevée. *Fig 89.*

REMARQUE.

On voit que par cette méthode on n'a beſoin ni de panneaux de doële de berceau, ni de panneaux de lit de l'une & de l'autre voûte, ce qui rend l'opération beaucoup plus ſimple & plus commode que celle qu'on trouve dans les livres de la coupe des pierres.

SECOND CAS.

Berceau en deſcente droite ou biaiſe, qui rachete une voûte ſphérique.

Soit (fig. 96.) ABDE, la projection horiſontale du berceau, & le cercle KPAE, la baſe horiſontale de la voûte ſphérique où il aboutit. *Fig. 96.*

Sur BD, diametre du ceintre primitif, ayant décrit le demi-cercle BHD, ou la demi-ellipſe B s D, dont l'une eſt le ceintre de face, l'autre l'arc droit, & l'ayant diviſé en ſes vouſſoirs aux points 1, 2, 3, 4, on menera à l'ordinaire par ces points, ou par leurs projections p^1, p^2, &c. (ſi la face de deſcente BD étoit oblique à ſa direction) des paralleles à la direction de la deſcente, qui couperont le diametre PQ, de la ſphere (perpendiculaire à cette direction) aux points r^1 C^s, c^3, c^4, & le contour de la ſphere aux points b^1, b^2, b^3, b^4. On fera enſuite

Fig. 96. le profil de la descente sur le côté B A, prolongé en M^c, jusqu'à la rencontre du diametre P Q. Puis par le point E, on menera une perpendiculaire à M^c B, qui coupera cette ligne en e, où l'on fera l'angle de rampe B e F, qu'on suppose donné, dont le côté e F coupera D B prolongé en F, supposant la face de descente perpendiculaire à sa direction horisontale ; car si elle ne l'étoit pas, il faudroit toujours faire B F perpendiculaire sur e B.

Pour achever ce profil, on portera sur B F prolongée les hauteurs des retombées 1 p^1, 2 p^2, en F f, F f^2, par où on menera des paralleles à la ligne de rampe f^1 N · f^2 N prolongées indéfiniment. Si l'on avoit pris pour ceintre primitif l'arc droit B s D, on auroit porté les hauteurs des retombées sur une perpendiculaire à la rampe en G R^1, G R^2, & l'on auroit continué de même. Ensuite du point M^c, où la base B e coupe le diametre de la sphere P Q, pour centre, & de toutes les distances r^1 b^1, C^s b^2, &c. pour rayon, prises successivement, on fera des arcs de cercles qui couperont les profils des joints de la descente en des points qui donneront les avances de l'arête de la lunette. Ainsi du point M^c pour centre, r^1 b^1 pour rayon, on décrira l'arc N : 1, qui coupera le premier joint f^1 N^4 au point N^1. Du même centre M^c, & pour rayon la longueur C^s b^2, on décrira un second arc qui coupera le second joint de lit f^2 N^3, au point N ; du même centre & de l'intervalle c b, on tracera un arc qui coupera le second profil, qui sert aussi pour le troisieme joint en N^3. Ainsi du quatrieme qu'on trouvera du même centre avec c^4, b^4 pour rayon.

Pour avoir les mêmes points du profil en projection horisontale, il n'y a qu'à abaisser des perpendiculaires sur les projections horisontales, correspondantes des joints de lit p^1 n, p^2 n^2, qu'elles couperont aux points n^1, n^2, n^3, n^4, par lesquels on menera des lignes droites qui seront les projections des rencontres des doëles plates du berceau avec celles de la voûte sphérique. Si au lieu de ces lignes droites, on trace par les mêmes points une ligne courbe, elle sera la projection horisontale de l'ellipsimbre qui se forme par l'intersection des surfaces de ces deux corps, laquelle courbe est rampante de la hauteur A a, qui est la différence du niveau des impostes e & a. Les projections verticale & horisontale étant faites, il faut former l'arc-droit B s D, comme à toutes les descentes, par le moyen d'une per-

pendiculaire GR à la rampe e F, portant les longueurs GR^1 & GR^2, en p^1 1^r, p^2 2^r, &c. Fig. 96.

Préſentement on a tout ce qui eſt néceſſaire pour former les panneaux des doëles plates des deux voûtes ; celui de la voûte ſphérique ſe fera comme au cas précédent, & celui de la deſcente du même vouſſoir qui fait l'enfourchement, ſe fera par le moyen des longueurs & des avances des joints de lit donnés au profil, & de leur intervalle donné à l'arc-droit, comme nous l'avons tant de fois répété. Il ne reſte qu'à chercher le biveau néceſſaire pour donner à ces deux doëles l'inclinaiſon qu'elles doivent avoir entr'elles, pour former la rencontre d'enfourchement des deux voûtes.

Suppoſons, par exemple, qu'on cherche le biveau de rencontre des deux doëles du ſecond vouſſoir marqué au ceintre primitif 1, 2. On portera la hauteur $N^1 u$ du profil en p^1 V, au-deſſus de la projection p^1 du point 1, qui eſt le plus bas du vouſſoir; enſuite on prolongera la corde 2, 1, juſqu'à la rencontre du diametre DB, prolongé, qu'elle coupera en q. Par le point V, on menera VY parallele à 1 q, qui coupera la même ligne BF en Y, par où & par le point n^1, de la projection horiſontale d'enfourchement du premier lit, on tirera la ligne Yy, qui ſera l'interſection de la deuxieme doële plate du berceau avec l'horiſon. L'interſection de la doële plate de la voûte ſphérique eſt donnée à la projection horiſontale en $n^1 s$, par la corde menée d'un de ces points à l'autre, parceque ſi la voûte ſphérique n'étoit pas percée par le berceau, ſes lits ſeroient continués de niveau.

Les ſections des doëles plates du berceau en deſcente, & de la voûte ſphérique avec le même plan horiſontal, étant données, avec la projection n^1, n^2 de leur arête de rencontre, il ſera aiſé de trouver l'angle de leur inclinaiſon mutuelle, par le problême 12 du 3e livre; mais pour ne pas y renvoyer le lecteur, nous en ferons ici l'application dans une fig. 92 à part, pour ne pas embrouiller la fig. 96. Ayant tranſporté en un endroit à part les angles des lignes $y n^1$, n^2 & $n^2 n^1 s$, avec la longueur $n^1 n^2$, de la projection de la fig. 96, en Z 1, 2, & 2 1 s, de la fig. 92 & fait 1, 2 égal à $n^1 n^2$; on élevera ſur cette ligne au point 2, une perpendiculaire 2 h, qu'on fera égale à la hauteur t 2 de la retombée du ſecond vouſſoir. Par le point h, ayant tiré la ligne h 1, on lui fera une perpendiculaire $h p$, qui Fig. 92 & 96.

coupera 1, 2 prolongée au point p, par où l'on tirera à la même ligne 1, 2, une perpendiculaire z S, qui coupera les lignes données d'interſection des deux doëles avec l'horiſon aux points z & S; ſur 1 p prolongée, on portera la longueur $p\ h$ en $p\ x$. Si de ce point x on tire des lignes en z, & en S, l'angle $z\ x$ S ſera celui que l'on cherche pour aſſembler les doëles plates qu'on ſuppoſe faites, comme on l'a dit au trait précédent, & telles qu'on les repréſente aux fig. 93 & 94, avec les mêmes lettres du plan horiſontal.

Application du trait ſur la pierre.

Si l'on ne cherchoit point à ménager la pierre, on pourroit faire l'application de ce trait de la même maniere qu'au cas précédent, par la ſuppoſition d'un parement horiſontal; mais comme l'inclinaiſon de la deſcente laiſſeroit un grand vuide au-deſſus, elle occaſionneroit trop de perte de pierre, c'eſt pourquoi nous revenons à la même pratique que nous avons donné pour les enfourchemens des berceaux en deſcente avec ceux qui ſont de niveau.

Fig. 91, 92 & 93.

Ayant dreſſé un parement, deſtiné pour une des deux doëles plates, par exemple pour celle du deuxieme vouſſoir du berceau en deſcente, on y appliquera le panneau de la fig. 91 qui convient à ce vouſſoir qu'on ſe propoſe de faire, pour en tracer le contour, puis avec le biveau des deux doëles, trouvé comme il a été dit à la fig. 92 & poſé d'équerre ſur l'arête commune, on abattra la pierre ſuivant l'angle $z\ x$ S pour former un ſecond parement ſur lequel on appliquera le panneau de la fig. 93 de la doële plate de la voûte ſphérique, pour en tracer auſſi le contour. Les deux têtes des doëles qui ſe rencontrent & les arêtes des joints de lit qui les comprennent étant donnés, il eſt viſible qu'il n'y a plus qu'à abatre la pierre avec les biveaux de lit & de doële plate donnés aux arcs-droits des deux voûtes, par exemple $2^r\ 1^r\ 5^r$, pour le lit de deſſous de la branche de la deſcente, & $1^r\ 2^r\ 6^r$ pour celui de deſſus. Quant à la partie de la doële ſphérique, ſi le vouſſoir ne fait pas une branche mais ſeulement une tête au bout du rang de la deſcente, on n'aura à faire que le lit de deſſus ſuivant l'angle K t^2 T du profil, celui de deſſous étant retranché par la rencontre du berceau; mais ſi le vouſſoir fait une branche, comme il con-

vient à la bonne construction, il aura deux lits inégalement longs; celui de dessus comprendra la longueur de la branche sphérique, outre la largeur de celle qui entre dans le berceau, & celui de dessous ne s'étendra qu'au long de la branche.

On sait qu'outre les biveaux de lit & de doële il faut encore se servir de ceux de doële & de tête; mais comme ceux-ci n'ont rien de particulier dans les rencontres des voûtes, nous n'en faisons pas mention ordinairement, parce qu'ils sont toujours les mêmes qu'ils doivent être à chaque espece de voûte simple. Celui de la partie sphérique sera toujours l'angle de la corde avec le rayon de la sphere; par exemple, l'angle $n^3\ d\ n^4$, qui change d'ouverture suivant le plus ou le moins de longueur de la corde du voussoir. A l'égard de celui de tête de la descente, si le voussoir n'atteint pas à la face d'entrée, il sera droit en retour d'équerre, pour la continuation de la voûte, & s'il s'étend jusqu'à la face, il sera d'une ouverture qu'il faut chercher, comme il a été dit au tome précédent, en parlant des voûtes simples, selon qu'elle sera à plomb ou en talud, ce qu'il est inutile de repéter. Nous n'ajoutons rien ici touchant la différence du cas où la descente est biaise, nous en avons assez parlé au tome précédent, en traitant des voûtes simples; & cette différence, qui en cause peu dans l'enfourchement, n'influe en rien dans la maniere d'en faire la projection.

Explication démonstrative des deux traits précédens.

Si l'on suppose, suivant la méthode générale que nous avons donné au premier livre, pour trouver les intersections des surfaces de différens corps, que la voûte sphérique & le berceau en descente sont coupés par des plans verticaux passans par les projections des joints de lit du berceau, en telle situation qu'on voudra, ou de niveau comme au cas précédent, ou en descente comme dans celui-ci; ces plans verticaux feront, par leurs sections, des parallelogrames dans le berceau & des cercles dans la voûte sphérique. La seule différence qu'il y aura dans les différentes situations du berceau, sera que ces parallelogrames, qui étoient rectangles lorsque le berceau étoit de niveau & sa face à-plomb, seront obliqu'angles, s'il est supposé en descente; mais leurs hauteurs verticales sur la rampe étant entre mêmes paralleles, seront toujours égales aux hauteurs

des divisions du ceintre de face, qu'on suppose vertical, dans l'un & l'autre cas ; on peut donc appliquer les hauteurs de ce ceintre dans le cercle majeur de la sphere qui sert de section de profil, comme si le berceau en descente étoit de niveau.

Fig. 96. Il est clair que tous les plans verticaux qu'on suppose passer par les joints de lit du berceau, font par leur section dans la voûte sphérique, des cercles inégaux, selon qu'ils passent plus près ou plus loin du centre de la sphere, & que les rayons de ces cercles sont les longueurs $r^1\ b^1$, $C^s\ b^2$, $c^3\ b^3$, &c. menées depuis le diametre P Q, à la circonférence de la base de la voûte sphérique, qui est retranchée par la pénétration du berceau. Or, comme dans la projection verticale le diametre P Q n'est représenté que par un seul point M^c, il est visible que tous les centres r^1, C^s, c^3, c^4, qui étoient sur ce diametre, sont réunis dans ce seul point M^c, qui a servi à faire tous les arcs de cercle qui ont déterminé les points d'intersection des joints de lit du berceau, à l'arête de l'enfourchement. La construction des panneaux de doële plate n'a pas besoin d'explication; il est visible que les inclinaisons des plans étant différentes, celui de la doële du berceau retranchera toujours une partie triangulaire de celui de la voûte sphérique, & qu'il s'agit seulement de trouver l'angle que font entre eux ces deux plans.

Pour trouver cet angle, nous avons cherché, suivant notre méthode générale du probleme XII, livre III, la section de chacun de ces deux plans de doële plate avec l'horison; celle de la sphérique se trouve sans difficulté par la corde de la base du voussoir; mais pour celle du berceau, il y faut un peu plus d'attention. Si on examine ce que nous avons fait, on reconnoîtra que nous avons imaginé une ligne horisontale $N^1\ O^r$ passant par le point le plus bas du voussoir 1, 2, qui étoit proposé à faire, laquelle peut être considérée comme un plan horisontal passant par ce point & par le second lit de la voûte sphérique. Or ce plan est plus bas que le point F (qui est la projection verticale du diametre B D d'entrée de la descente) de la hauteur de la ligne $r\,u$, qui est une partie de l'à-plomb $N^1\ u$, composé de la hauteur de la retombée $N^1\ r$, laquelle est égale à 1 p^1 du ceintre primitif, & f^1 F du profil; par conséquent p^1 V sera égale à f F + F i = $N^1 r + r u = p^1$ 1 + 1 V. Donc le plan de la corde 2, 1, prolongé & transporté en V Y, rencontrera le plan horisontal dont nous parlons, à une distance B Y du point

point B, & (par la construction) il passera par le point n^1, qui est la projection du point N^1 du profil ; donc la ligne Y n^1 y, est la section de la doële de la descente avec l'horison, *qu'il falloit trouver.* Cette section Y y d'une doële avec l'horison, la section n^1 s de l'autre doële, & la projection de leur intersection n^1 n^2, étant connues, le reste de l'opération est démontré au problême XII du livre III. *Fig. 96.*

COROLLAIRE.

De la rencontre des berceaux avec les cul-de-fours surhaussés ou surbaissés.

De la construction des traits des enfourchemens des voûtes sphériques avec les cylindriques, on peut facilement tirer celles des rencontres des sphéroïdes avec les cylindres ; car par la même méthode des sections des plans verticaux passans par les joints de lit des berceaux, il en résulte des demi-ellipses dans le sphéroïde, au lieu des demi-cercles dans la sphere, lesquelles auront toujours au profil le même point M^c pour centre, pour moitié d'un de leurs axes les ordonnées au diametre PQ de l'ellipse PAEQ, supposée telle, si le plan est elliptique, considéré dans un plan horisontal ; & pour moitié de l'autre, les ordonnées au même diametre, considéré dans un plan vertical, formant une autre ellipse, ou un demi-cercle PKQ, suivant que le sphéroïde sera alongé ou aplati. Avec les deux axes donnés, on décrira des arcs elliptiques, du centre M^c, au lieu des quarts de cercles qu'on a décrit, pour avoir la terminaison des joints de lit à leur profil, marqués N^1, N^2, &c. qui sont à l'arête d'enfourchement des deux voûtes. Si la voûte en cul-de-four étoit une de ces figures d'ellipsoïde dont nous avons parlé au second tome, qu'on ne peut faire par le moyen des doëles plates, il faudroit faire cette partie par équarrissement, comme si la voûte n'étoit pas pénétrée par un berceau, ensuite faire le berceau passant par les points de rencontre qui auront été trouvés au profil, qui doit être fait de la même maniere que pour la rencontre de la voûte sphéroïde, par l'intersection des ellipses différentes, suivant l'exigence de la figure de l'ellipsoïde, mais cependant ayant toutes le même centre en M^c.

Il est visible que par ces profils on aura les deux points de jonction de chaque doële plate & creuse des voussoirs du berceau

Fig. 96. en descente ; les deux autres se trouveront sur la pierre par le moyen du parement de supposition horisontale qui aura servi à faire la surface concave de l'ellipsoïde , par équarrissement, c'est-à-dire, dans ce cas, par l'inscription des cylindres; on abattra la pierre avec le biveau du niveau & de la rampe Mᶜ *e* F, pour tracer dans ce nouveau lit incliné l'arête du lit inférieur de la descente, laquelle étant donnée, il sera facile de trouver celle du lit de dessus, par plusieurs manieres; ou par le moyen de la retombée du voussoir, ou par le moyen du biveau de lit & de la doële plate ou creuse, ou du panneau de doële plate. Nous avons trop parlé de tous ces moyens & nous en avons donné trop d'exemples pour qu'il soit nécessaire d'en répéter ici l'application.

SECONDE ESPECE.

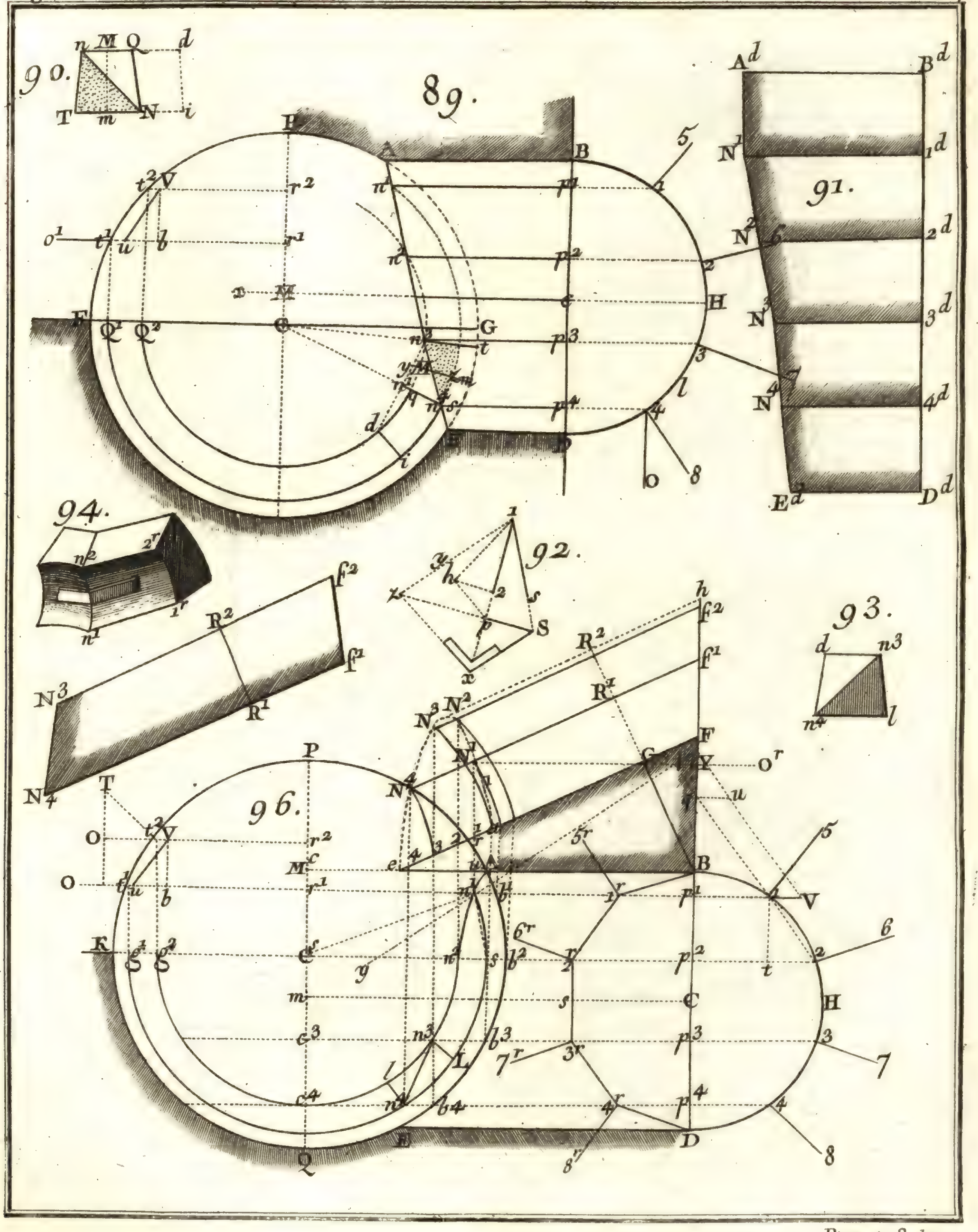
Des rencontres des voûtes cylindriques avec les sphériques, dont les poles sont dans le plan de leur imposte.

Nous avons donné ci-devant la construction des enfourchemens des berceaux avec les voûtes sphériques dont les poles sont au sommet de leur hauteur, c'est-à dire, au milieu de la clef, & dont les joints de lit sont paralleles à l'horison ; ici, nous parlons des voûtes sphériques dont les joints de lit sont inclinés, & leur pole dans le plan de l'imposte, ce qui peut encore faire deux combinaisons , l'une de la sphere avec un berceau horisontal, l'autre avec un vertical, c'est-à-dire, avec une tour ronde ou creuse. Nous n'en comptons pas une troisieme, avec un berceau incliné, parce que ce cas ne tombe guere dans la pratique : dans cette circonstance, on doit donner à la voûte sphérique l'arrangement des joints du cas précédent.

Premiere combinaison.

Voûte sphérique, ou niche en tour ronde ou creuse.

Pl. 88. *Fig. 97.* Soit (fig. 97.) l'arc de cercle concave ACB, ou l'arc convexe ECD, une portion de la base d'une tour creuse ou d'une ronde, dans laquelle on veut faire une *niche* dont le plan horisontal, passant par les impostes, est l'arc de cercle APB, égal, plus grand, ou plus petit que le demi-cercle, ce qui dé-



Picquet Sculp.

pend de la position arbitraire du centre C de la niche, ou sur la corde AB de l'arc de la tour creuse, ou au dedans, ou au dehors, suivant la profondeur que l'Architecte veut donner à la niche. Si l'on se propose de faire les têtes des voussoirs parfaitement égales entre elles, il faut prendre pour ceintre primitif celui qui seroit le développement de la portion cylindrique que retranche la sphere à la surface de la tour, par sa pénétration dans cette tour, lequel ceintre est (comme nous l'avons dit de la porte en tour ronde) une demi-ovale méchanique, qui a pour diametre la rectification de l'arc AB, & pour ordonnées les verticales élevées sur cet arc, lesquelles sont terminées à l'arête de rencontre de la doële de la sphere & de la tour. Cette arête est une de ces courbes à double courbure que nous avons appellé ellipsimbre. On peut revoir là-dessus ce qui a été dit de la porte en tour ronde par têtes égales. *Fig. 97.*

La maniere de faire ce ceintre de face développé, est de diviser l'arc AB de la tour en autant de parties égales qu'on voudra avoir de points de la demi-ovale, & de mener par tous ces points d, d, des perpendiculaires à l'axe MP, qui le couperont aux points c, c, & la circonférence de la niche APB, aux points x, x. Par tous les points d, d, on menera des paralleles indéfinies à l'axe MP de la sphere, & des points c, c, pour centre, & avec les longueurs cx, cx, pour rayons, on décrira des arcs qui donneront les hauteurs des ordonnées de l'ovale qu'on veut tracer, laquelle sera surbaissée, parce que l'arc ACB, ou seulement sa moitié CdB, rectifiée, qui en est un demi-axe, sera plus grande que le demi diametre de la sphere CI, qui est l'axe vertical de cette ovale H 1 h. Le contour de ce ceintre étant tracé, on le divisera en tel nombre de voussoirs qu'on voudra aux points 1, 2, &c. d'où l'on abaissera des perpendiculaires qui couperont le diametre aux points p^1, p^2. On portera ses intervalles de suite repliés sur l'arc ACB, pour y faire passer les projections des joints de lit, qui sont des portions d'ellipses, lesquelles doivent toutes passer par ces points & par le pole P de la sphere.

Si l'on ne veut pas affecter une division des têtes des voussoirs en parties exactement égales, on rendra l'opération plus courte & plus simple, comme il suit. Ayant tiré par le point C, la ligne CI, parallele à la corde AB, & élevé sur cette corde la perpendiculaire MP, on divisera le demi cercle DPI

Fig. 97, en autant de parties égales qu'on voudra avoir de voussoirs aux points 1, 2, 3, 4, d'où l'on abaissera des perpendiculaires qui couperont DI en des points q^1, q^2, lesquelles détermineront les demi-axes de plusieurs ellipses, qui doivent passer par ces points & par le pole P, pour exprimer sur le plan horisontal la projection des joints de lit de la niche. Ainsi ayant les demi-axes de ces ellipses & la moitié du grand axe CP, commun à toutes, il sera facile de les tracer par le problême VII du II livre; ces arcs d'ellipses prolongés rencontreront l'arc ACB de la tour creuse, en des points $c1$, c^2, qui donneront les projections des divisions des voussoirs à la face creuse.

Avec ces deux projections horisontales ACB de l'arête de rencontre de la doële de la niche avec le parement de la tour, & des joints de lit, on pourroit former la niche proposée par la voie de l'équarrissement; mais comme la perte de la pierre seroit trop considérable, nous allons donner le moyen de la ménager, par l'inscription d'une piramide dans la sphere, dans laquelle elle donnera des doëles plates, dont les angles toucheront trois points de la surface sphérique, & qui fourniront le moyen de trouver le quatrieme de la même maniere que nous l'avons dit au tome précédent, en parlant de la *trompe sphérique sur le coin*, pag. 397. On commencera par déterminer la position de la tête du trompillon, en tirant une ligne $T^2 N^2$, perpendiculaire à l'axe MP, qui coupera les projections elliptiques des joints de lit aux points n^1, n^2 &c. par lesquels & par les points trouvés e^1, e^2, on tirera des lignes droites qui rencontreront l'axe MP prolongé au point S, où sera le sommet de la piramide tronquée que doivent former les doëles plates depuis la face jusqu'au trompillon.

Supposons, par exemple, qu'on se propose de faire la doële plate du second voussoir de la niche, dont la projection doit passer par les quatre points c^2, n^2, n^1, c^1, on menera par le point le plus avancé c^1, une parallele $c^1 r$, à la corde AB, jusqu'à l'à-plomb $2 c^2$, prolongé en r, par où on tirera au sommet S la ligne rS, qui coupera l'arc CB en z, & la corde T N^2 du trompillon tout près de n^2, que nous prendrons pour ce point d'intersection, parce qu'on ne peut mettre un caractere auprès sans y jetter de la confusion. On tirera ensuite par les projections de la face c^1, c^2 une ligne droite LB qui coupera l'axe MP au point L, & la circonférence de l'imposte APB, tout

auprès de B, en un point que j'appelle aussi B, par la même raison de l'article précédent. Sur LB, comme rayon, on décrira le quart de cercle B x^2 l, auquel on menera par les points c^1, c^2, les ordonnées qui le couperont aux points x^1, x^2, & par le point z, une parallele aux ordonnées z z, dont il faut trouver la longueur par le profil, comme on le dira ci-après, en cherchant les valeurs des lignes qui doivent faire les côtés du panneau de doële plate dont nous venons de faire la projection horisontale. *Fig. 97.*

Supposant qu'on veuille faire servir de base des profils la la ligne HS, pour la commodité de la place, on portera la longueur Sc^1 sur cette ligne en SF, où l'on élevera une perpendiculaire Ff^1, égale à la hauteur de la premiere retombée $1p^2$, puis on tirera f^1 S, qui coupera T^2 N^2 en T^1; la ligne f^1 T^1 sera la valeur de la projection c^1, n^1, qui est un des côtés de la doële plate, & la même sera la valeur d'un autre côté de supposition dont la projection étoit r n^2. Pour trouver la vraie longueur de ce second côté, on portera la longueur Se^2, en SG, sur la ligne de base du profil, & l'on élevera la perpendiculaire Gg, qui coupera la ligne T^1, f^1 en g; la ligne g T^1 sera la valeur de ce second côté du panneau en joint de lit de dessus.

Les valeurs des côtés du même panneau qui marquent les têtes, sont les cordes 1, 2 des divisions du ceintre formé sur le rayon uV, passant par le point c^1 parallelement à corde A B de l'arc de la tour, & la corde t^1, t^2, de l'arc du trompillon T^2 h N^2, ainsi on a les quatre côtés d'une doële plate qu'on formera comme il suit. Ayant tracé dans une place à part (fig. 98) deux lignes indéfinies a b, c d, perpendiculaires entr'elles, qui se croiseront au point m, on prendra la moitié de la corde 1, 2 de l'arc Hb, & on la portera à la fig. 98 de m en e & en f, par où on tirera les lignes e 1, f 2, paralleles à a b. On prendra de même la moitié de la corde t^1 t^2, de l'arc du trompillon T^2 h N^2, que l'on portera de m en n, & en o; puis des points n & o, pour centres, & pour rayon la longueur T f du profil, on fera des arcs qui couperont les paralleles e 1, f 2, aux points 1 & 2, où l'on tirera les lignes n 1, o 2, qui seront les côtés d'une doële plate de piramide droite inscrite à la sphere. *Fig. 97 & 98.*

Mais à cause que la partie de la tour comprise par la corde c^1 c^2 est oblique à l'axe, il en faut retrancher la partie f g, donnée au profil; ainsi portant la longueur T^1 g, de o en g,

Fig. 97, 98, (fig. 98) on aura pour longueur du côté qui répond au lit de dessus du voussoir, la ligne $o\,g$; enfin, ayant tiré la ligne $1\,g$, le trapezoïde $n\,1\,g\,o$, sera le panneau de la doële plate, qui ne touche cependant la doële sphérique que par trois de ses angles n, o, 1; mais non pas en g, par la raison que nous avons donné au second tome, page 398. Il faut donc chercher la distance dont ce point g est éloigné de la surface sphérique de la doële de la niche; pour cet effet, on portera la longueur $T^1\,g$ du profil sur la ligne $z\,z$ de l'élévation (fig. 97) où elle donnera le point z, d'où l'on tirera la ligne $x_2\,z$, puis du point o pour centre (fig. 98) & avec la longueur $o\,g$, pour rayon, on fera un arc vers z & du point g pour centre, & $x^1\,z$ pour rayon, on fera un autre arc qui coupera le précédent au point z; le triangle $o\,g\,z$, étant ajouté en retour de la doële plate, le point z touchera la doële sphérique qu'on cherche.

Les panneaux de doële plate étant formés, on tracera ceux de lit, dont les joints à la doële sont tous égaux en contour, en ce qu'ils sont tous des arcs d'un cercle majeur passant par l'axe M P; mais ils sont un peu inégaux en longueur, parce qu'ils se raccourcissent peu à peu depuis l'imposte A P B jusqu'à la clef. Leurs têtes du côté du trompillon sont aussi toutes égales, suivant l'angle mixte $AT^2\,n^x$, mais les têtes du côté de la tour sont des arcs d'ellipses inégaux, en ce que, quoique leurs cordes soient égales à la distance de l'arête de doële à celle d'extrados, elles sont toujours moins creuses à mesure qu'elles s'éloignent de l'imposte B X, où la premiere tête de lit est égale à la cavité de l'arc B X de la base de la tour qu'elle comprend, & son inclinaison à l'égard de la doële est l'angle curviligne X B N, qui est aussi le plus obtus de tous ceux des têtes supérieures, qui se referment à mesure qu'elles approchent de la clef, au milieu de laquelle cet angle devient mixte & égal à celui du trompillon $AT^2\,n^x$.

Pour trouver la courbure des arcs de tête, il n'y a qu'à ralonger les arcs circulaires de la projection horisontale, comme nous l'avons dit en parlant des têtes de la porte en tour ronde ou creuse; tels sont les arcs circulaires $X^5\,c^1$, que donne la projection du premier lit 1, 5, & l'arc $c^2\,y$ que donne celle du second lit 2, 6, ce que nous ne pouvons exprimer ici bien nettement, à cause de la petitesse de la figure. On tirera la corde de chacun de ces arcs, & on la divisera en

autant de parties égales qu'on voudra avoir de points de la courbe ; il suffit ordinairement de la diviser en deux ou trois pour la pratique, & par ces divisions on tirera des perpendiculaires à la corde, qui se termineront à l'arc de cercle. On prendra ensuite la corde du joint de la tête 5, 1, ou 6, 2, qu'on divisera en un même nombre de parties, qui seront égales entr'elles, mais plus grandes que celles de la corde de l'arc de cercle, & l'on portera sur ces divisions les perpendiculaires de l'arc de cercle, lesquelles donneront les points de l'arc elliptique que l'on cherche. Quant à l'ouverture de l'angle curviligne que doit faire cet arc de tête avec le joint de doële, il est aisé de le trouver ; on menera par les points c^1 & X 5, où la projection des points 1 & 5 coupe la base de la tour, des verticales c^1 E, & X 5^x, sur lesquelles on posera la corde 1, 5, à l'extrêmité de laquelle on fera une perpendiculaire qui coupera la ligne X 5^x au point 5^x ; on en fera de même pour les points c^2 y de la projection, qui donneront les points E^2 6^x du profil ; les angles curvilignes 5^x E^1 T^2, & 6^x E^2 T^2, seront ceux que l'on cherche.

Fig. 97.

Il ne reste plus à présent qu'à chercher les biveaux de lit & de doële, & de tête & de doële, suivant nos principes généraux.

Premierement, pour le biveau de doële & de lit, par exemple, pour le second voussoir, on prolongera la corde 2 1 de l'arc H b jusqu'à ce qu'elle rencontre la ligne M b, prolongée en O^r, d'où l'on tirera au point S, la ligne O^r S, qui sera la section de la doële avec l'horison, & parce que tous les plans des lits se couperont à l'axe M P, cet axe sera la seconde section, laquelle avec la hauteur de la retombée fournira le moyen de trouver l'angle des plans du lit & de la doële plate, comme il a été expliqué au problême XII du troisieme livre, & comme nous l'avons répété dans les traits des voûtes coniques. Pareillement, & par le même problême, on trouvera le biveau de tête plate L c, c^2 B, qu'on prolongera jusqu'à la section de la doële avec l'horison en Y, ainsi on aura la section de la tête avec l'horison en L Y, celle de l'horison Y S, & la hauteur de la retombée x^2 c^2 ; ainsi l'on trouvera l'angle de tête & de doële, comme l'on a fait à la trompe plate, page 88 du deuxieme tome, & à la trompe droite, page 227 du même tome.

Application du trait sur la pierre.

Ayant dressé un parement pour servir de *doële plate de supposition*, que j'appelle ainsi, parce que le panneau de cette doële ne peut toucher la surface sphérique qu'on se propose de faire que par trois de ses angles, on y appliquera ce panneau pour en tracer le contour, puis avec le biveau de lit & de doële plate, on abattra la pierre pour former les deux lits. Celui de dessus étant fait, on y appliquera le second petit panneau triangulaire *o g z*, (fig. 98) pour avoir le point *z* de la surface sphérique que l'angle *g* du panneau de doële plate ne pouvoit toucher. On appliquera sur ces mêmes lits un panneau ou une cerche formée sur l'arc A B d'un cercle majeur de la sphere, qu'on fera passer au lit de dessous, par les points 1 & *n* de la doële plate tracée, & au lit de dessus par les points *o* & 2, puis avec le biveau mixte de coupe & de doële pris où l'on voudra, par exemple en T^2 PS, (fig. 97) on creusera la doële sphérique comme il a été dit au chap. VII, page 397 du tome précédent.

Fig. 97 & 98.

Il faut cependant, avant que de la creuser, abattre la pierre avec le biveau de tête plate & de doële, si l'on n'a pas dessein de faire usage des panneaux de lit. En ce cas, on prendra avec la fausse équerre (fig, 97) l'angle 6, 2, 9, que fait le joint de tête 6, 2, avec une horisontale 2, 9, parallele à A B, suivant laquelle on fera une plumée creuse, dans laquelle on appliquera une cerche convexe formée sur l'arc A C B; mais comme le point 9 n'est pas déterminé de position, il faut chercher un second point d'appui à la cerche en 8, par le moyen d'un second biveau, en prenant l'angle V^e, 1, 5, que fait une verticale V^e 1 avec le joint de tête 1, 5; secondement, en faisant une parallele 6 *i* à la ligne V^e 1, puis posant deux regles sur les points *i* & 6, qu'on placera suivant ces directions verticales, & qu'on dégauchira en creusant des plumées sur la tête, l'une en haut, l'autre en bas; la plumée V^e 1 donnera le point 8 d'intesection de l'horisontale 2, 9, que l'on cherche pour déterminer la position de la cerche convexe qui doit servir à former la tête en tour creuse, en faisant couler cette cerche parallelement à elle-même sur les plumées verticales 6 *i* & V^e 1. Par ce moyen, on formera le creux des joints de tête

en

en portion d'ellipse, (comme elles doivent l'être) par une espece de hasard, produit par l'intersection de la surface plane de chaque lit avec la creuse cylindrique de la tour.

Si l'on fait usage des panneaux de lit, ils donneront les courbes des têtes de lit au parement creux de la tour; mais ce ne sera pas assez pour creuser ce parement, il faudra encore user d'autres moyens. On peut se servir de celui que donne le Pere Derand, quoiqu'il ne soit pas parfaitement juste, qui est de faire le développement de l'arête de la niche à la surface de la tour, en rectifiant l'arc H B avec ses divisions, comme on a fait à la fig. 97 en *c b*, *c t*, portant les avances B *x*, c^1 *a*, c^2 *a* de la tour creuse, à l'égard d'une ligne CI, tangente à l'arc ACB, en B^d 1^d, 1^d 1^d, 2^d 2^d, de la fig. 99, qui donneront les points B^d 1^d 2^d C^t, par où on tracera la courbe ondée qui est le développement de l'arête à double courbure de la rencontre de la surface sphérique de la niche avec la cylindrique de la tour. Nous ne parlons ici que du trait du P. Derand, parce que M. de la Rue n'en a rien dit. On voit que (dans la rigueur) ce développement suppose un cylindre horisontal, au lieu de la surface sphérique de la niche, parce qu'on y prend des distances horisontales; mais la différence est si petite qu'elle ne mérite pas qu'on y fasse attention dans la pratique, parce que l'inclinaison des cordes de la portion de sphere comprise entre le cercle majeur passant par DI & l'arc ACB de la tour, est si peu considérable, qu'elle ne peut altérer le contour du développement d'une maniere sensible dans l'opération la plus exacte. *Fig. 97 & 99.*

Ce développement étant tracé sur un corps flexible, comme sur du carton, on l'appliquera dans la surface de la sphere entre les points donnés 1 & 2, en l'appuyant, pour le faire plier, ensorte qu'il la touche par toute sa longueur. Dans cette situation, on tracera l'arête de la doële avec la tour, & l'on aura trois lignes courbes pour former la tête creuse; mais ce n'est pas assez pour la former exactement, il faut encore en revenir au moyen que nous venons de donner, pour y appliquer une cerche formée sur l'arc horisontal ACB, & posée horisontalement sur la tête par le moyen d'un angle 6, 2, 9. La différence qu'il y a, c'est que cette cerche trouvera deux appuis donnés l'un sur le joint de tête du lit de dessous, l'autre sur l'arête de doële de la niche à la surface de la tour, aux

Fig. 97. points 5, 7 & au dessous, ce qui fournit le moyen de trouver la position de la verticale 1 V^c, qui servira d'appui à la cerche d'un côté, l'autre appui étant donné sur le joint de tête du lit de dessus 6, 2. On pourroit aussi, sans faire de développement, faire la cerche ralongée de l'arc $e^1 e^2$ de la tour sur la corde $x^1 x^2$ qui lui répond, comme nous avons ralongé les arcs des joints de tête, & faire couler cette cerche inclinée parallelement à la corde 1, 2, l'appuyant sur les arcs des joints de tête donnés par les panneaux qui en ont été faits; cette maniere est la plus simple, la plus commode, & la plus exacte dans son principe.

La tête du voussoir étant faite à la surface de la tour, il ne reste plus qu'à faire l'autre du côté du trompillon de la même maniere que nous l'avons dit en parlant des voûtes sphériques simples en niche, au chap. VII du tome précédent, page 397.

Ce que nous venons de dire concernant la niche en tour creuse, servira pour la niche en tour ronde, en renversant les panneaux de lit de la droite à la gauche. La différence qu'il y a pour le trait, c'est, 1°. que si l'on regle les profondeurs de la niche à la clef, au lieu qu'elle augmente dans la tour creuse vers les impostes, elle diminuera dans la tour ronde. 2°. C'est qu'au lieu de prendre la corde de l'arc de la tour, que la projection des divisions des têtes des voussoirs comprend, il faut prendre la tangente de cet arc, pour réduire la tour ronde en polyëdre dont chaque pan ou face forme une tête plane au voussoir, laquelle sert de préparation à la formation de la tête ronde, qui sera de la même maniere que la creuse, mais en sens contraire, avec une cerche concave au lieu d'une convexe, laquelle sera cependant formée sur le même arc ACB, considéré en dehors dans sa convexité.

Seconde combinaison

Des voûtes sphériques avec les cylindriques, lorsque le berceau racheté par un cul-de-four est horisontal.

EXEMPLE.

Niche sphérique dans un berceau de niveau.

A bien considérer le trait dont il s'agit, ce n'est autre chose qu'un changement de position du précédent de la voûte sphéri-

que en tour creuse; dans celui-là, l'avance de l'arête de rencontre des voûtes diminuoit depuis les impostes jusqu'à la clef: ici au contraire, elle commence aux impostes & finit à la clef. Pour appercevoir cette différence d'un coup d'œil, il n'y a qu'à jetter les yeux sur les développemens de cette arête de face, fig. 99 de la planche 88, & fig. 101 ✠ de la planche 89, & l'on verra que si l'on joint les deux moitiés de la premiere par leur extrêmité, qui est aux impostes, on aura une figure égale à celle du développement de la fig. 101 ✠. On peut aussi concevoir que le développement de l'arête de face de la fig. 101 est précisément le même que celui de la niche en tour ronde, c'est-à-dire convexe, pour laquelle nous n'avons point donné d'exemple, comptant que celui-ci pouvoit servir pour l'un & pour l'autre. *Fig.* 99 & 101,

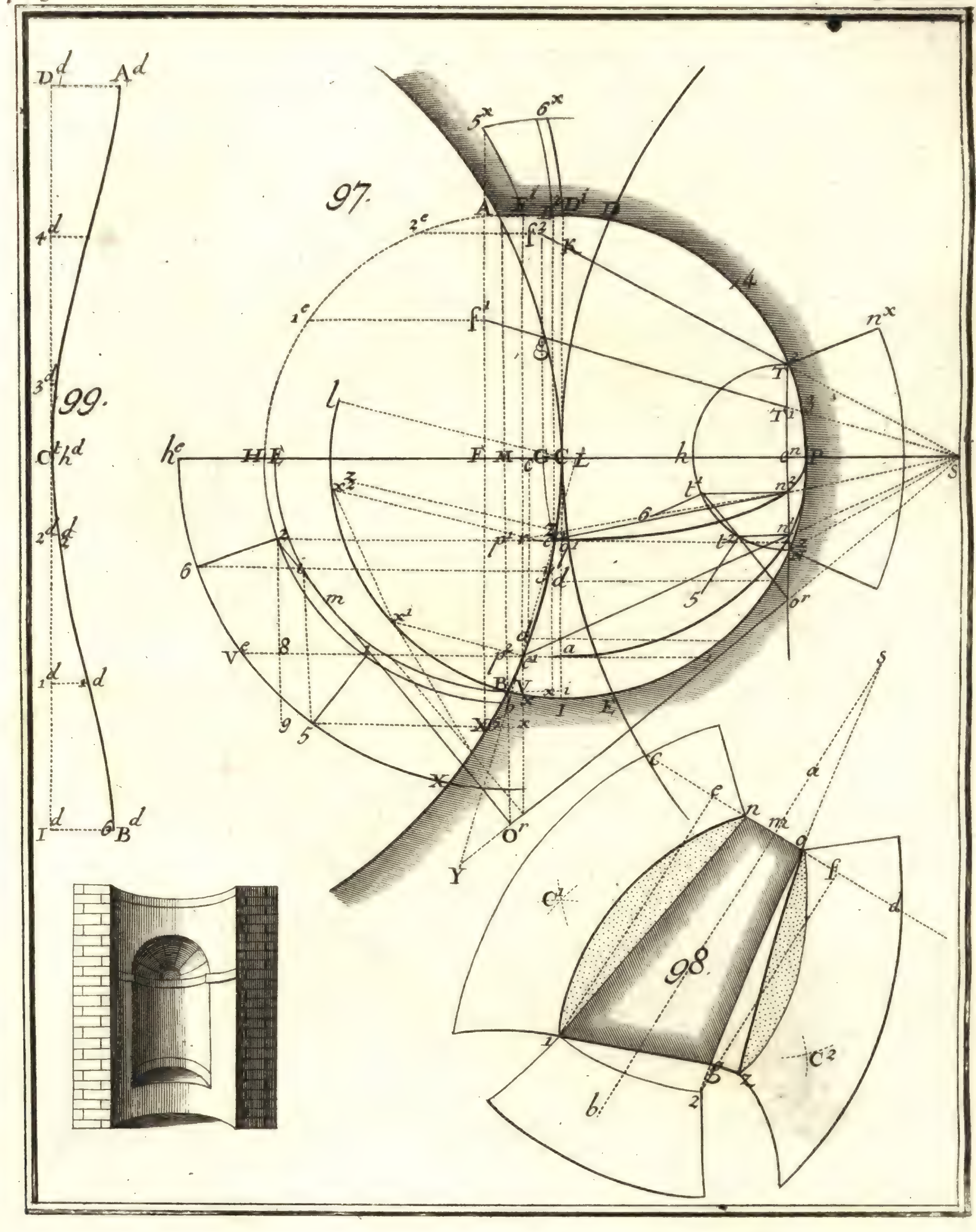
Avant que d'entrer en matiere, il faut observer que l'on peut faire une niche qui rachete un berceau de deux manieres; ou médiatement, ou immédiatement. Elle rachete la voûte du berceau immédiatement, lorsque la doële sphérique rencontre la cylindrique du berceau à la clef, qui retombe au-dessous du niveau de A en *a*. Elle la rachete médiatement, lorsque la doële sphérique P A, étant montée à sa plus grande hauteur sous le milieu de la clef en A, cette clef est menée de niveau en *a*, au lieu de retomber au-dessous de E par l'arc A *a*, comme le pratiquent ordinairement les Architectes; alors la voûte sphérique rachete un petit demi-cylindre de même diametre & qui a son axe *e* C dans l'axe de la sphere P C, prolongé par conséquent, dont l'arête de l'intersection commune est un demi-cercle (par le théor. VIII du 1er livre) dont le rayon vertical est la ligne A C. Ensuite, ce même demi-cylindre rachete le grand berceau C E D, auquel la doële de la sphere ne se joint que par cette médiation. Alors ce trait devient le même que celui d'une lunette droite dans un berceau, dont il a été parlé à la page 5 de ce tome III. Pl. 89, *fig.* 101 & 102.

Nous considérons donc ici la jonction immédiate des surfaces de la sphere & du grand berceau, pour ne pas tomber dans des redites. Soit la ligne C P, donnée pour la profondeur d'une niche circulaire à son imposte, le plan horisontal de cette niche ne sera qu'un demi cercle A P B, mais son profil sera plus grand que le quart de cercle P A, de l'intervalle d'un arc A *a* compris entre la plus grande hauteur A de la *Fig.* 101.

voûte de la niche & l'arc du berceau de niveau, dont le profil eſt l'arc D E *a* C. Faiſant ſervir de ceintre primitif le quart de cercle A P, on le diviſera en ſes vouſſoirs, comme une moitié de ceintre de face, par exemple, ici en deux & demi pour cinq vouſſoirs, aux points 3 4^t, par leſquels on menera des paralleles à l'horiſontale C P, qui couperont la verticale A C aux points f^3 g^4; les lignes Cf^3 & Cg, ſeront les demi-axes verticaux de deux ellipſes, qui auront chacune la même ligne C P pour demi-axe horiſontal.

Par le moyen de ces axes donnés, on décrira (par le problême VII du ſecond livre) des arcs d'ellipſe P f^3 F, P g^4 G, qui couperont l'arc du profil du berceau D E C, aux points F & G. De la même maniere, préciſément, on fera la projection horiſontale, en répétant le quart de cercle P A en B H, ſur le diametre B A, lequel ſera diviſé en ſes vouſſoirs exactement de même aux points 1, 2, deſquels abaiſſant des perpendiculaires ſur C B, on aura les points de leur projection, p^1, p^2, par leſquels & par le pole P, on décrira comme ci-deſſus des arcs d'ellipſe prolongés indéfiniment au dehors de la ligne C B. Par les points F & G du profil, on abaiſſera des à-plombs ſur H P, leſquels étant prolongés rencontreront les ellipſes des projections des joints de lit aux points *f* & *g*. Si l'on en abaiſſe auſſi un du point E, qui coupera H C en *e*, on tracera à la main une courbe *e f g* B, qui ſera la projection horiſontale de l'arête de recontre des ſurfaces de la ſphere & du cylindre. On pourra faire auſſi la projection de l'arête d'extrados de la même maniere, en menant par les points K, 7, 8, des horiſontales, mais on peut s'en paſſer par notre méthode.

Préſentement il faut déterminer la grandeur du trompillon, qui doit être un demi-ſegment de ſphere qui ait pour pole le point P. On tirera à volonté, & ſuivant la grandeur de la pierre qu'on y deſtine, une ligne T N, perpendiculaire à C P, qui coupera les arcs elliptiques des projections des joints de lit aux points q^1 q^2, deſquels on élevera des perpendiculaires ſur T N, qui couperont le demi-cercle fait ſur T N, pour diametre, aux points 1^n 2^n, qui ſeront les diviſions des vouſſoirs à la tête inférieure qui s'appuie ſur le trompillon. Si par une opération inverſe, on avoit fait le ceintre du trompillon avec ſes diviſions, immédiatement après avoir fait les projections du ceintre primitif, on auroit eu ſur la ligne T N des points des ellip-


97.
98.
99.

ſes des projections verticale & horiſontale des joints de lit: pour la premiere les points 3^t 4^t ; & pour la ſeconde, les points q^1 q^2. Les projections des joints de lit étant faites, tant au profil qu'au plan horiſontal, on fera les panneaux de doële plate, de la même maniere qu'il a été dit au trait précédent, avec cette différence qu'au lieu d'une corde menée par les projections des diviſions de l'arête de face creuſe, & prolongée pour y décrire un ceintre, comme l'on a fait à la fig. 97 ſur la ligne L B, on menera ici une tangente V *u*, à la courbe convexe de projection *f l g*, en tirant la corde *f g*, à laquelle on tirera une parallele par le point *l*, le plus ſaillant de la courbe *f l g*. *Fig.* 101.

Pour avoir le rayon du diametre du ceintre qu'il faut décrire ſur cette tangente, on lui menera par le centre C de la ſphere, une perpendiculaire C *d*, qui la coupera au point *d*, où ſera le centre de ce ceintre, dont *d u* ſera le rayon, qui donnera un cercle mineur de la ſphere, dont le quart eſt l'arc *d l u* ; ce rayon *d u* coupera les ellipſes des projections des joints de lit aux points *z z*, qui ſeront tout près des points *f g*, deſquelles on élevera des perpendiculaires ſur *d u* qui couperont l'arc *u l*, aux points 1^z, 2^z Avec tous ces points donnés, on opérera pour faire les panneaux de doële plate, comme au trait précédent, ou pour remonter plus loin, comme au trait de la *trompe en niche ſur le coin*, qu'on a vu à la page 397 du tome précédent, auquel on peut renvoyer le lecteur, pour ne pas faire de trop fréquentes redites ; la fig. 103 en montrera l'application.

Explication démonſtrative.

On peut comparer la rencontre des niches avec les berceaux de niveau ou debout, à celle d'une niche ſur le coin, dont il a été parlé au tome précédent, page 397, parce que les tangentes de la courbe convexe de la projection ſaillante, ou les cordes des diviſions des vouſſoirs dans la projection rentrante, lorſque la courbe de l'arête de rencontre à double courbure eſt concave, priſe horiſontalement, peuvent être conſidérées comme de pans de murs verticaux qui forment un coin ſaillant, ou un angle rentrant, leſquels retranchent quelques parties du quart de ſphere, ou comprennent plus que ſon quart, ſelon que les angles de ces plans verticaux ſont ſaillans ou rentrans, & que leur concours s'appoche ou s'éloigne du pole

de la ſphere qui eſt au milieu de l'impoſte de la niche. Cela ſuppoſé, l'explication du trait de la trompe en niche ſur le coin, convient en tout à ceux dont il s'agit ici; par exemple, les projections des joints de lit doivent être des arcs d'ellipſes, parce que les ſections des plans des lits qui paſſent par l'axe de la niche & par les diviſions du ceintre primitif, formant des cercles à la doële de la ſphere, leſquels ſont inclinés au plan horiſontal, leur projection doit être une ellipſe, par le deuxieme théorême du ſecond livre, page 227.

Quant au diſpoſitif à l'excavation de la ſphere, il eſt clair que nous commençons par y inſcrire des piramides tronquées dont les ſurfaces de leurs côtés ne peuvent pas toucher les quatre angles de la portion ſphérique que le vouſſoir doit comprendre, ſi les angles de la rencontre du berceau avec la ſphere, à chaque diviſion de l'arête à double courbure, ne ſont pas ſitués les uns à l'égard des autres ſuivant les conditions que nous avons expliqué au commencement du ſecond tome, page 4; c'eſt pourquoi lorſque la doële plate, qui eſt une des ſurfaces de piramides tronquées inſcrites dans la ſphere, ne touche la doële ſphérique qu'en trois points, on eſt obligé de chercher la poſition du quatrieme angle du vouſſoir qu'elle ne touche pas, en formant un ſecond panneau en retour de la doële plate.

CHAPITRE IV.

De la rencontre des voûtes coniques entre elles.

NOus devons conſidérer les corps coniques comme les berceaux, ſuivant leurs différentes ſituations à l'égard de l'horiſon; ce qui nous offre pluſieurs combinaiſons des parties des voûtes compoſées de portions coniques. La premiere, lorſque leurs axes ſont horiſontaux. 2°. Loſque l'un eſt horiſontal & l'autre vertical. 3° Lorſque l'un eſt vertical, & l'autre incliné. 4°. Lorſqu'ils ſont inclinés tous les deux.

PROBLEME VI.

Faire la jonction de deux voûtes ou corps coniques en ſituation quelconque.

Premiere ſituation, où les axes des portions coniques ſont communs, dans une même direction horiſontale ou inclinée.

Dans la construction des fortifications, on a souvent occasion de faire des ouvrages de cette espece, l'un est de ces ouvertures qu'on appelle aujourd'hui *embrasures*, & anciennement *canonieres*, parce qu'elles servent à y placer du canon. La seconde, est une façon de former certaines portes extraordinairement biaises. Dans l'une & l'autre ouverture, la jonction des deux portions de voûtes coniques qui la composent ne doit pas faire une arête à double courbure; c'est pourquoi il n'est pas indifférent qu'elles soient coniques arbitraires, parce qu'on a vu au premier livre, lorsque nous avons parlé de la pénétration des cones entre eux, qu'il est plus de circonstances où la rencontre de leurs surfaces forme une courbe à double courbure, que de celles où elle forme une courbure plane.

PREMIER CAS.

Canoniere ou embrasure à mettre du canon, dans un mur en talud ou à-plomb.

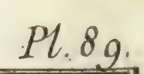
En traitant des voûtes coniques simples, au tome précédent, nous avons donné la maniere de faire chacune des deux portions de cones tronqués qui composent l'embrasure, l'une depuis le parement extérieur, qui est ordinairement en talud, jusqu'au *collet*; l'autre depuis le parement intérieur, qui est ordinairement à plomb, jusqu'à la tête du même collet, ce qui fait pour l'une une trompe conique en talud, & pour l'autre une trompe conique sans talud. Chacune de ces parties peut aussi être droite ou biaise, sur la direction qui doit être commune, quoique tournée en sens contraire, de la base de l'une au sommet de l'autre. Pour en venir au trait qui concerne la coupe des pierres d'une embrasure à voûter, je pourrois supposer celui de la disposition & de la direction des parties de son plan horisontal; mais comme la maniere ordinaire de tracer une embrasure, lorsqu'elle est biaise, y jette des difficultés pour la construction de la voûte, qui ont souvent embarrassé les appareilleurs & les ingénieurs qui doivent les conduire, il est à propos de faire observer d'où elles viennent, pour fournir le moyen de les éviter.

Soit (fig. 105) DEFG une partie de mur dans lequel on veut établir une embrasure voûtée, dont la surface intérieure GF Pl. 90, *fig.* 105.

Fig. 105. eſt à-plomb, & l'extérieure DE en talud. On commencera par donner à la ligne du milieu MN la direction convenable au canon qu'on y doit placer, pour qu'il batte à l'endroit le plus néceſſaire à défendre, que je ſuppoſerai ici oblique au mur LGF. On déterminera enſuite la profondeur NC du *collet* de l'embraſure AB, au-dedans du parement intérieur, laquelle eſt ordinairement de 15 à 18 pouces, lorſqu'il n'y a point de biais; mais lorſqu'il y a de l'obliquité dans la direction du milieu, il faut y avoir égard, en y ajoûtant la longueur QF, que donne un trait d'équerre nQ ſur la direction NM, à une diſtance nQ, qui ſoit à peu près la moitié de la largeur intérieure de l'embraſure. La profondeur NC du collet AB étant déterminée, on en déterminera auſſi la demi-largeur AC & CB, quarrément ſur la ligne du milieu MN, ſuivant la groſſeur de la piece de canon qu'on y doit poſer, qu'il faut conſidérer, non pas ſuivant ſon calibre, mais ſuivant le métal dont elle eſt compoſée. Dans les batteries des ports de mer, où les canons ſont de fer & de gros calibre, ſouvent de 48 liv. de balle, on ne donne guere moins de trois pieds de collet; à celles de terre, où l'artillerie eſt de fonte & de petit calibre, on n'y en donne quelquefois que la moitié.

Les points A & B étant déterminés de poſition, il faut régler l'ouverture de l'ébraſement DE ſuivant l'épaiſſeur du mur FM, c'eſt-à-dire, que plus le mur ſera épais, plus auſſi l'ébraſement doit augmenter, parce que le ſouffle du canon fait un tourbillon d'air qui s'élargit au ſortir de la bouche, avec une ſi grande impétuoſité, qu'il ébranle les jouées des embraſures, ſi elles ne s'écartent pas aſſez en s'éloignant du collet. La maniere ordinaire de tracer l'ébraſement eſt d'en porter la moitié du milieu M ſur la face, de part & d'autre, en MD & ME; de tirer des points D & E, par les points A & B du collet, les jouées extérieures DA, EB, auſquelles par les mêmes A & B, on mene des paralleles AG, BF, qui forment les jouées intérieures. Cette maniere eſt bonne lorſque l'embraſure eſt droite, & même ſuffiſante lorſqu'elle eſt biaiſe & qu'elle doit reſter ouverte par le haut. Mais ſi elle eſt biaiſe & qu'il faille la voûter, on ne doit pas la tracer de même, pour deux raiſons; la premiere, eſt qu'en prolongeant les jouées, il ſe forme deux ſections de cones inégaux, DSE & GsF, dont les axes SM & sn, ne ſont plus dans la direction don-

née



101.

101. +

102.

103.

Picquet Sculp.

née NM; par conféquent n'ayant pas les axes communs, l'arête de rencontre des voûtes extérieure & intérieure ne pourroit être un cercle, ni une ellipfe, mais une courbe à double courbure. La feconde, c'eft qu'on ne peut faire les jouées intérieures paralleles aux extérieures oppofées, fans jetter de l'irrégularité dans les voûtes coniques du dedans & du dehors, parce que la direction du milieu NM leur doit être commune, & par conféquent l'axe des deux cônes tourné en fens contraire, qui doivent avoir pour fection plane, (auffi commune) le ceintre du collet AHB. Or, cette fection AB n'étant pas au milieu de MN, ni parallele aux bafes DE, FG, ni même fous-contraire, parce qu'elle eft perpendiculaire à l'axe, il fuit que les deux cônes ne peuvent avoir leurs côtés paralleles aux oppofés, parce qu'ils ne font pas femblables, & qu'au cas qu'on les voulût faire paralleles, la voûte deviendroit un compofé de quatre quarts de cônes inégaux, qui feroient des angles rentrans à la clef de la face intérieure & de l'extérieure, quand même la fection AB leur feroit commune, par la fuppofition, ce que l'on doit éviter. *Fig.* 105.

Pour le démontrer, il n'y a qu'à prolonger toutes les jouées jufqu'au milieu donné MN, & l'on verra qu'elles doivent toutes couper cette ligne en différens points; favoir, DA en N, & EB en R. De même, à l'ébrafement intérieur, GA coupe NM au point *s*, & *f*B en H, parce que les angles alternes DNH, *f*HN doivent être égaux, ainfi que les angles G*s*R, MRE, & l'angle DNM eft plus grand que MRE, par conféquent ces moitiés de triangles inégaux appartiendront à des cônes différens. Il faut donc tracer l'embrafure, qu'on doit voûter différemment de celle qui ne doit pas l'être.

Ayant déterminé le collet, comme nous avons dit, en AB, perpendiculairement à la direction donnée, qui coupe le parement extérieur du mur en M, on menera par ce point la ligne OP, parallele à AB. Puis ayant donné en MP la moitié de l'ébrafement d'une embrafure droite, on aura les points P & O, par lefquels on tracera les jouées AO, & BP, qui couperont, étant prolongées où il le faut, la face extérieure du mur en *x* & en E; enfuite par les points A & B on tirera des paralleles AG, BF, aux jouées extérieures, & l'embrafure fera tracée. Lorfque l'obliquité eft affez grande pour alonger la jouée AG beaucoup plus que fon oppofée BF, on eft obligé de faire un cran en enfoncement dans le mur, comme

on voit en LKF, afin d'ôter la partie faillante en G, qui empêcheroit qu'on ne pût aſſez avancer le canon en batterie, parce que la roue de l'affût du côté de G pourroit moins avancer que l'autre, qui doit être pouſſée juſqu'en F.

Fig. 106. Le plan horiſontal de l'embraſure étant tracé, il faut régler le profil. On fait ordinairement l'appui *m* C de niveau, & la plongée CM plus ou moins inclinée, ſuivant la poſition de l'objet auquel on doit viſer, obſervant que la voûte & la plongée ſoient éloignées de la bouche du canon, pour que l'impétuoſité de ſon ſouffle n'y puiſſe pas ébranler les pierres ou les briques, comme je l'ai vu dans quelques places maritimes; car il faut obſerver que ce ſouffle fait plus d'effet dans les embraſures de maçonnerie, que dans celles de faſcines & de ſauciſſons, qui lui cedent un peu par leur reſſort. L'embraſure étant tracée dans toutes ſes parties, & les hauteurs des clefs des ceintres, relativement à celui du collet que nous prenons pour le primitif, parce que c'eſt la partie la plus importante, on aura pour objet de conſtruction deux portions de cônes tronqués comme celles de deux trompes inégales, juſques à leurs trompillons, leſquelles ſont jointes par le ceintre commun du collet, lequel ayant été pris pour primitif, déterminera le contour des deux autres de face extérieure en talud, & intérieure à-plomb, comme il a été dit au ſecond tome, pag. 241. Il ne s'agit plus que de la jonction de ces deux voûtes par des vouſſoirs qui faſſent partie de l'une & de l'autre doële, ce qui ſe fera par le moyen des biveaux de doële plate, de la même maniere que nous l'avons dit pour les rencontres des berceaux & des voûtes ſphériques, ſuivant notre maniere générale, dont voici l'application au cas préſent, de la fig. 105.

Fig. 105. Ayant fait la projection des joints de lit à l'ordinaire, & celle de la rencontre des deux doëles plates du dehors & du derriere du collet, par exemple, au ſecond rang des vouſſoirs, au-deſſus de l'impoſte en 3, 4, ou 1, 2, on prolongera la corde 1, 2 du collet juſqu'à la rencontre du diametre AB, qu'elle rencontrera en O, par lequel & par les ſommets des cônes *s*, R, on tirera des lignes *s* O' K, RO' V, qui ſeront les ſections des deux doëles avec l'horiſon. Par le moyen de ces deux ſections de doëles plates avec l'horiſon, on trouvera facilement les biveaux de leur rencontre; ce que nous allons faire hors de la figure, pour ne pas l'embrouiller de trop de

lignes & de chiffres. Sur A B prolongée au-delà du point O', *Fig.* 105.
on portera la retombée 1 *q* en O' Q, où l'on élevera une perpendiculaire Q 2, égale à la hauteur de la retombée *q* 2. Sur O' 2 on tirera, par le point 2, une perpendiculaire 2 *x*, qui coupera O' Q prolongée en *x*, par où l'on tirera à la même O' *x*, une perpendiculaire qui coupera les ſections de l'horiſon S K en K, & R V en V. Sur O' *x* prolongée, on portera la longueur *x* 2, de *x* en X, d'où l'on tirera les droites X K, X V; l'angle K X V, ſera celui que l'on cherche, pour aſſembler les deux doëles plates de l'ébraſement extérieur avec l'intérieur, leſquelles donneront la poſition des quatre angles de chacune des doëles coniques, que l'on doit enſuite creuſer à l'ordinaire, comme il a été dit pour ces ſortes de ſurfaces. Par le moyen de ce biveau & de ceux de lit & de doële de chacune des voûtes coniques en particulier, on taillera le vouſſoir d'enfourchement de la même maniere que nous l'avons dit pour tous les traits précédens des voûtes compoſées.

Il y a une ſeconde maniere de faire les voûtes d'embraſures, à peu près comme la *corne de vache* & *le biais paſſé*, qui eſt d'ébaucher les vouſſoirs comme ſi c'étoient des portions de berceaux; ce que nous allons expliquer au trait ſuivant.

SECOND CAS.

Porte biaiſe en corne de vache double adoſſée, dont la doële eſt coudée en angle ſaillant, & qui s'ouvre de plus en plus depuis les impoſtes à la clef, dont le milieu eſt en ligne droite.

Dans le trait précédent tous les lits étoient briſés en angle ſaillant & rentrant, & la doële coudée au collet, ou également, ou avec peu de différence d'une impoſte à l'autre; ici, nous voulons que les lits ſoient plans, ſans briſure, & que la doële ſoit inégalement coudée depuis l'impoſte à la clef, qu'on veut en ligne droite à ſon milieu, pour ne rien diminuer de la hauteur du paſſage, & le reſte par d'autres raiſons de conſtruction que je vais expoſer. Il ſe trouve quelquefois des paſſages ſi obliques, dans les ouvrages de fortifications, qu'on ne peut en faire les portes aſſez biaiſes pour en ſuivre la direction, & cela par deux raiſons. La premiere; parce qu'une des arêtes d'un jambage devient ſi aigue qu'elle n'a aucune force; de ſorte qu'elle peut être facilement écornée en la taillant ou en la

Fig 110. poſant, & ce qui eſt pire, par le moindre choc des choſes qu'on fait entrer. L'autre, parce que ſi l'on donnoit aux vouſſoirs de la porte la direction biaiſe ſans correction, ils pouſſeroient au vuide d'un côté, comme on le peut voir par l'exemple de la fig. 110, où la perpendiculaire M 9, ſur le milieu de la direction de la clef N *n*, pouſſe au vuide en 9; de ſorte que l'arcade pourroit tomber, ſi la clef n'étoit appuyée par une longue queue M *n*. Pour remédier à cet inconvénient, il convient d'émouſſer les angles aigus, l'un en dedans, l'autre en dehors, & de changer la direction des joints de lit, pour la rendre moins oblique & conſerver le niveau des joints de tête au devant & au derriere.

Soit, le rhomboïde I B V T, (fig. 110) le plan horiſontal d'une baye de porte biaiſe, ſuivant la direction de ſon milieu N *n*, qui fait avec la face A B d'un côté l'angle aigu A N *n*, & de l'autre l'angle obtus *n* N B. Ayant déterminé l'épaiſſeur du jambage & la place de la feuillure D F G où ſe doit loger la fermeture de la porte à angle droit, on diviſera l'épaiſſeur D *t* ou I D du tableau en deux également en *m*, par où on menera la ligne *m m*, parallele à A B, qui coupera les tableaux en *x* X, d'où on tirera les lignes *x* A & X E perpendiculaires ſur les faces A B du devant & F *f* du derriere, qui donneront les points A & E, & pour plan horiſontal de chaque piédroit une ſurface coudée A *x* D, B X E, au lieu des tableaux droits I D & B *u*. Par les points A & D, on tirera la ligne A D, & par le point B, ſa parallele B E, que l'on prendra pour les directions des piédroits, ſans égard à l'angle ſaillant de leur tableau.

Par les points *x*, X, on tirera des paralleles à D A & B E, qui couperont la face A B, en *a* & *b*. Sur *a b* comme diametre, on décrira le demi-cercle *a* H *b*, & ſur A B pour grand axe, & C H pour moitié du petit axe, on décrira la demi-ellipſe A H B. Puis ayant diviſé ce ceintre en ſes vouſſoirs, par exemble, ici en 3, aux points 1, 2, & tiré ſes joints de tête, 1, 3, 2, 4, qui couperont le demi-cercle *a* H *b* aux points 5, 6, on abaiſſera des perpendiculaires de ces diviſions ſur A B, qu'elles couperont aux points *p* & *p*, par où on tirera les directions des joints de lit *p s*^{r}, *p s* paralleles à A D & B E.

Ayant prolongé ces directions, on leur fera une perpendiculaire D^r R, qui les coupera aux points D^r 5^d, 6^d R, qui ſeront les projections du diametre de l'arc-droit D^r *h* R, formé comme

Fig. 110.

aux berceaux biais, pour avoir l'angle de lit & de doële $R\,6^r\,4^r$, ou $D^r\,5^r\,9^r$. On abaiſſera du point 5 une perpendiculaire $5\,q$ ſur AB, qui la coupera au point q, par où on menera $q\,Q$ parallele à AD, qui coupera la ligne mm au point Q, l'angle $p\,Q\,s^r$, ſera la projection du joint de lit, lequel angle eſt plus ouvert que celui de la doële briſée au lit inférieur $A\,x\,D$, & qui ſeroit plus fermé que celui du lit au-deſſus, s'il y en avoit un, parce qu'il s'ouvre de plus en plus, en approchant de la clef, où il s'évanouit au milieu Cc, qui eſt une ligne droite. *Fig.* 110.

Il nous reſte à tracer les panneaux de lit & ceux de doële. Le panneau de doële plate doit être fait comme pour un vouſſoir de berceau ſimplement biais, dont la projection eſt parallelograme $a\,q^5\,r\,k^1$. Ayant tiré la diagonale $q^5\,k^1$, (fig. 111) on la portera en $q\,k$ ſur AB, & l'on tirera $k\,5$, qui ſera la valeur de cette diagonale, par le moyen de laquelle on formera le panneau de doële comme il a été dit au 2e. livre, page 383, en faiſant deux triangles égaux ſur cette baſe commune, avec la corde de la tête $a\,q^5$ & la projection d'un joint de lit $q^5\,r$, ou $a\,k^1$: tels ſont les triangles $k^1\,a\,q^5$, & $q^5\,r\,k^1$ qui forment le parallelograme $a\,r$, que l'on cherche. On formera de même le panneau de lit en abaiſſant du point 3 de l'extrados une perpendiculaire ſur AB, qui coupe ici cette ligne en y; ſi l'on tire $y\,3^n$ parallele à $q\,s^r$, on aura le parallelograme $y\,q\,s^r\,3^n$, qui ſera la projection du lit qu'on formera, de même que celui de doële plate, par le moyen d'une diagonale $q\,3^n$, qu'on portera ſur AB de q en t, & la différence des hauteurs des points 5 & 3, qui eſt $o\,3$, ſera portée en $q\,d$; la ligne $d\,t$, ſera la valeur de la diagonale $q\,3^n$, par le moyen de laquelle on formera comme ci-devant le parallelograme $3\,5\,5^n\,3^n$, (fig. 112) dont les côtés $3\,3^n$, $5\,5^n$ ſont égaux à la projection $q\,r$, & les côtés 3, 5, & $3^n\,5^n$ ſont égaux au joint de tête 3, 5 de l'élévation de la face, à la fig. 110. Pour achever de former ce panneau de lit, il faut porter la longueur 5, 1 de l'élevation en $5\,1^e$ du panneau ſur le devant, & $5^n\,1^n$ ſur la feuillure (fig. 112); puis du milieu Q de la ligne $5\,5^n$, on tirera les lignes $Q\,1^e$, $Q\,1^n$ qui formeront l'angle $1^e\,Q\,1^n$, qui eſt le joint de lit que l'on cherche pour déterminer l'inclinaiſon mutuelle des deux parties de la doële plate qui s'ébraſe en dehors & en dedans.

Fig. 111.

Fig. 110 & 112.

Application du trait ſur la pierre.

Ayant dreſſé un parement pour ſervir de doële plate, on y appliquera le panneau pour en tracer le contour. Puis avec
Fig. 110 & 112. le biveau de lit & de doële pris à l'arc-droit en R 6^r 4^r, on abattra la pierre pour former les lits, ſur leſquels on appliquera les panneaux qui leur conviennent; ſavoir, *k a i*, F G L, pour le lit de deſſous, & 3 5 5^n *f g* T, (fig. 112) pour celui de deſſus; poſant les points 5 5^n ſur 9^r *q* 5 de la doële, & les angles *a* & *i* du lit de deſſous, en *k* & 1 de la doële. Après avoir ainſi formé les têtes, on y appliquera le panneau de l'arc du ceintre primitif *a* 5, ſuivant lequel on creuſera la doële comme s'il s'agiſſoit d'un ſimple berceau biais.

Cette doële étant ainſi creuſée, on y menera une courbe parallele à l'arête extérieure, en y traînant la longueur *a x* quarrément au milieu. Puis on prendra le panneau de tête 3, 1, A *k*, qu'on reculera au lit de deſſus, de la longueur 1, 5, & à celui de deſſous de la longueur A *a*; dans cette ſituation, on tracera l'arc 1 A ſur le devant, entre lequel & la ligne courbe tracée en travers dans la doële, comme nous venons de le dire, on abattra la pierre à regle appuyée quarrément ſur ces deux arcs; ſavoir, A 1 à l'arête extérieure, & *a* 5 au milieu de la doële, & l'ébraſement extérieur ſera formé. On en uſera de même pour l'intérieur, s'il n'y a point de feuillure à ménager, mais s'il y en a une, comme dans cet exemple, il faudra la tracer parallelement à l'arc 1 A, & quarrément ſuivant la profondeur, après quoi on formera l'ébraſement intérieur, comme nous venons de le dire.

USAGE.

J'ai fait exécuter deux de ces portes dans des réduits de places d'armes rentrantes, où le paſſage du ſouterrein eſt auſſi oblique qu'on le voit à la fig. 110, parce que l'angle flanqué & celui de la gorge ſont extrêmement obtus. Dans l'une, j'ai fait les
Fig. 110. joints de lit en angle ſaillant & rentrant, comme en *p* Q s^r, pour plus de ſolidité, afin que la pouſſée du vouſſoir, dans la moitié de ſon épaiſſeur, fût preſque directe. Dans l'autre, j'ai mis en œuvre le trait tel que je l'ai donné ici, pour rendre l'o-

pération plus ſimple; mais n'ayant pû veiller continuellement à l'exécution, elle n'a pas été bien correcte, parce que, faute d'apareilleur, j'étois obligé de m'en rapporter à un mauvais tailleur de pierres qui tournoit indifféremment le panneau de ceintre elliptique comme s'il avoit été circulaire; c'eſt à quoi il faut prendre garde avec attention, parce que les ouvriers n'entendent pas à fond ce qu'on leur fait faire, quoiqu'ils le diſent ſouvent de bonne foi, & ſouvent par vanité; ce qui m'a engagé de tracer moi-même la troiſieme que j'ai fait exécuter.

Pour donner une idée de l'application de ce trait à la formation d'une embraſure, j'ai deſſiné en perſpective à la fig. 114 un vouſſoir ébauché en berceau & achevé en deux portions de cônes inégaux. *Fig.* 114.

Idée d'une nouvelle corne de vache double.

On appelle aſſez mal à propos *corne de vache double* une voûte cylindrique qu'on appelle auſſi *biais paſſé*, au lieu que la corne de vache eſt une voûte conique; ainſi la *double* doit être un composé de deux voûtes coniques qui ayent des impoſtes paralleles entr'elles, comme le biais paſſé, & qui ayent pour ſection par l'axe à l'impoſte des triangles rectangles ABS, & DE*s* comme la corne de vache; telle eſt la voûte deſſinée à la fig. 113, dans laquelle on voit que les deux ſurfaces de ces voûtes ſe rencontrent ſuivant une demi-ellipſe deſſinée en perſpective en DMB; on a dit au premier livre, (tome I, page 127, fig. 79) pourquoi cette arrête courbe étoit plane elliptique, & non pas à double courbure. Le grand axe de cette ellipſe eſt donné à la diagonale DB du plan horiſontal, & l'on aura la moitié de ſon petit axe en tirant par le milieu *m* de cette diagonale une ligne FG, parallele à AB, qui coupera le côté D*s* d'un des cônes en I, & l'autre BS en L; la moyenne proportionnelle entre I*m* & G*m* ſera la moitié du petit axe que l'on cherche, que nous avons placé en M*m*. *Fig.* 113.

Je ne crois pas néceſſaire d'entrer ici dans le détail de la conſtruction d'une telle voûte, dont je ne vois d'application à l'uſage qu'au cas qu'on eût un paſſage biais à voûter entre deux ceintres de face égaux, entre leſquels il ſe trouveroit quelque empêchement de continuer la clef de niveau d'une face à l'autre.

Corollaire.

Voûte d'arête conique.

De cette composition de deux voûtes coniques, en en peut tirer une de quatre portions de cônes, qu'on pourroit appeller *voûte d'arête conique*, dont les Auteurs n'ont jamais parlé, quoiqu'elle soit possible & même convenable dans une circonstance telle que celle dont je viens de parler, supposant que la fig. ADEB du plan horisontal soit un rhombe parfait, & non pas un rhomboïde ; car s'il se trouvoit de l'inégalité dans les côtés, elle ne seroit pas praticable, parce que les cônes deviendroient inégaux entr'eux, par conséquent leurs arêtes seroient des courbes à double courbure ; ce qui est une difformité dans les voûtes d'arête, où elles doivent se bornoyer en ligne droite d'une imposte à l'autre. Je ne m'arrêterai pas non plus à la construction de cette voûte, dont l'usage ne peut guere tomber en pratique que par un cas bien extraordinaire, & qui est d'ailleurs plus foible qu'une voûte d'arête cylindrique, en ce que la clef de la croisée est plus basse que celle des formerets ; d'où il suit qu'elle reçoit une partie de leur charge.

Explication démonstrative.

Pour bien entendre les deux traits de l'embrasure & de la corne de vache double, qui sont des pénétrations de portions de demi-cônes scalenes, il faut se représenter des cônes entiers, emboîtés les uns dans les autres, comme nous les avons représentés aux fig. 104, 106, 107, 108 & 109 ; & parce qu'il s'agit de cônes scalenes, une seule représentation ne peut suffire pour montrer les différentes positions de leurs parties ; c'est pourquoi, pour exprimer l'origine de l'embrasure considérée dans son plan horisontal, on a dessiné en perspective la
Fig. 104. projection horisontale à la fig. 104, où l'on voit un petit cône *i s f*, qui en pénetre un plus grand *d e* S *t*, tourné en sens contraire. Or, comme ces cônes sont de différentes especes, le petit étant droit & le grand scalene, la courbe d'intersection *a h b* seroit à double courbure, si cette courbe n'étoit déterminée en arc de cercle, ce qui rend le grand cône intrinséquement de même nature que le petit ; car quoiqu'il paroisse scalene par l'obliquité

l'obliquité de la baſe *d t e* ſur l'axe S *s t*, la ſection *a h b* perpendiculaire à ſon axe, eſt par la conſtruction un cercle, par conſéquent ſa baſe *d t e* ne peut être qu'une ellipſe. Les deux repréſentations des ſections verticales miſes en perſpective font voir que la projection horiſontale (fig. 104) reſtant la même, les cônes qui ſe pénetrent peuvent encore être en différentes ſituations. *Fig.* 104.

Premierement, l'axe commun *s* S C peut être horiſontal, comme lorſque l'on prend naiſſance de la voûte de l'ébraſement extérieur ſur une ligne de niveau avec la genouillere & celle de l'ébraſement intérieur; alors les deux cônes ſont intrinſéquement droits, & l'extérieur eſt coupé obliquement par le talud du mur en T L. Dans cette conſtruction, les piédroits ou jouées de l'embraſure au-deſſous de ce niveau ſont des ſurfaces planes, triangulaires, verticales, & tangentes au cône P *q r*, parce que le plan rampant de la plongée coupe le cône au-deſſous de ſon axe de niveau; par conſéquent l'arête de la face extérieure de l'embraſure rentreroit en elle-même, parce qu'elle ſeroit plus grande qu'une demi-ellipſe, ce qui ne convient pas à la commodité du pointage, parce que le canon ne doit pas toujours être directement au milieu de l'embraſure; on doit avoir la liberté de le tourner un peu à droite ou à gauche, quand on le juge à propos; on ne voit d'embraſures rondes que dans les vieilles fortifications: on peut voir à la fig. 116 (planche ſuivante) les deux différentes eſpeces de bayes d'embraſures, la ronde en haut & la mixte en deſſous. *Fig.* 106.

Secondement, l'axe commun peut être incliné à l'horiſon, comme à la fig. 107, & alors, ſuppoſant encore la courbe d'interſection *a h b* plane & circulaire, les deux cônes ſont encore rendus par la conſtruction intrinſéquement de même eſpece, en ce qu'ils ſont tous deux également ſcalenes, leurs axes étant également inclinés en ce ſens à la ſection commune circulaire. Dans cette conſtruction, la voûte de l'ébraſement prend directement ſa naiſſance ſur le plan incliné de la plongée, ſans qu'il ſoit néceſſaire d'y ajouter deux parties planes tangentes au cône. *Fig.* 107.

Préſentement, pour en venir à l'explication de notre corne de vache double, il faut remarquer qu'elle differe de la figure des embraſures, en ce que les cônes, dont ſa doële comprend deux parties, n'ont pas comme aux embraſures leurs axes communs,

c'est-à dire sur une même ligne droite, quoiqu'ils paroissent *Fig.* 108 & 109. les avoir ainsi dans la projection horisontale, mise en perspective à la fig. 109, où les axes S^e C, & s^a *e* ont une partie commune C *e*; mais ces axes sont inclinés entre eux, comme l'on voit au profil, mis en perspective à la fig. 108, où ils sont représentés par les lignes s^e G & s^a *g*, qui se croisent en K. Au lieu d'avoir leurs axes sur la même ligne, ils ont un côté commun en C *e* sous le milieu de la clef, dans la ligne s^a s^e, qu'on suppose une ligne droite, ce qui fait voir la nécessité de deux représentations de plan & de profil, pour donner une juste idée de la position des cônes scalenes. Quant à notre invention d'une *Fig.* 113. nouvelle *corne de vache double*, exprimée à la fig. 113, on peut voir la figure de la position respective des cônes au premier tome, page 127, & à la figure 79 de la planche 7, ce qui suffit pour en donner une juste idée.

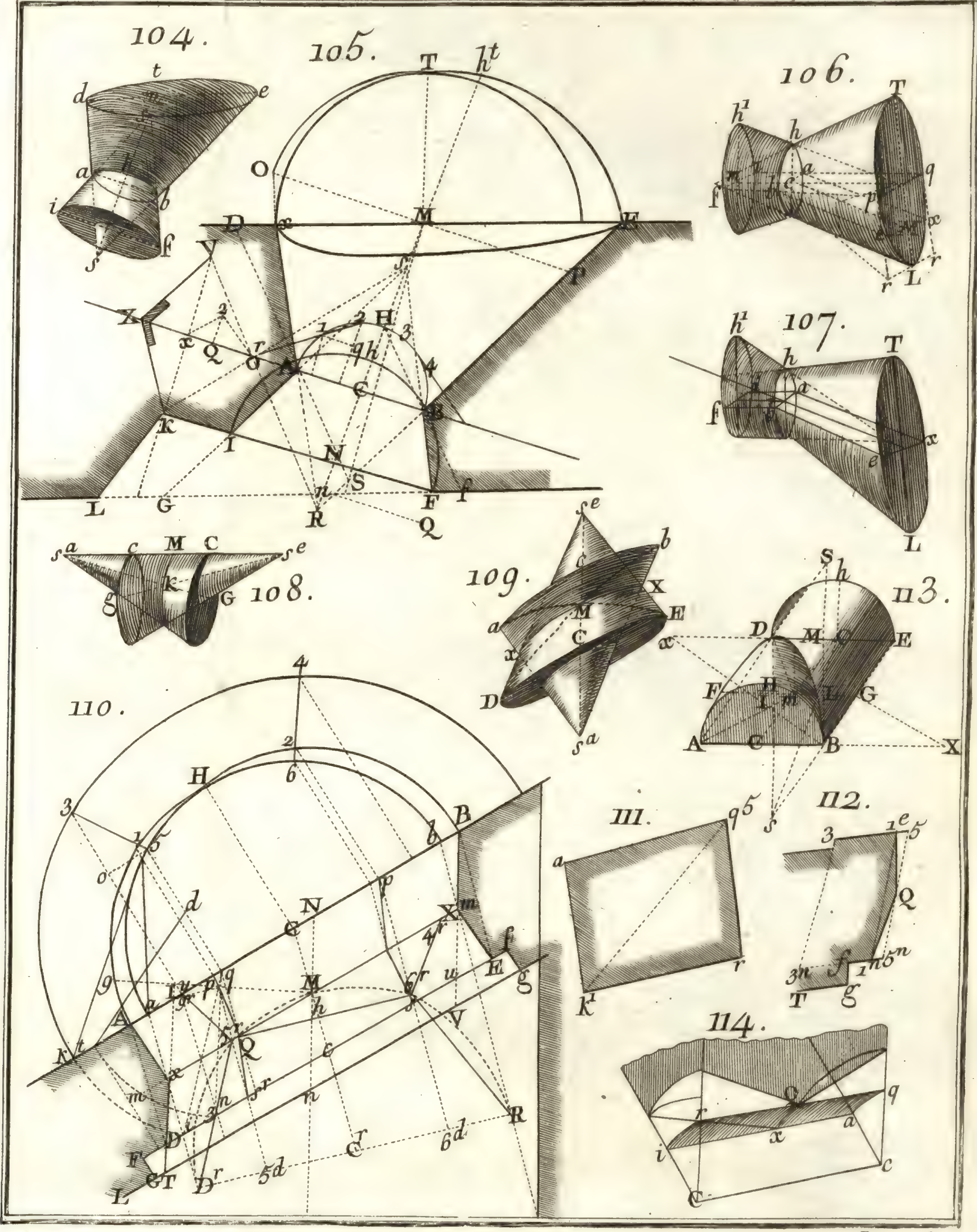
Deuxieme situation, où les axes des cônes ont des directions différentes, par exemple, l'une verticale, l'autre horisontale.

Porte ébrasée,

Trompe ou canoniere en tour ronde, ou creuse en talud.

Dans le trait précédent, nous avons considéré la jonction des doëles coniques au *collet* de l'embrasure, ou à celui de la porte en corne de vache double. Ici nous cherchons la courbe de l'arête de rencontre d'une seule doële avec le parement conique Pl. 91. d'une tour ronde ou creuse, laquelle est une portion de cône *Fig.* 116. tronqué vertical.

Fig. 115. Soit, fig. 115, la demi-couronne de cercle DTEKLI, la base d'une tour en talud par dehors, laquelle est percée d'une ouverture ébrasée ABGF, qu'il faut voûter. Ayant tiré la corde AB, on lui menera une parallele *ab*, tangente au cercle DTE, qui le touchera en T, puis on prolongera de part & d'autre les directions des piédroits AF & BG, jusqu'à ce qu'elles concourent en S, où sera le sommet du cône horisontal de l'embrasure, & en dehors en *a* & *b* pour avoir le diametre de sa base *a b*, sur lequel on décrira le demi-cercle *a t b* pour ceintre primitif, qu'on divisera en ses voussoirs aux points 1, 2, 3, 4, desquels on tirera les perpendiculaires 1 p^1 2 p^2, &c. à l'ordinaire. Par les projec-



Picquet Sculp.

tions des divisions p^1, p^2, &c. on tirera des lignes droites au sommet S, p^1 S, p^2 S, p^3 S, &c. qu'on prolongera indéfiniment au-delà de S, lesquelles couperont l'arc FG en q, r, u, V. Du point C, qui est le centre de la base de la tour, on tirera des perpendiculaires sur chacune des projections de lit p^1 S, p^2 S, &c. qui les rencontreront aux points 1^r, 2^r, 3^r, 4^r. On portera toutes les longueurs C 1^r, C 2^r, C 3^r, C 4^r en R^1, R^2, R^3, R^4, sur la base DE, par lesquels on tirera les verticales R^1 V, R^2 V, &c. *Fig.* 115.

On fera ensuite le profil de la tour suivant l'inclinaison de son talud CDO, & ayant porté la hauteur MH du ceintre primitif en C c^8, on divisera cette hauteur en autant de points qu'on en voudra avoir aux arcs des hyperboles qu'on doit tracer pour chercher les projections de l'arête extérieure de la tour & de l'embrasure; supposons seulement en quatre, aux points C^5, C^6, C^7, C^8. On menera par ces points des paralleles à la base DE, qui rencontreront le côté de la tour DO aux points d^5, d^6, d^7, d^8, & les verticales R^1 V, R^2 V, &c. aux points 5, 6, 7, 8. Des points C^5, C^6, &c. comme centres, & de la longueur de chaque horisontale C^5 d^5, C^6 d^6, &c. pour rayons, on décrira des arcs de cercles en dessus ou en dessous, qui couperont les verticales R^1 V, R^2 V aux points 1, 2, 3, 4, & chacune en des points x^5, x^6, x^7, x^8. Présentement il faut tracer les arcs des quatre hyperboles que formeront à la surface de la tour des plans verticaux passant par les projections des joints de lit de la voûte S p^1, Sp^2, &c. lesquelles rencontrant ces joints de lit dans la voûte, y déterminent autant de points de l'arête de rencontre de la doële de la voûte avec le parement de la tour. Il nous suffira de chercher un de ces points, par exemple, celui qui répond au point 4 du ceintre primitif. On prendra la longueur 5 x^5, qu'on portera sur l'horisontale en 5 Y^5, ensuite 6 x^6 en 6 Y^6, 7 x^7 en 7 Y^7, &c. & par les points Y^5, Y^6, Y^7, on tirera à la main une courbe qui sera un arc de l'hyperbole qu'on cherche. *Fig.* 115.

Il faut présentement faire le profil du joint de lit qui doit la couper. On prendra la longueur 4^r p^4, qu'on portera de R^4 en P^4, sur l'horisontale DE. On élevera au point P^4 une verticale P^4 V^4, qu'on fera égale à la hauteur de la retombée p^4 4 du ceintre primitif. On portera ensuite la longueur 4^r S de C en R, & l'on tirera l'inclinée R 4^f, qui sera le profil du joint

de lit, lequel coupera l'arc d'hyperbole qu'on vient de faire au point *y*, qui eſt celui que l'on cherche ; duquel ſi l'on abaiſſe une perpendiculaire ſur DE qui la coupera en *t*, on aura par ce moyen la projection de ce point, qu'on portera à la projection de la voûte de p^4 en t^4 ſur la ligne Sp^4.

Fig. 115.

Par la même méthode, on cherchera les autres points t^3, t^2, t^1, pour tirer par ces points la projection de la courbe de l'arrête de la tour en A*m*B par le moyen de laquelle on pourra tailler chaque vouſſoir par équarriſſement, ou ſi l'on veut par panneau, comme toutes les voûtes coniques dont on a la projection de l'arc de face à double courbure, en cherchant les diagonales des panneaux, comme il a été dit au IIIe livre & en pluſieurs traits ci-devant, particuliérement dans celui de la trompe, ou canoniere, en tour ronde ou creuſe à plomb. On peut en effet ébaucher la tête du vouſſoir comme s'il étoit à-plomb ſur une partie du contour de la courbe de projection trouvée A*m*B, puis ſe reculer de la quantité que le talud donne par une ſeconde courbe qu'il faut chercher par le moyen d'un extrados ; ou bien, pour plus grande facilité, faire au lieu d'extrados une portion de lit horiſontal, ſur lequel on tracera l'arc de cercle du reculement que donne le talud ſur la hauteur qu'il y a depuis le plus haut de la doële à l'extrados.

Ce moyen a cette commodité qu'il diſpenſe du ſoin de faire les panneaux de lit, parce qu'après avoir formé la tête & la doële plate, ou le lit horiſontal des retombées, dont on fait uſage pour opérer par équarriſſement, il ne s'git plus que de former les lits, ou avec les biveaux d'à-plomb & de lit, ou avec les biveaux de lit & de doële, & en abattant la pierre pour former le lit, ſa tête au parement de la tour ſe forme, comme par haſard, en une portion d'arc elliptique qui eſt la ſection du lit dans la tour conique. On peut auſſi opérer, au contraire, en faiſant la doële & un parement à plomb avec le biveau d'à plomb & de doële au lit de deſſus, ſur lequel on appliquera un panneau coupé ſur l'arc hyperbolique qui a ſervi à tracer l'épure, pour trouver le point de l'arête du lit de deſſus ; cet arc donnera le reculement de la tête à l'extrados, & par conſequent le moyen de poſer ſur le lit ſupérieur horiſontal, l'arc de cercle qui en donne le reculement de niveau. Tout cela ſuppoſe un peu d'intelligence dans le fond du trait, pour mettre un trait à-plomb à ce panneau, où il doit ſervir à le

poser par le moyen d'un biveau de joint de lit & d'à-plomb. Le reculement de l'extrados sur l'arête du joint de lit de dessous ne peut se trouver par le moyen d'un panneau coupé sur l'arc hyperbolique, mais par une cerche où l'on mettra aussi un à-plomb pour le poser par dehors, ayant soin de la dégauchir suivant l'arête de lit & de doële.

Remarque sur l'erreur de l'ancien trait.

Quoique ce trait soit fort usuel dans les bâtimens militaires, M. de la Rue n'en dit rien, & le P. Derand en donne un qui ne vaut rien, sous le nom de trompe en tour ronde & en talud; il convient lui-même qu'il n'y observe pas la justesse des opérations géométriques, pour ne pas le rendre trop difficile, *parce*, dit-il, *qu'il y auroit un grand embarras de discours & de lignes pour arriver à celle qui pourroit être tenue en ces rigueurs pour la vraie*; il se contente, ajoute-t-il, du nécessaire pour la pratique, laissant *le curieux à ceux qui auront un dessein plus ample que celui qu'il s'est proposé*, c'est-à-dire, à moi, qui ne suis pas d'avis qu'on doive donner une opération fausse pour la rendre facile. Si l'on veut savoir en quoi consiste la fausseté de son opération, il faut remarquer qu'il ne prend pas les reculemens du talud sur des plans passans par l'axe de la tour, ce qui les augmente évidemment, parce qu'alors la section de la tour n'est plus une ligne droite, mais une courbe hyperbolique; car on sait qu'il n'y a de section droite dans le cône que celle qui passe par le sommet; or les lignes de reculement n'y passent point, donc elles ne sont pas des lignes droites.

Au reste, il me semble que le trait que je viens de donner pour opérer juste, n'est pas plus composé & embarrassé de discours & de lignes que celui du P. Derand pour le faire faux; je ne sais même s'il n'est pas plus simple, puisqu'il ne consiste que dans l'intersection d'un triangle, qu'il faut nécessairement faire pour trouver la valeur du joint de lit, de quelque maniere qu'on opere, & d'un arc hyperbolique dont la construction est des plus faciles. Quant à la voie que le P. Derand prend pour faire des têtes égales, en rectifiant le contour de la base de la tour pour faire son ceintre primitif du ceintre développé, elle n'est d'aucune conséquence pour la perfection de l'ouvrage; car la régularité de la figure de la doële qui résulte du ceintre primitif de surface plane pris à la base du cône, est préférable à la petite

inégalité qu'il produit ſur les têtes ; au lieu que le ceintre primitif ſuppoſé en développement du cône, produit une irrégularité dans le contour de la doële. Si l'on vouloit abſolument des têtes égales, il faudroit toujours opérer, comme nous avons fait, par le même ceintre primitif de la baſe, & après avoir fait le développement du cône, on y traceroit celui de l'arête par le moyen de la projection trouvée comme il a été dit au probl. 14 du IIIe livre, & ſur ce développement, on feroit de nouvelles diviſions des têtes des vouſſoirs autant égales qu'on le ſouhaiteroit.

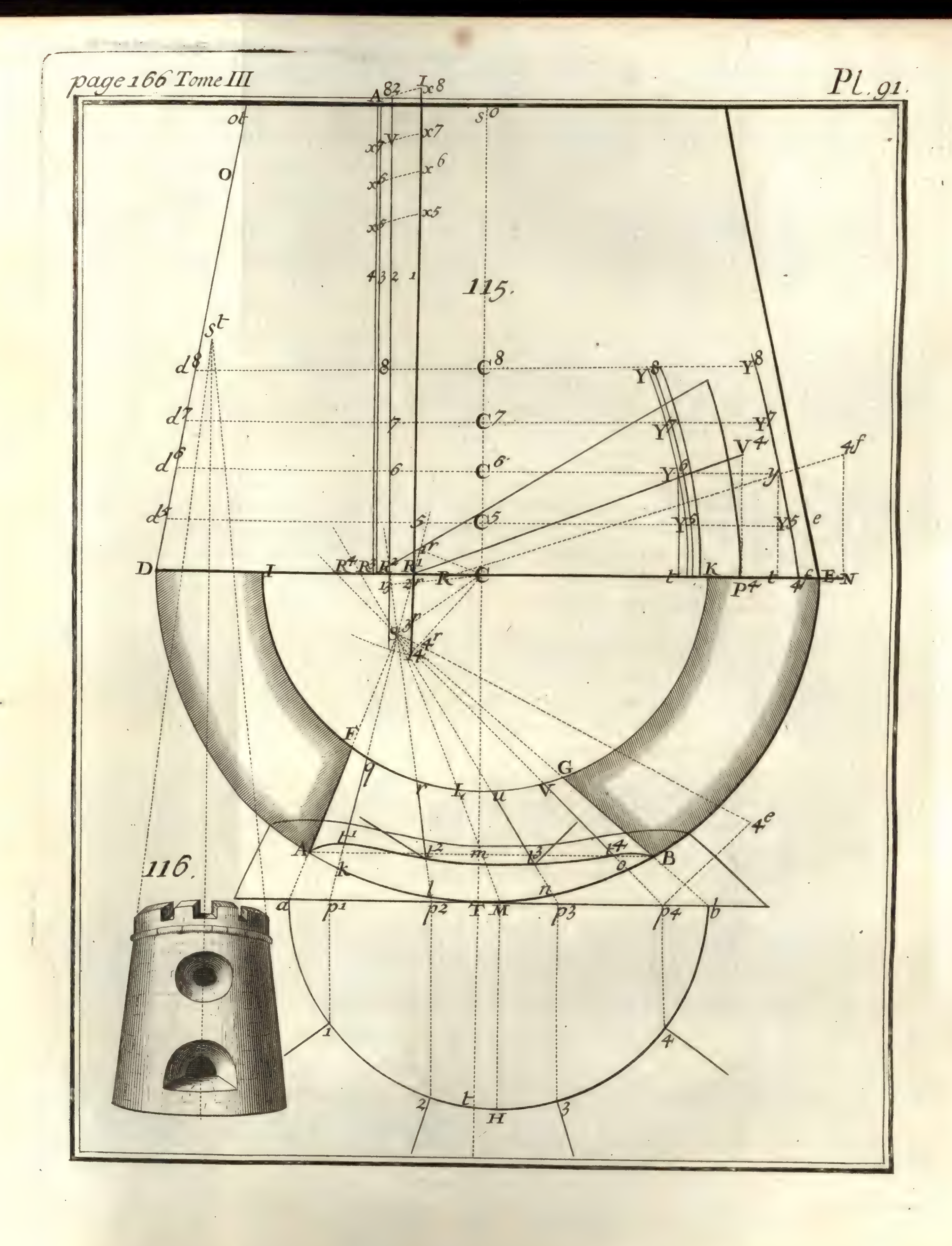
Explication démonſtrative.

Si l'on ſuppoſe des plans verticaux paſſans par les projections des joints de lit de la voûte, il eſt clair que tous ceux qui ne paſſeront pas par l'axe de la tour, étant prolongés s'il le faut, ne feront pas à ſa ſurface des ſections rectilignes, mais des hyperboles ; par conſéquent l'arête de rencontre de la ſurface de la doële & de celle de la tour ſera toujours à l'interſection d'un triangle qui eſt la ſection du plan vertical paſſant par le ſommet S de la voûte conique, & d'une hyperbole qu'il forme à la ſurface de la tour. Or il eſt viſible que, pour avoir l'éloignement du plan de cette hyperbole de l'axe du cône vertical, il faut mener une perpendiculaire de cet axe ſur le plan coupant, comme l'on a fait en C 1^r, C 2^r, &c. & que portant cette diſtance ſur la baſe horiſontale DE, à diſtance égale du centre C, & tirant une parallele à l'axe comme $R^1 V$, $R^2 V$, &c. chacune de ces paralleles repréſentera l'axe de l'hyperbole dans le cône, dont les ordonnées ſeront égales à des moyennes proportionelles entre les ſegmens DR^1, & R^1E à la baſe, ainſi qu'aux ſections paralleles à cette baſe, entre les ſegmens d^5 5, & 5 e, ainſi des autres ; ce qui a été fait par le moyen des arcs, & qui eſt exact, comme il a été démontré au problême 37 du IIe livre.

CHAPITRE V.

De la rencontre des voûtes coniques avec les ſphériques.

LE nombre des combinaiſons de rencontre de la ſphere avec le cône ſe réduit à deux cas. 1°. Lorſque l'axe du cône paſſe par le centre de la ſphere. 2°. Lorſqu'il n'y paſſe pas.


115.
116.

PROBLEME VII.

Faire une voûte conique quelconque qui rachete une voûte ſphérique.

PREMIER EXEMPLE.

Lunette ébraſée ou reſſerrée droite, biaiſe, ou rampante, dans une voûte en cul-de-four ſphérique ou ſphéroïde.

Soit (fig. 117) l'arc S *a* *b* D, l'impoſte d'une voûte ſphérique, laquelle eſt percée d'une voûte conique, dont la projection horiſontale ſeroit le triangle ACB, ſi elle étoit complette & droite, mais dont il n'y a que la partie A *a* X *b* B voûtée, le reſte *a* C *b* X étant dans le vuide de la ſphere. Sur AB, comme diametre donné, on décrira le ceintre primitif AHB, circulaire ou elliptique, qu'on diviſera en ſes vouſſoirs aux points 1, 2, 3, 4, par leſquels on abaiſſera des perpendiculaires ſur AB, pour en avoir la projection en p^1, p^2, p^3, p^4: nous ne diviſerons que la moitié BH, pour faire ſervir l'autre AH de profil, ce qui ſuffit lorſque la projection de la doële conique eſt droite, c'eſt-à-dire lorſque ſon axe *c* C paſſe par le centre C de la ſphere, où nous le ſuppoſons ici terminé, parce que les deux côtés de la clef ſont égaux entre eux. On tirera par le point C, ſommet du cône, qui ſe trouve auſſi, par ſuppoſition arbitraire, au centre C de la ſphere, les projections des joints de lit Cp^3, Cp^4, dont on portera les longueurs ſur la ligne CH, qu'on prendra pour baſe des profils qui doivent donner la valeur de ces projections, leſquelles ſont plus courtes que les véritables joints de lit. On portera donc C p^4 en C*d*, & C p^3 en C *e*. Par le point *d*, on élevera une perpendiculaire df^4 qu'on fera égale à la hauteur 4 p^4, & par le point *e* une autre ef^3 égale à 3 p^3, puis on tirera la droite f^4 S, ſuppoſant que la lunette ſoit rampante, & que le ſommet du cône, qui étoit dans la projection en C, ſoit au profil en S, au milieu de la clef de la voûte ſphérique, ce qui eſt cependant arbitraire & au gré de l'architecte, qui peut le mettre où bon lui ſemblera, en deçà ou en-delà, plus haut ou plus bas. Pl. 92, fig. 117.

Suppoſant donc le ſommet du cône en S, on tirera les lignes AS, f^3 S, f^4 S, qui couperont le profil de la voûte ſphérique *c* *x* S

Fig. 117. en x, y, z, d'où l'on abaissera des perpendiculaires sur CH, qui donneront leurs projections de profil X, Y, Z. On portera la longueur CY sur la projection horisontale C p^3, où elle donnera le point y^3, & Cz sur Cp^4 en z^4; puis par les points X, y^3, z^4, & b, on tracera à la main une ligne courbe Xy^3 z^4 b, qui sera la projection de l'arête de rencontre de la lunette conique avec la doële sphérique. Il est visible que nous supposons ici une voûte parfaitement sphérique, parce que nous prenons pour son profil un quart de cercle c x S; mais si elle étoit en cul-de-four, surbaissée ou surhaussée, au lieu de ce quart de cercle il faudroit faire le quart d'ellipse qui conviendroit à sa section verticale; l'intersection de cette ellipse avec les profils des joints de lit donneroit de même les points x, y, z, pour l'arête d'enfourchement des deux voûtes conique & sphéroïde, supposant la voûte sphéroïde réguliere, oblongue ou applatie, & formée par la révolution d'une demi-ellipse autour de son axe vertical. Mais si elle étoit formée par la révolution d'une demi-ellipse autour de son axe horisontal, alors il faudroit un quart d'ellipse différent à chaque projection de joint de lit pour en faire le profil, & trouver les points x, y, z, par leur intersection avec les vrais joints de lit, qui sont des côtés droits de la voûte conique; alors l'arc c b D ne sera plus un arc de cercle, mais d'ellipse, ce qui est clair.

Quoique nous ayons supposé la direction de la lunette droite par sa projection, en sorte que son axe passe par le centre C, il pourroit arriver par quelque situation bizarre qu'elle fût biaise, comme en c G, alors on ne peut plus faire les profils comme nous venons de les faire, avec des arcs de cercle majeurs, ni faire servir une moitié pour l'autre. Supposons la ligne du milieu donnée, c'est-à-dire la projection de l'axe du cône en c G, & la hauteur de son sommet, dont le point G est la projection, en g. On tirera par les points donnés p^1, p^2, p^3, p^4, des lignes droites au point G, au-delà duquel on les prolongera jusqu'à la rencontre de l'imposte de la voûte sphérique en i I K K, puis on tirera sur chacune de ces lignes des perpendiculaires du centre C, qui les couperont aux points m^1, m^2, m^3, m^4. On fera ensuite les profils des sections qui seroient faites par des plans verticaux passans par les projections des joints de lit, prenant pour base RQ; ces profils auront tous pour hauteur commune gR. On portera la longueur Gp^4 en Rq^4, où l'on élevera une perpendiculaire

perpendiculaire q^4 4°, égale à la hauteur 4 p^4, & l'on tirera la droite 4° g, qui sera la valeur du quatrieme joint de lit, dans lequel il faut trouver un point x^4, qui soit l'intersection de la sphere. On prendra la longueur G m^4, qu'on portera de R en n^4, d'où, comme centre, de l'intervalle m^4K, pour rayon, on décrira un arc de cercle qui coupera la ligne 4° g au point x^4 que l'on cherche. On trouvera de même les autres points de la projection de l'arête d'enfourchement des deux doëles de la lunette & du cul-de-four. *Fig.* 117.

Il est encore visible qu'on suppose le cul-de-four sphérique, & non en sphéroïde ; car s'il étoit allongé ou applati, il faudroit chercher les ellipses de chacune des sections qui seroient faites par les plans verticaux passans par la projection des joints de lit, pour laquelle opération il faut avoir recours à ce que nous avons dit au probl. II du second tome, page 33. La courbe a X b de projection horisontale de l'arête d'enfourchement, & les longueurs des joints de lit dans la lunette A x, f^3 y, f^4 z étant données, on aura tout ce qui est nécessaire pour former les panneaux de doële plate conique, & pour tailler la pierre ; supposant qu'on veuille faire le développement de ces panneaux, on aura tous les côtés des triangles que formeroient les doëles, si elles étoient prolongées jusqu'au sommet.

Ayant tiré une ligne du milieu de la clef où l'on voudra, par exemple en C c^d, fig. 118, on la fera égale à AS de la fig. 117, sur laquelle on prendra CX^d égale à S x de la fig. 117 ; ensuite du point C pour centre, & de la longueur S y pour rayon, on décrira un arc y Y, sur lequel on portera de part & d'autre la demi-corde Y y^3 de la fig. 117, pour avoir les points y, Y du développement. Sur les côtés C y, CY prolongés, on portera la longueur f^3 y en y 2 & Y 3 ; le pentagone irrégulier y X^d Y 3, 2 y, sera le panneau de doële plate de la clef. On continuera de même pour avoir les autres panneaux des voussoirs suivans 1 z y 2, a^d z 1 A^d, qui seront plus simples, n'étant que des quadrilateres, supposant que la lunette a sa base sur un mur droit AB ; car si elle est établie en tour creuse, les panneaux des impostes seront des triangles mixtes a^d z u, b^d Z V, & le développement de toute la lunette sera un triangle curviligne a^d X^d b^d, au-lieu que dans le premier cas sa figure est un pentagone irrégulier curviligne A^d a^d X^d b^d B^d c^d A^d. *Fig.* 117 & 118.

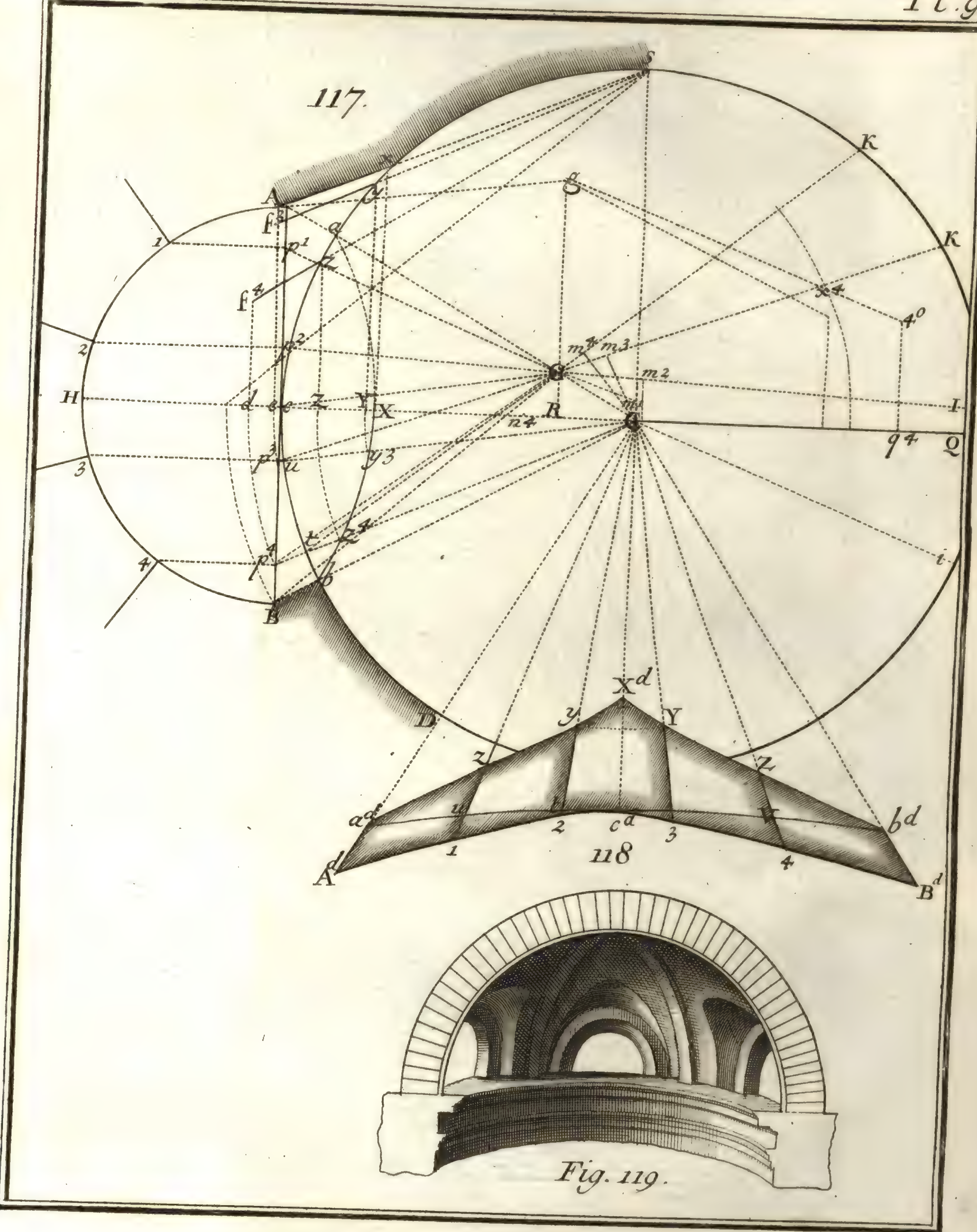
Les panneaux de doële plate de la lunette étant donnés par ce

Fig. 117 & 118. trait, & ceux de la voûte ſphérique par le trait qui lui eſt propre, on pourra former les vouſſoirs d'enfourchement de la même maniere que ceux de la lunette cylindrique dans un cul-de-four, comme il a été dit, page 128 de ce troiſieme tome. On peut de plus ſe ſervir ici des biveaux mixtes donnés aux profils par les angles $f^4 z x$, $f^3 y x$ S, & A x S, poſés à la branche droite ſuivant la direction des arêtes des joints de lit de la lunette, & la branche courbe dans un plan vertical dirigé au pole S.

L'application du trait ſur la pierre peut ſe faire par la voie des panneaux, comme dans tous les enfourchemens des rencontres des voûtes dont on a les doëles plates & les biveaux de rencontre; ce que nous avons répété pluſieurs fois dès le commencement de cette ſeconde partie. L'application du trait par équarriſſement ſe fera auſſi par le moyen de la courbe de projection horiſontale, ſur laquelle on élevera une ſurface concave quarrément, dans laquelle on placera les hauteurs des retombées, comme il a été dit au troiſieme livre, tome 1er, page 364, pour toutes les arêtes qui ſont courbe à doubles courbure; enfin les biveaux de lit & de doële de la lunette ſe feront comme à toutes les voûtes coniques. On a deſſiné au bas de la planche, (fig. 119) la vue en perſpective des lunettes coniques rampantes dans une voûte ſphérique, à peu près comme elles ſont à la fameuſe chapelle du Pantheon de l'Eſcurial, où ſont les tombeaux des Rois d'Eſpagne. Je les ai auſſi diſpoſé de même dans la voûte de celle du nouvel hôpital que MM. de Haguenau vont faire bâtir ſur les deſſeins que je leur ai donné, charmé d'aider de mes conſeils un illuſtre magiſtrat, zélé pour l'utilité publique. Quoique ces ſortes de lunettes ſoient fort uſuelles, le P. Derand & M. de la Rue n'en ont rien dit.

Explication démonſtrative.

La conſtruction de ce trait eſt ſi ſemblable dans ſon principe à la précédente, qu'on pourra l'y reconnoître facilement. On ſuppoſe des plans verticaux paſſans par les joints de lit de la lunette, qui font une ſection triangulaire dans le cône & une circulaire dans la ſphere; comme cette derniere eſt ordinairement d'un cercle mineur, parce qu'elle paſſe rarement par ſon axe, on a tiré des perpendiculaires ſur toutes ces ſections en C m^1, C m^2, &c. pour avoir les centres de ces cercles en m m^2, &c. La raiſon en eſt claire, par les élémens de géométrie, où il


117.
118
Fig. 119.

eſt dit que la perpendiculaire tirée ſur une corde, la coupe en deux également, & donne la poſition du centre à l'égard du ſommet du cône, par l'intervalle S m^1, ou Sm^2 &c. Si la lunette, au lieu d'être circulaire à ſa baſe, c'eſt-à-dire à ſon ceintre primitif A H B, étoit ſur-hauſſée ou ſur-baiſſée, il ne ſe feroit d'autre changement au trait que celui du plus ou du moins de hauteur des retombées.

SECOND EXEMPLE.

Abajour en O biais ébraſé & rampant, tombant dans une voûte ſphérique.

Ce trait n'eſt proprement qu'une inverſe du précédent, tournant le cône différemment, en ſorte que ſon ébraſement vienne du dehors au dedans de la voûte ſphérique, au lieu qu'au trait précédent il étoit dirigé du dedans au dehors. La ſeconde différence eſt qu'ici le contour du cône eſt entier autour de ſon axe, & qu'au trait précédent ce n'étoit qu'une moitié; mais comme ces différences ne ſont d'aucune conſéquence, & qu'il eſt cependant à propos de parler de ce trait, dont le P. Derand n'a rien dit, non plus que du précédent: je vais le traiter d'une nouvelle maniere, que l'on pourra, ſi l'on veut, appliquer auſſi au précédent; elle paroîtra même plus facile. Pl. 93, *fig.* 121.

Soit (fig. 120) le cercle ou la portion de cercle P B O le plan horiſontal d'une voûte ſphérique dont le centre eſt C; pour ne pas trop étendre la figure, nous ferons ſervir l'arc *e o* pour la projection horiſontale, & l'arc P *e* pour la verticale, & parce qu'il s'agit principalement de l'inclinaiſon du cône de l'abajour, nous commencerons à régler le profil. Ayant tracé à volonté les deux lignes A D, B E, l'une pour la clef ſupérieure, l'autre pour l'inférieure, partant des deux points D, E, donnés pour l'intervalle du diametre de l'ouverture extérieure de l'abajour; on prolongera ces lignes juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent en S, où ſera le ſommet du cône. Sur D E, comme diametre, on décrira le ceintre primitif, ou ſeulement une moitié D 3 E, ce qui ſuffit, parce que l'autre lui eſt égale, & l'ayant diviſé en ſes vouſſoirs, enſorte qu'il y en ait une moitié en D 1, & une autre en E 5, pour moitié des clefs, on menera des perpendiculaires au diametre D E, qui le couperont aux points f^1, f^2, f^3, f^4, & par tous ces points & le ſommet S, on menera *Fig.* 120.

Fig. 120. des lignes indéfinies S*q*, S*r*, S*s*, S*t*, S*u*, qui feront les projections verticales des joints de lit d'une moitié de l'abajour, dont il faut trouver les vraies longueurs, celles de ce profil n'étant pas encore les réelles; mais elles sont nécessaires pour les trouver, comme l'on verra ci après. Par les points *h*, *i*, *k*, *l*, *m*, *n*, pris à volonté sur la ligne AD, on menera autant de paralleles à DE, prolongées indéfiniment, comme *h* 1 *z*, *i* 2 *z*, *k t* 3, *l z*, *m*T, *n z*, qui couperont le rayon C*e* de la sphere, perpendiculaire à DF, aux points Y, Y, Y, l'arc vertical P*e* de son cercle majeur aux points H, I, K, L, M, N, & l'axe du cône SX, aux points *c*, *c*, &c. De tous les points *c*, *c* pour centres, & pour rayons les parties de ces paralleles qui sont dans le cône *c n*, *c m*, &c. on décrira des arcs de cercles; & de tous les points Y, Y, pour centres, & pour rayons les parties de ces paralleles qui sont dans la sphere, on décrira d'autres arcs de cercles qui couperont les précédens aux points *x*, *x*, desquels on menera des perpendiculaires à chaque parallele où l'on a pris les centres qui ont donné les points *x*, *x*, lesquelles les couperont aux points *y*, *y*. Par exemple, sur la ligne Y*k*, du point *c* pour centre, & *c k* pour rayon, on décrira un arc de cercle 7 *x*, & sur la même ligne Y *k*, du point Y pour centre, & pour rayon la longueur YK, qui est dans la sphere, on décrira un autre arc de cercle *x* 8, qui coupera le précédent au point *x*, par où on menera sur YK une perpendiculaire *x y*, qui coupera YK au point *y*, qui est un de ceux de la projection verticale. On trouvera de même tous les autres points *y*, *y*, par lesquels on tracera à la main une courbe A*yyy*, &c. B, qui coupera les projections verticales des joints de lit S*q*, S*r*, S*s*, S*t*, S*u*, aux points *q*, *r*, *s*, *t*, *u*.

Les longueurs des perpendiculaires *x y*, *x y*, serviront ensuite à trouver la projection horisontale de la même arête de rencontre des voûtes coniques & sphériques, dont la courbe A*yy* B est la projection verticale; il n'y a qu'à porter toutes ces perpendiculaires *xy*, *xy*, sur les lignes *y z* qui leur appartiennent, ausquelles elles se terminent, à commencer au rayon C*e*. Par exemple, sur la ligne *h*Y, prolongée au-delà de C*e*, on portera la longueur *y* 1 *x* de la perpendiculaire sur Y 1 *z*, qui donnera le point 1 *z*; de même, la perpendiculaire 2 *x*, *y* en Y 2 *z*, qui donnera ce point 2 *z*, ainsi des autres de suite; & par tous les points *a*, projection du point A sur C*e*, & les

ſuivans $1z$, $2z$, $t3$, z, T, z, e, on tracera à la main une ligne courbe qui ſera la projection horiſontale de l'arête d'enfourchement des deux voûtes, laquelle ſervira à déterminer les longueurs des projections horiſontales des joints de lit, dont on a beſoin pour en faire les baſes des ſeconds profils qui en donnent les véritables longueurs. *Fig.* 120.

Du point S ayant abaiſſé une perpendiculaire ſur ED prolongée en p^s, on portera la longueur S p^s en c^p S^p ſur le rayon C e prolongé au-delà de DF, qu'il coupe perpendiculairement en c^p, où ſera le centre d'un quart de ceintre primitif F d, qu'on y répétera avec ſes diviſions F 2, 2, 1, & la moitié 1 d, qui repréſentera celle du profil ſupérieur D 1. Par les points 1 & 2, ayant abaiſſé des perpendiculaires ſur c^p F, qui couperont ce rayon aux points p^1, p^2, on menera par ces points p^1, p^2 & par le ſommet S^p, les lignes S^p Q, S^p R, S^p W, qui couperont la courbe de projection horiſontale de l'arête d'enfourchement aux points Q, R t^3 T, V, les longueurs S^p Q, S^p R, S^p t^3, S^p T & S^p V ſeront les projections horiſontales de la moitié des joints de lit de l'abajour, qui ſerviront à en trouver les véritables longueurs, comme il ſuit. Par les points q, r, s, t, u de la projection verticale, on menera des paralleles indéfinies à C e comme $r\,o^r$, $s\,o^s$, $t\,o^t$, $u\,o^u$; enſuite ayant pris la ligne S^p C pour baſe de tous les profils, on portera la longueur S^p Q en S^p a^p, & par le point a^p on élevera une perpendiculaire à cette baſe, qui coupera la parallele paſſant par le point q en un point qu'on n'a pas marqué, parce qu'il tombe ſi près de q, qu'on ne peut le diſtinguer.

On portera de même la longueurs S^p R en a^p, c'eſt-à-dire tout près, (car on fait ſervir ce ſigne a^p pour trois points différens, qui tombent ſi près qu'on n'a pas de place pour les déſigner par différens caracteres) & ayant élevé une perpendiculaire à la baſe, qui coupera la parallele paſſant par le point r, au point o^r, la longueur o^r S ſera la vraie longueur d'un joint de lit qui ſe feroit dans un cône entier; mais parce qu'il eſt coupé par le plan DE, on tirera la ligne o^r S qui coupera DE au point f^2; la vraie longueur de ce joint de lit à la ſurface de la doële de l'abajour ſera $o^r\,f^2$. On trouvera de même la vraie longueur des joints dont p^1 V & p^2 T ſont les projections horiſontales; mais comme le point t^3 de l'attouchement du joint du côté repréſenté au premier profil par la ligne S c n'eſt pas bien déterminé,

Fig 120. il faudra mener par le point s, où ce joint coupe la courbe AyyB, la ligne $s\,t^3$, qui coupera S^p F, prolongée en t^3, où eſt le point d'attouchement; ainſi portant la longueur $S^p\,t^3$ en S^p O, comme le marque l'arc de cercle t^3 O, on élevera à ce point O la perpendiculaire O o^s, qui coupera la parallele $s^y\,o^s$ au point o^s; d'où tirant une ligne au ſommet S, la longueur $o^s\,n$ ſera celle du joint de lit $s\,c$, qui étoit raccourcie par la projection verticale; ainſi des autres.

Ayant trouvé les véritables longueurs des joints de lit de l'abajour, il ne ſera pas difficile de faire les panneaux de doële plate, ſoit en particulier, ſoit tout de ſuite, en forme de développement, comme on a fait ici pour une moitié de droite ou de gauche de l'abajour. Premierement, (par le probl. 14 du troiſieme livre) on fera le développement des cordes de la baſe du cône ſcalene SDE, qui donnera la courbe D $3^d\,e^d$, par le moyen des points trouvés 1^d, 2^d, 3^d, &c, comme il ſuit. Supposant que l'on commence le développement au point D, quoiqu'il ne doive pas être pris au milieu d'une doële, parce que la corde D 1 n'eſt pas dans la doële plate de la clef F 1, mais il n'importe, il ne s'agit que de montrer une pratique qu'on applique où l'on veut pour la fin qu'on ſe propoſe.

Ayant porté la longueur P^s 1 ſur P^s E en $P^s\,f^1$, comme le marque l'arc de cercle f^1 1: on prendra la diſtance f^1 S, de laquelle, pour rayon, & du point S pour centre, on décrira un arc vers 1^d; & prenant la longueur de la corde D 1 pour rayon, du point D pour centre, on décrira un arc qui coupera le précédent au point 1^d; enſuite portant l'intervalle P^s 2 en P^s 12, comme le marque l'arc de cercle 2, 12, on prendra la diſtance du point 12 au ſommet S du cône, avec laquelle comme rayon, & du point S pour centre, on décrira un arc vers 2^d; enſuite prenant la corde 1, 2 pour rayon, du point 1^d pour centre, on décrira un arc vers 2^d, qui coupera le précédent au point 2^d, ainſi des autres. Par les points 1^d, 2^d, 3^d, on menera des lignes qu'on prolongera indéfiniment, ſur leſquelles on portera les longueurs des joints de lit de l'abajour, comme n, $o\,r$ en $2^d\,r^d$; n, $o\,s$ en $3^d\,s^d$; n, $o\,t$ en $4^d\,t^d$, ainſi des autres; ce qui donnera les points q^d, r^d, s^d, t^d, V^d, b^d, par leſquels on menera des lignes droites qui acheveront les trapezes des panneaux de doële plate.

Si l'om veut ſe ſervir de panneaux de lit, il faudra faire un

extrados, & trouver ses courbes de projection verticale & horisontale de la même maniere qu'on a fait celles de l'arête de la doële à la face & à l'enfourchement, & trouver encore des points entre la doële & l'extrados aux joints de tête par une supposition d'un ceintre moyen entre la doële & l'extrados, ce qui est long & embarrassant. Mais on peut se passer de panneaux, en trouvant, suivant la maniere générale du problême 14 du troisieme livre, le biveau de doële plate & de lit & celui de doële & de tête plane DE, & enfin pour l'enfourchement dans la voûte sphérique, en suivant la méthode de ceux des descentes qui rachetent une voûte sphérique, (premier probl. de ce livre) où l'on a donné la maniere de trouver le biveau de doële plate de l'une & de l'autre voûte à leur rencontre. *Fig.* 120.

COROLLAIRE I.

De là on tire la maniere de faire, 1°. *l'abajour en talud*; car si l'on suppose une ligne ET, qui soit le profil d'un mur en talud, au lieu de l'à-plomb DE, cette ligne étant prise pour diametre du ceintre primitif, ne fera aucun changement dans la construction, que de rendre le cône scalene SDE moins oblique sur sa base, & d'arrondir davantage l'intérieur de l'abajour; mais alors il faut que les lignes de section soient paralleles au talud de la face, pour qu'elles donnent des cercles: ainsi les lignes *h* Y, *i* Y, *k* Y, &c. ne seront plus alors des verticales, mais des inclinées à l'horison parallelement au talud TE.

COROLLAIRE II.

Il suit aussi de la même construction qu'on peut faire un *abajour en O surmonté*, ou surbaissé, soit que sa face soit à-plomb comme DE, ou en talud comme TE; mais alors les lignes *hc*, *ic*, *k*S, &c. ne seront plus des rayons de cercles, mais des demi-axes d'ellipses semblables à celle du ceintre primitif, dont l'autre demi-axe horisontal sera trouvé en cherchant une quatrieme proportionnelle à D*c*, *nc*, ou *mc*, ou *ic*, &c. & *c* 3, ce qui est clair & facile à appercevoir; alors la construction deviendra un peu plus composée, mais ne changera en rien dans son principe.

Corollaire III.

Fig. 120. Enfin, par le moyen de la même construction, on pourra faire l'*abajour en O biais*, *sans talud* ou *avec talud*; mais alors la moitié de la projection horisontale ne suffira pas, parce que l'autre ne lui est pas égale, & la projection verticale de la courbe de l'arête d'enfourchement A *q r s t u* B ne représentera pas non plus les deux côtés de la clef à droite & à gauche, ce qui sera indiqué par une perpendiculaire à la projection de l'axe s^p, *a s p*. Dans ce cas, il faut commencer par chercher la courbe de la projection horisontale de l'arête d'enfourchement, en coupant le plan horisontal de l'abajour & de la voûte sphérique par des paralleles à la projection de la face d'entrée de l'abajour; & après avoir trouvé cette courbe, on se servira des lignes *x y*, comme des ordonnées à l'axe du cône, c'est-à-dire de l'abajour, qu'on rangera sur les paralleles prolongées depuis le plan horisontal au profil de la projection verticale; ensuite par des profils particuliers, on cherchera les longueurs des joints de lit, les biveaux, &c. comme il a été pratiqué pour les voûtes coniques; ce qui n'a pas besoin d'une plus ample explication.

Cependant comme ce trait paroît fort composé, par la multiplicité des lignes & des opérations pour trouver les valeurs des profils, il est bon d'aider un peu le lecteur à trouver les raisons de la construction, afin qu'il l'entende & l'exécute plus facilement.

Explication démonstrative.

Nous avons donné, au second livre, pour principe général de la maniere de trouver les intersections des corps qui se pénetrent, qu'il faut les supposer coupés par plusieurs plans paralleles entre eux, dont la position, à l'égard des corps coupés, soit telle que les sections dans chacun d'eux deviennent une de ces courbes qui sont les plus faciles à connoître & à décrire, comme le cercle, par préférence, ensuite l'ellipse, ensuite la parabole, & enfin l'hyperbole dans le cône, afin que l'intersection des deux courbes qui se croisent donne facilement les points de l'intersection des surfaces de la sphere & du cône dans le cas présent. Sur ce principe de commodité, nous avons coupé le cône de l'abajour par des plans paralleles à sa face verticale, exprimée

exprimée par le profil DE, parce que cette ligne DE étant le diametre du ceintre primitif donné en cercle ou en ellipſe, toutes les ſections des plans verticaux ſeront des cercles; ou, ſi elle eſt elliptique, elles donneront des ellipſes ſemblables à celle de ce ceintre primitif donné ou pris à volonté ; par conſéquent toutes ſes paralleles, dont le profil donne un axe qui eſt le vertical, ſeront faciles à décrire.

Secondement, puiſque toutes les ſections de la ſphere ſont des cercles dont les rayons ſont donnés par les profils des plans verticaux qui la coupent KY, LY, MY, &c. il eſt viſible qu'il ne s'agit que de trouver l'interſection du cercle du cône ſcalene avec le cercle de la ſphere, ou de l'ellipſe du même cône ſcalene & d'un cercle de la ſphere; mais comme ces joints ſont en l'air, ſitués perpendiculairement au plan vertical du profil, on les a tranſporté au point *x*, en changeant la ſituation du plan vertical ſur celle du papier, ce qui ne change en rien la poſition de l'interſection des lignes courbes trouvées, qui reſtent dans le même rapport de diſtance & de grandeur. Enfin, parce que nous avons ſuppoſé le cône de l'abajour coupé par ſon ſommet S, & par des points de diviſion 1, 2, 3, 4, du ceintre primitif, qui ſont inégalement loin du premier plan vertical paſſant par l'axe du cône, ces plans feront pour ſections des lignes droites, dont la repréſentation ſur le premier vertical eſt raccourcie, parce que ces plans ſont inclinés entre eux; c'eſt pourquoi nous avons été obligé de chercher la valeur de ces ſections droites, qui ſont les longueurs des joints de lit en œuvre.

CHAPITRE SIXIEME.

Des rencontres des voûtes cylindriques, coniques, & ſphériques avec les annulaires.

Premiere combinaiſon des berceaux avec les voûtes ſur le noyau.

PROBLEME VIII.

Faire l'enfourchement d'un berceau en ſituation quelconque à l'égard d'une voûte ſur le noyau.

PREMIER CAS.

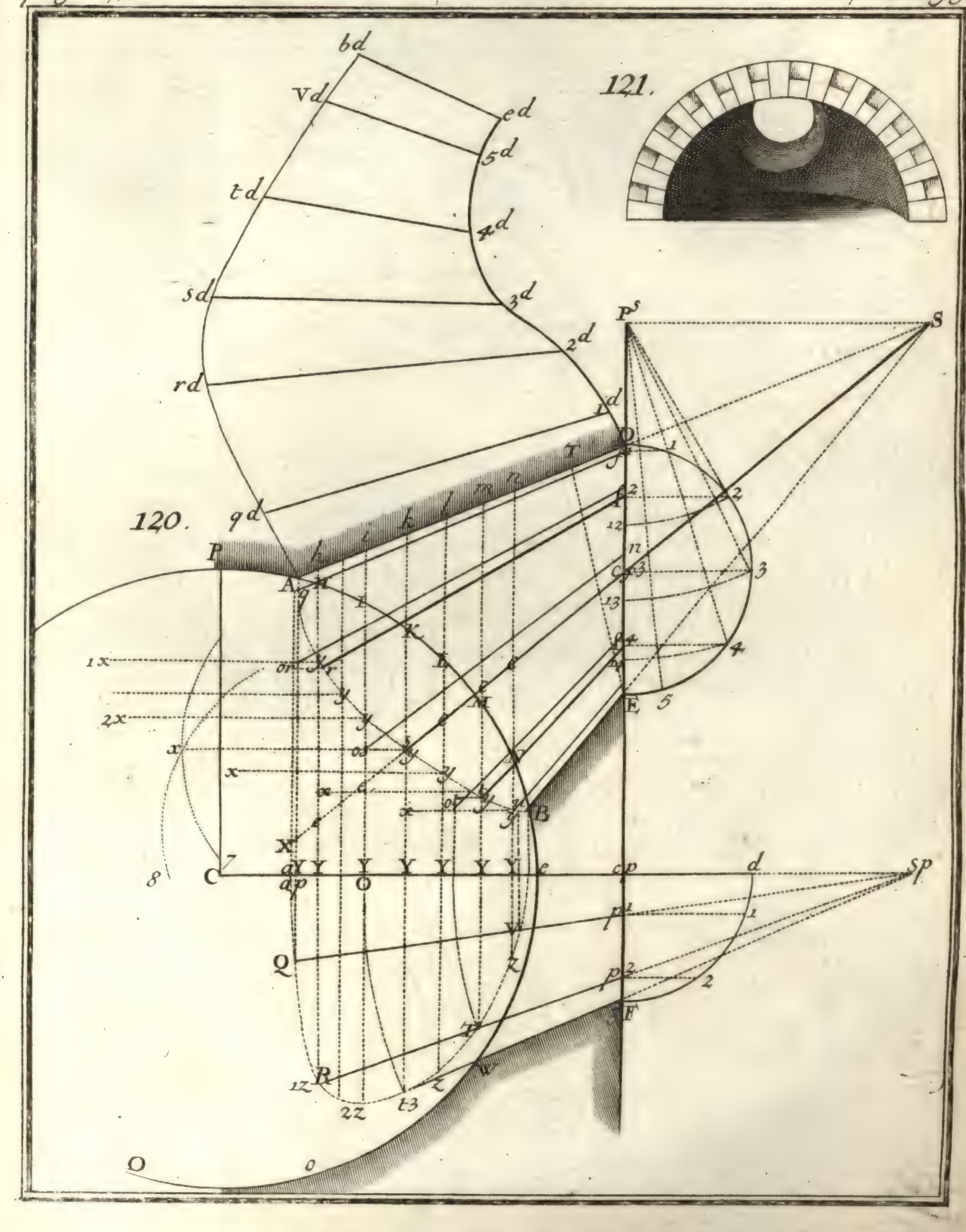
Berceau en ſituation verticale qui rencontre une voûte ſur le noyau.

UN berceau peut être conſidéré en différentes ſituations à l'égard de la voûte ſur le noyau. 1°. Il peut être debout, c'eſt-à-dire en ſituation verticale, comme une tour, & alors il ne peut pas ſe faire d'enfourchement à la jonction de la voûte ſur le noyau avec la tour qui la pénétreroit du côté concave de la clef, parce que les vouſſoirs pouſſeroient au vuide; cependant il s'y formera un angle rentrant, dont le ſommet des ſurfaces formera une courbe à double courbure qu'il ſera facile de tracer, parce que la baſe de la tour en eſt la projection toute trouvée, & les hauteurs de ſes points ſeront données ſur la ſurface cylindrique par les retombées des arcs du ceintre de la voûte ſur le noyau; comme ce cas eſt rare dans la pratique, & qu'il eſt d'une facile exécution, nous ne croyons pas néceſſaire d'en donner un exemple.

SECOND CAS.

Berceau de niveau qui fait lunette droite ou biaiſe dans une voûte ſur le noyau.

Pl. 94. *Fig.* 122. Soit (fig. 122, pl. 94.) les deux arcs concentriques, DNO convexe & EABI concave, les projections des piédroits ou impoſtes d'une voûte ſur le noyau, & les droites A*a*, B*b* celles


120.
121.

d'un berceau horifontal qui la pénetre. Ayant tiré du centre C^n du noyau DNO, la ligne DE, pour diametre de l'arc droit de la voûte annulaire, on décrira fur cette ligne le ceintre de cette voûte, circulaire ou elliptique, furhauffé ou furbaiffé, comme DHE. On tracera de même l'arc droit *a h b* pour le berceau de niveau, qu'on divifera en fes vouffoirs aux points 1, 2, 3, 4, par lefquels on abaiffera des perpendiculaires fur *ab*, qu'on prolongera indéfiniment. On élevera enfuite au point E, une perpendiculaire à DE, comme E 23, qui fera tangente de l'arc droit, fur laquelle on portera les hauteurs *p* 1, *p* 2, des divifions du berceau en E 14 & E 23, par où l'on menera des paralleles à ED, 23 *g*, 14 *f*, qui couperont l'arc HE aux points *g* & *f*, d'où l'on abaiffera des perpendiculaires fur DE qui la couperont aux points P & *p*. Du centre C^n, par les points P & *p* de la ligne DE, on tracera des arcs de cercles concentriques PL, *p l*, qui couperont les projections des joints de lit du berceau aux points F, G, g^3, f^4, par lefquelles on menera des lignes droites qui donneront pour projection des doëles plates de l'arête d'enfourchement le contour AFG g^3 f^4 B, dont on fe fervira pour former la lunette, de la même maniere que nous l'avons dit au probl. V, page 128 de ce volume, de la rencontre des berceaux avec les voûtes fphériques, fans aucune différence; ainfi nous croyons devoir y renvoyer le lecteur, pour éviter les répétitions.

Explication démonftrative.

Si l'on fuppofe des plans verticaux paffans par les projections *p* K, *p* N, des joints de lit du berceau prolongés, il eft clair qu'ils feront pour fection dans le berceau des parallelogrammes dont la hauteur fera égale à p^1, p^2, égale par la conftruction à E 14, E 23, ou *g* P, *fp*, & dans la voûte fur le noyau, ils feront pour fection des ovales du quatrieme ordre, dont nous avons parlé au livre premier, comme KQM, N *q n*, &c. qui couperont les parallelogrammes du berceau aux points *x* & *y*, lefquels feront communs aux deux voûtes. Or ces points feront évidemment & par la conftruction à même hauteur que les points 3 & 4, ou *g* & *f*, & leur projection fera dans l'interfection des arcs de cercle PL, *p l*; donc la projection des divifions de l'arête d'enfourchement des deux voûtes eft bien trouvée, ce qui eft la partie effentielle du trait.

Pour faire l'enfourchement de rencontre d'une tour dans une voûte sur le noyau, il eſt clair que la projection de cet enfourchement ſera donnée dans l'arc de cercle qui ſera la baſe de la tour, compris dans l'intervalle de la rencontre des deux voûtes, ainſi il n'y a pas de difficulté; c'eſt pourquoi nous n'en avons pas fait de figure. Il ne ſera pas difficile d'en faire la projection verticale, car elle ſera la même que la précédente, en différente poſition; il ne s'agit que de ſuppoſer en plan vertical ce qui étoit en plan horiſontal. En effet, il eſt clair que les plans verticaux feront toujours pour ſection dans la voûte ſur le noyau des ovales du quatrieme ordre, & des parallelogrammes debout dans la tour; au lieu qu'au cas précédent ils étoient couchés horiſontalement.

TROISIEME CAS.

De l'enfourchement du berceau en deſcente qui rachete une voûte ſur le noyau.

Fig. 123. Soit (fig. 123) le trapeze mixte NEBD le plan horiſontal d'une portion de voûte ſur le noyau dont le centre du noyau eſt en C^n, auquel ſont dirigés les diametres EN, BD; ſoit auſſi A *a* B *b* la projection horiſontale d'un berceau en deſcente qui pénetre la voûte ſur le noyau ſuivant l'inclinaiſon de l'angle de la rampe donné en RML. Sur *a b*, diametre du berceau, on décrira le ceintre primitif *a h b*, qu'on diviſera en ſes vouſſoirs aux points 1, 2, 3, 4, par leſquels on menera des perpendiculaires à *a b*, qu'on prolongera indéfiniment, leſquelles couperont le piédroit concave de la voûte ſur le noyau aux points F, G, I, K, par leſquels on élevera des perpendiculaires aux projections des joints de lit juſqu'à la rencontre du diametre NE, qu'on prendra pour baſe du profil; ces perpendiculaires couperont cette baſe aux points M, *k*, *t*, *g*, *f*, E. On prolongera enſuite la ligne de face *b a* qui coupera la rampe MR au point R, au-deſſus duquel on portera les hauteurs *p* 1, *p* 2, du ceintre primitif en R 14, R 23; par ces points 14 & 23, on menera des paralleles à la ligne de rampe MR prolongés indéfiniment.

On tracera enſuite, par le probl. XVI du IIe livre, (tome 1er, page 191) les courbes ovales du quatrieme ordre ſur les diametres QF, DG, SI, TK, qu'on tranſportera par des per-

pendiculaires q Q, d D, &c. ſur la baſe du profil C^2 L, par le moyen des hauteurs de l'arc droit DHB de la voûte ſur le noyau; il ne ſera pas même néceſſaire de tracer ces ovales entieres, mais ſeulement la partie qui eſt du côté concave AB où ſe fait la rencontre des deux voûtes. Ces courbes couperont les projections verticales des joints de lit du berceau en des points qui ſeront à l'arête d'enfourchement des deux voûtes, d'où l'on abaiſſera des perpendiculaires ſur les projections correſpondantes des joints de lit du berceau, pour y avoir la projection horiſontale de ces mêmes points. Ainſi l'ovale $q z 1^x f$ coupera la projection verticale du premier & du quatrieme joint 14, 4^x au point 1^x; l'ovale $d z 2^x g$ coupera la projection verticale $2 3 3^x$, du ſecond & du troiſieme joint au point 2^x; l'ovale $S z 3^x t$ coupera la même projection au point 3^x; & enfin la portion d'ovale $t z 4^x k$ coupera la projection du joint 14, 4^x au point 4^x. A l'égard du premier point de l'impoſte x, il ſera donné par l'interſection de l'arc droit circulaire formé ſur le diametre NE ou DB, & de la ligne de rampe MR, qui montre que dans la deſcente qui rachete de biais un berceau, la naiſſance de l'arête d'enfourchement eſt plus haute d'un côté en x que de l'autre en M, comme nous l'avons dit ailleurs en parlant de la rencontre des berceaux entre eux. Fig. 124.

Si par les points x, 1^x, 2^x, 3^x, 4^x, on abaiſſe des perpendiculaires ſur les projections des joints de lit du berceau Qp, Dp, Sp, Tp, les points de leur interſection y^1, y^2, y^3, y^4, donneront la projection de ceux de l'arête d'enfourchement qui proviennent des diviſions 1, 2, 3, 4, du ceintre primitif ahb; & ſi l'on mene des lignes droites ou cordes de l'un à l'autre, on aura pour projection de la rencontre des doëles plates des deux voûtes, le contour A $y^1 y^2 y^3 y^4$ B, dont on fera le même uſage pour former les vouſſoirs, qu'on l'a dit des enfourchemens des berceaux en deſcente avec les voûtes ſphériques; il n'y a aucun changement de conſtruction, c'eſt pourquoi on renvoie le lecteur au probl. V. de ce IIIe tome, page 128. Par exemple, pour le vouſſoir 3, 4, on fera la projection $y^3 u y^4$ V, dont les côtés V y^3 & $y^4 u$ ſeront dirigés au centre du noyau C^n, paſſant par les points y^3 y; & les côtés y u, y V ſeront les cordes des arcs concentriques à AB paſſant par les mêmes points y & y^4, & terminées aux lignes tendant au centre C^n, qui ſont des joints de tête de la voûte ſphérique, & ſur le noyau.

Les mêmes arcs terminés en P & p au diametre D B de l'arc
Fig. 123. droit D H B de la voûte sur le noyau, donneront la position des à-plombs 3^n P, 4^n p de la hauteur des joints de lit circulaires, à la doële de ladite voûte, dont on fera usage, comme il a été dit au problême cité.

USAGE.

L'exécution de ce trait se voit assez fréquemment dans les églises dont le chevet est à bas côtés tournans, sous lesquels on fait souvent des chapelles souterreines qui tirent le jour par des abajours de berceaux en descente.

Seconde combinaison de la rencontre des voûtes coniques avec les annulaires.

Nous avons dit au tome précédent, en parlant des annulaires, qu'on peut considérer leur moitié simplement concave, comme une partie de voûte en cul-de-four surbaissé, & que leur partie du côté du noyau qui est *concavo-convexe*, c'est-à-dire concave dans sa direction verticale, & convexe dans sa direction horisontale, pouvoit être considérée comme une suite de cônes tronqués renversés, dont la pointe est en bas dans l'axe du noyau, au contraire des voûtes sphériques considérées suivant ce systême, où les cônes ont leur sommet en dessus du plan horisontal dans l'axe de la sphere ou du sphéroïde; suivant ce principe il ne sera pas plus difficile de trouver les intersections des surfaces coniques avec les annulaires que des coniques entre elles. On peut aussi les trouver par des sections de plans paralleles, comme dans les exemples précédens; mais il en résulte des courbes un peu longues à décrire: telles sont les ovales du quatrieme ordre dans l'anneau, & les hyperboles dans le triangle; il faut tâcher, pour la facilité de l'opération, de n'en avoir qu'une des deux à décrire, & un cercle ou un triangle pour l'autre.

122.

123.

PROBLEME IX.

Faire une voûte conique qui rachete une annulaire.

En termes de l'art,

Lunette droite ou biaiſe, ébraſée en dehors ou en dedans d'une voûte ſur le noyau.

Les lunettes les plus convenables aux voûtes ſur le noyau ſont les coniques ébraſées en dehors qui ont leur ſommet de direction prolongée au centre C^n du noyau de la voûte annulaire. 1°. Parce que dans cette poſition la lunette eſt droite, c'eſt-à-dire, que ſon axe eſt perpendiculaire à la tangente de l'anneau tirée par le point où cet axe en coupe la circonférence, d'où il réſulte de la régularité dans la lunette. 2°. Parce que la rencontre de l'impoſte de la lunette avec celle de la voûte ſur le noyau, ou du cercle qui lui eſt parallele, ſi les impoſtes ſont de hauteurs inégales, fait l'angle le plus droit qu'il eſt poſſible, & que ces angles ſont égaux entre eux, de ſorte qu'il n'y a point d'obliquité. Il pourroit cependant arriver, par quelque raiſon de ſymmétrie extérieure, comme celle d'une égalité de fenêtres ou de vitraux, qu'on ſeroit obligé d'élever la lunette en ſens contraire du dehors au dedans, comme en X H *b*, pour augmenter le jour intérieurement. Pl. 95, *fig.* 124.

PREMIER CAS.

Soit (fig. 124) l'arc A M B une portion concave de voûte ſur le noyau, dont le piédroit convexe eſt Q G, & le quadrilatere mixte A D E B le plan horiſontal d'une lunette dont les piédroits D A & E B prolongés, concourent au centre C^n du noyau Q K G. Sur la corde A B, ou ſur une de ſes paralleles D E, comme diametre, on décrira le ceintre primitif de la lunette D H B, qu'on diviſera en ſes vouſſoirs, aux points 1, 2, 3, 4, d'où l'on abaiſſera des perpendiculaires qui donneront les points de projection p^1, p^2, &c. par leſquels on tirera des lignes au centre C^n, qui ſeront les projections des joints de lit, dont il faut trouver les longueurs du côté de la voûte ſur le noyau par la projection de l'arête de rencontre des deux voûtes. Si l'on ſuppoſe des plans Pl. 95, *fig.* 124.

Fig. 124. verticaux élevés ſur les projections des joints de lit p C^n, p^2 C^n, &c. il eſt clair qu'ils feront dans la voûte conique, dont la lunette n'eſt qu'une partie, des ſections triangulaires variables, & les mêmes plans feront dans la voûte ſur le noyau une ſection circulaire toujours égale à l'arc droit K h M. Il faut donc faire les profils des triangles en élevant, par exemple, ſur la projection C^n p une perpendiculaire $p^4 f$ égale à la hauteur de retombée 4 p ; puis on tirera au centre C^n du noyau la ligne f^4 C^n. Si du point C^4, milieu de la partie i q^4, & la longueur C^m M, pour rayon, on fait un arc vers Z, qui coupe la droite f^4 C^n en Z; ce point Z, ſera la rencontre des deux ſurfaces, duquel on abaiſſera une perpendiculaire ſur la projection $p^4 C^n$, qu'elle coupera au point l^4, qui eſt un de ceux de la projection d'arête d'enfourchement que l'on cherche.

Par la même conſtruction, on élevera p^3 f^3, perpendiculaire ſur p C^n, & égale à la hauteur de la retombée p , pour tirer f^3, dont l'interſection avec un arc de cercle de même rayon que le précédent & décrit du centre C^3, donnera le point Y, & ſa projection l^3 que l'on cherche, ainſi du reſte; & par les points trouvés L, l , l^4 d'un côté, & de même de l'autre vers A, on tracera la courbe de projection A L B de l'arête de rencontre, laquelle fournira les moyens de tailler la pierre par équarriſſement, ou de former les biveaux de doële plate, comme l'on a fait aux rencontres des voûtes ſphériques avec les cylindriques, par le moyen des ſections de doële & d'horiſon, dont les parties de cette ligne ſont les diagonales des plans des doëles plates inclinées entr'elles.

SECOND CAS,

Où la lunette eſt ébraſée du dehors au dedans.

Fig. 124. Soit $a\,d\,e\,b$ le plan horiſontal de la lunette, dont les impoſtes concourent en un point H, & la ligne du milieu H M, laquelle étant prolongée concourt au centre du noyau C^n. Ayant tiré à cette ligne, qui eſt l'axe du cône, une perpendiculaire $a\,b$ où l'on voudra, on la prendra pour diametre du ceintre de baſe $a\,h\,b$, qu'on diviſera en ſes vouſſoirs aux points 1, 2, 3, 4, d'où l'on abaiſſera des perpendiculaires ſur $a\,b$, qui en donneront les projections aux points q^1, q^2, q^3, q^4, par leſquels on tirera des lignes au ſommet H, & qu'on prolongera auſſi en-delà

en-delà de la baſe du côté du noyau, deſquelles les unes pourront le rencontrer comme H q^2, qui le rencontre en Q, & les autres comme H q^1 Y, qui ne le rencontreront pas, mais qui ſe termineront en l'arc du piédroit concave oppoſé de la voûte ſur le noyau, qui eſt hors de la planche faute de place. Sur ces projections de joint de lit prolongées, on fera, comme au cas précédent, le profil de ſection triangulaire de la lunette, & ſur la partie du même lit prolongée, compriſe entre le piédroit concave & le convexe, comme Q q^2, & ſur l'autre qui eſt terminée par les deux piédroits concaves (que la planche ne peut repréſenter en entier, parce qu'il n'y a pas aſſez de place), on décrira des ovales du quatrieme ordre, comme il a été enſeigné au livre II, tome premier, page 152. L'interſection de chacune de ces ovales avec le triangle du profil de joint de lit, qui eſt ſur même baſe, donnera un point de la courbe de l'arête d'enfourchement des deux voûtes, & la perpendiculaire abaiſſée de ce point ſur la baſe commune aux deux ſections donnera la projection de la courbe que l'on cherche, ainſi qu'il a été dit au trait précédent.

Nous avons ſuppoſé dans les deux cas de rencontre des voûtes coniques avec les annulaires, que les lunettes étoient droites, c'eſt-à-dire que les axes des cônes paſſoient par le centre du noyau; mais s'ils n'y paſſoient pas, comme lorſque les lunettes ſont biaiſes, la conſtruction demanderoit quelques petits changemens pour le premier cas, en ce qu'il faudroit néceſſairement décrire ſur les joints de lit, prolongés où il ſeroit néceſſaire, des ovales du quatrieme ordre, comme au ſecond cas, au lieu des ſections circulaires, qui ſuffiſoient à la lunette droite, concentrique au noyau; au ſecond cas, il n'y auroit aucun changement à faire dans la maniere de tracer l'épure. Il réſulteroit ſeulement du biais dans l'un & l'autre cas, que les parties de la courbe d'arête de rencontre depuis une impoſte à la clef ne ſeroient pas égales entr'elles, ainſi la clef ne ſeroit pas au milieu.

Il eſt viſible que dans la conſtruction des deux cas précédens, on trouve tout ce qui eſt néceſſaire pour tracer la pierre. 1°. par la voie de l'équarriſſement, en formant ſur la courbe de projection de l'arête d'enfourchement des morceaux de ſurfaces cylindriques, ou plûtôt cylindroïdes, parce qu'elles n'ont pour baſe ni un arc de cercle, ni un arc d'ellipſe, mais une autre

courbe, sur lesquelles surfaces on peut porter les hauteurs des retombées, qui donneront des points de l'arête à double courbure que l'on doit former, le long de laquelle on fera couler les biveaux mixtes d'à-plomb & de doële creuse. 2°. Si l'on veut tailler la pierre par la voie des panneaux, il est aussi visible que l'on a tous les côtés de ceux de doële plate. Premierement, les profils des joints de lit coupés par la courbe de la voûte sur noyau, donnent la véritable longueur de ces joints qui font les deux côtés convergens du panneau; & les deux cordes de la base, c'est-à-dire, du ceintre primitif de la lunette, & celle de l'arête d'enfourchement, sont les deux autres côtés du panneau quadrilatere de la doële plate.

La corde du ceintre primitif de chaque division de voussoirs est sans doute connue, mais celle de l'arête d'enfourchement ne l'est pas; cependant il y a deux manieres de la trouver. Pre-
Fig. 124. mierement, on peut la chercher par sa projection qui est donnée. Par exemple, si l'on cherche la valeur de la projection $l^3\ l^4$, on élevera sur le point l^3 une perpendiculaire à la projection $p^3\ C^n$ qui coupera le profil en un joint de lit $f^3\ C^n$. De même sur le point l^4 on élevera une perpendiculaire à la projection $p^4\ C^n$ qui coupera le profil du joint de lit $f^4\ C^n$, au point Z; la différence des longueurs des lignes l^4Z & l^3 Y, sera la hauteur du point l^3 au dessus de l^4, laquelle étant portée sur l^3 V perpendiculairement à la base $l^3\ l^4$ en l^3 V, on tirera la ligne V l^4, qui sera la valeur de projection, & la corde de l'arête d'enfourchement que l'on cherche, pour former les panneaux de doële plate des deux voûtes & trouver le biveau de leur inclinaison, comme il a été dit à la plûpart des traits de ce troisieme tome. La seconde maniere de trouver cette valeur est de former le triangle isoscele de la doële plate conique entiere entre deux lits, dont la longueur est donnée en $C^n f^3$ & $C^n f^4$, & la base à la corde 3, 4, desquels longs côtés de joint de lit donnés au profil $f^3\ y$, f^4 Z, on aura la distance des points y & Z, qui sera la ligne cherchée pour la valeur de $l^3 l^4$: ce qui est clair, sans qu'il soit nécessaire d'y ajouter une explication.

Troisieme combinaison de la rencontre des voûtes sphériques avec les annulaires.

La jonction de ces deux especes de voûtes tombe quelquefois

pratique dans deux circonstances; l'une, lorsqu'on fait une voûte sphérique ajoutée à une voûte sur le noyau, comme si l'on faisoit une chapelle ronde derriere un chevet tournant; telles sont souvent celles où l'on resserre le S. Sacrement. L'autre, lorsque l'on fait de grandes niches dans un berceau tournant, comme sont plusieurs orangeries, qui servent de salles pendant l'été: telles sont celles de Schwetzingen, dans le Palatinat, auprès de Manheim. S'il ne s'agit que d'une niche, & qu'on en fasse l'épure suivant le trait que nous avons donné au tome précédent * (en parlant des voûtes sphériques incompletes) par le moyen des piramides inscrites dans la sphere, la construction du trait dont il s'agit retombe parfaitement dans le second cas du précédent. Car prenant la partie OPT de l'imposte APB (fig. 125) pour le trompillon, & X *x* pour la face de la niche; si l'on tire les lignes X *o* S, *x* TS, on aura une voûte conique XS *x* inscrite dans la sphérique, qui rencontre la voûte sur le noyau DEFG, laquelle est réduite par les doëles plates en portion de piramide tronquée X *o* T *x*. Cependant, comme cette construction meneroit à la même fin par un trop long circuit, il convient mieux de suivre la méthode du premier cas du trait précédent.

** Tome II, page 389.*

Fig. 125.

Avant que de penser au trait, il est bon de faire ici la même attention que nous avons faite à la rencontre des voûtes sphériques entr'elles, touchant la position du centre de la niche. Si l'on met ce centre en M sur le piédroit concave de la voûte sur le noyau, il arrive que la circonférence de la niche étant plus grande que le demi-cercle, la clef retombe à la jonction de la lunette qu'elle fait dans la voûte annulaire, d'une certaine quantité AX, qui est plus ou moins grande suivant la hauteur de la niche, à l'égard de la voûte sur le noyau; ce qui est contre la bonne construction, & que les architectes réforment en faisant cette portion de clef AN de niveau, & alors l'enfourchement change de nature; ce n'est plus une voûte sphérique, mais une portion de berceau qui rachete une voûte sur le noyau. Supposant cependant que cette chûte en *contrebas* est de peu de conséquence, comme elle l'est en effet lorsque la niche est d'un petit diametre, en comparaison de celui de la voûte sur le noyau; on peut faire le trait comme au premier cas du précédent, avec cette différence qu'au lieu de triangles, la lunette nous donnera des arcs de cercles.

Fig. 125. Soit l'arc DME (fig. 125) l'imposte concave d'une voûte sur le noyau, FKG la convexe, & APB celle de la niche. Sur AB, comme diametre, on décrira le demi-cercle AH B, qu'on divisera en ses voussoirs, pour régler les têtes de ceux de la niche, si la clef ne retombe pas à l'enfourchement en *contrebas* en X, où est l'intersection du ceintre de la voûte annulaire K *h* M; mais si on veut qu'elle y retombe, on tirera par le point X, la ligne X *x*, parallele à AB, sur laquelle on décrira le ceintre primitif, ou seulement sa moitié X *h*, qu'on divisera en ses voussoirs, aux points 1, 2, &c. par lesquels on abaissera des perpendiculaires 1 p^1, 2 p^2 qui couperont ce diametre aux points p^1, p^2, par lesquels, & par le centre C^n du noyau, on tirera les lignes C^n *o*, C^n O, qui couperont le demi-cercle *p* AP aux points *q o*, QO, l'imposte concave DME aux points d^1, d^2, & l'imposte convexe FKG aux points *i*, *k*, K. On divisera ensuite en deux également les lignes *q o*, QO qui sont dans la niche, & de leurs milieux m^1, m^2, pour centres, & pour rayons leurs moitiés $m^1 q$, m^2 Q, on décrira des arcs de cercles, vers Y, Z. Ensuite des points c^1 c^2, milieux des lignes KM, $i\,d^1$, $k\,d^2$, & d'une de leur moitié $c^1\,d^1$ pour rayon, on tracera des arcs des cercles vers les mêmes points Y, Z qui couperont les arcs de cercles de la niche qu'on vient de tracer aux points X, Y, Z, qui seront ceux de rencontre des sections des deux voûtes dont il faut avoir les projections.

De chacun de ces points X, Y, Z, on abaissera des perpendiculaires sur les bases des sections; savoir, XL sur KP, qui donnera le point L, pour projection du milieu de la clef. Ensuite Y *y*, perpendiculaire sur C^n O, qui donnera le point *y*, & enfin Z *x* sur C^n *o* qui donnera le point *z*. Par les points L, *y*, *z*, A, on tracera à la main une courbe qui sera la moitié de la projection de l'arête d'enfourchement de la niche avec la voûte sur le noyau, à laquelle moitié on fera l'autre LB égale en tout, parce qu'il ne peut pas y avoir d'obliquité dans la rencontre de la niche, qu'on suppose une hémisphere, avec la voûte annulaire, à cause de l'uniformité de la sphere. Il ne pourroit pas non plus y en avoir, si la niche étoit surhaussée ou surbaissée sur une imposte circulaire, mais seulement si le ceintre horisontal de l'imposte APB étoit elliptique, & qu'un de ses axes comme PM étant prolongé, ne passe pas par le centre C^n du noyau, ce qui ne peut guere arriver par aucune

ſujétion, & même ce qui ſeroit difforme & intolérable.

La projection de l'arête de lunette étant donnée, le reſte du trait ſe fera comme on le jugera à propos, tant à la voûte ſphérique qu'à la voûte ſur le noyau, chacune en particulier, juſqu'à cette ligne de leur rencontre, & comme au trait précédent, on fera les vouſſoirs d'enfourchement, ou par équarriſſement ou par panneaux de doële plate. Pour opérer par panneaux, on a la diagonale de rencontre des doëles plates, & l'on cherchera la ſection de chaque doële avec l'horiſon, paſſant par le point le plus bas du vouſſoir d'enfourchement, & la différence de hauteur de l'arête au point le plus élevé d'avec le plus bas, par où l'on ſuppoſe que paſſe un plan horiſontal, comme on vient de l'enſeigner au trait précédent, avec lequel celui-ci aura une grande conformité, ſi l'on forme la niche par le moyen d'une piramide inſcrite, comme nous l'avons fait au tome précédent, en parlant du trait des voûtes ſphériques incompletes.

Explication démonſtrative.

Il eſt viſible que ce trait eſt fondé, comme le précédent, ſur l'interſection mutuelle des ſections planes faites par des plans verticaux, dans l'une & l'autre voûte, ſur mêmes baſes horiſontales $C^n o$, $C^n O$, $C^n P$. Que celle qui eſt faite ſur cette derniere $C^n P$ eſt le profil par la clef de la lunette, composé de deux arcs de cercles K*h*X, partie du ceintre de la voûte ſur le noyau, & XAP, ceintre de la niche qui ſe rencontre en X, qui eſt par conſéquent un point commun aux deux ſurfaces, & un de ceux de l'arête de rencontre qui forme la lunette dans la voûte ſur le noyau, que la ſurface ſphérique pénétre plus avant à la clef qu'aux impoſtes A & B.

CHAPITRE VII.

Des voûtes compoſées de ſurfaces régulieres & irrégulieres.

JUſqu'ici nous n'avons parlé que des ſurfaces cylindriques, coniques, & ſphériques, que nous mettons au rang des *régulieres*, pour la conſtruction des voûtes; il nous reſte à parler

de celles qui ſont compoſées de cylindroïdes, conoïdes & ſphéroïdes, que nous appellons *irrégulieres*, ou *réguliérement irrégulieres*. Après avoir parcouru les principaux cas de rencontre des voûtes régulieres, pour en conſtruire les enfourchemens, nous allons examiner ceux des irrégulieres, pour en conſtruire non-ſeulement les enfourchemens, mais encore les doëles & les joints.

PREMIER CAS.

De la rencontre des voûtes cylindroïdes, Sphéroïdes, & conoïdes, avec des tours cylindriques verticales.

PROBLEME X.

Faire une trompe en tour ronde, érigée ſur une ligne droite.

On ſait que les trompes coniques ſont ordinairement *érigées*, c'eſt à-dire, élevées ſur une baſe compoſée de deux lignes droites, qui font un angle rentrant, & que les ſphériques le ſont ſur une baſe en ligne courbe. On propoſe ici, d'en faire une ſur une *ligne droite*, de ſorte qu'elle ne peut être ni conique ni ſphérique, mais elle doit être cylindrique, comme un bec de flute renverſée, ou ſphéroïde d'une ſurface convexe, ſemblable à peu près à ces *coquilles* de mer qu'on appelle *de Saint-Jacques*, dont le côté de leur charniere eſt droit, d'où elle ſe plie en concavité ſphéroïdale canelée; mais il n'eſt pas queſtion ici de canelure. M. de la Rue donne la conſtruction de la premiere figure, en cylindroïde, & le P. Derand celle de la ſeconde en ſphéroïde: nous donnerons l'une & l'autre, avec des changemens & des ſupplémens conſidérables; premierement, parce que, ſuivant celle de M. de la Rue, la doële devient plane, lorſque ſa hauteur eſt égale à la ſaillie de la tour qu'elle porte, ce qui fait une difformité à la jonction de la doële & du mur, qui ſe fait dans un angle très-ſenſible. Secondement, parce qu'il ne dit rien de l'arête du trompillon.

Pl. 96, fig. 126. *Premiere eſpece de cette trompe*, où ſa doële eſt cylindrique ou cylindroïde. Soit (fig. 126) un ſegment de cercle A B D, moindre que le demi-cercle, lequel eſt la projection horiſontale de la ſaillie de la tour que la trompe doit ſoutenir en l'air. Nous ſuppoſons ici un ſegment moindre que le demi-cercle, quoi-

124.

125.

qu'on puiſſe le ſuppoſer de moitié du cercle, mais rien de plus parce que les vouſſoirs pouſſeroient trop au vuide par les côtés. Pour rendre cette trompe parfaite, il y a deux choſes à concilier ; premierement la ſolidité, qui exige que la hauteur de la doële ſoit plus grande que la ſaillie de la tour ; l'autre eſt la décoration, qui exige, 1°. que la tranſition de la ſurface plane du mur & de celle de la doële courbe ſoit inſenſible : 2°. que la courbe du contour de cette doële approche le plus qu'il eſt poſſible de la circulaire ou elliptique.

Premierement, ſi l'on fait la ſaillie du milieu de la tour égale à la hauteur de la clef de la doële, il eſt viſible que ſa maſſe portant à faux ſur un angle de 45 degrés, il ſera difficile d'en aſſurer la liaiſon, pour peu que la trompe ſoit grande, parce qu'il faut l'équilibrer par un poids équivalent ; alors il faut ſurhauſſer le ceintre de face, qui ſera elliptique en élevation verticale ; & ſi l'on fait la doële plane, l'arête de la tour avec la doële ſera auſſi évidemment une ellipſe, parce que c'eſt la ſection plane d'un cylindre coupé obliquement à ſon axe. *Secondement*, ſi la ſaillie devoit être abſolument égale à la hauteur de la trompe, & qu'on voulût en faire la doële cylindrique ou cylindroïde, quelque courbe concave ſans inflexion que l'on choiſiſſe pour baſe verticale de ce cylindre horiſontal, ou plutôt (en termes de l'art) pour ſon arc droit, elle ne peut donner un ceintre de face dont l'élevation ou projection verticale ſoit en cercle, mais une courbe qui s'élargira plus ou moins vers les côtés, ſuivant que cet arc droit rendra la doële plus ou moins concave. Ainſi le quart de cercle la rendroit plus différente du cercle & plus approchante du quarré que de la parabole ou de l'hyperbole, qui ſont les deux courbes qui y conviennent le mieux ; & parce que l'hyperbole peut donner pour projection verticale de l'arête de rencontre de la doële de la trompe avec la tour, un cercle ou une courbe approchant du cercle, lorſque la ſaillie horiſontale de la tour eſt moindre que la hauteur de la trompe, nous allons donner une conſtruction générale qui ſervira pour toutes ſortes d'arcs droits qu'on peut choiſir pour la doële cylindrique de la trompe, & les courbes de projection verticale d'élevation des arêtes de rencontre qui en réſultent avec la tour ronde.

Soit (fig. 126) le ſegment de cercle A B D, moindre que le demi-cercle, la projection horiſontale de la tour, dont le milieu de la corde eſt le point C, ſur lequel ayant élevé la per- *Pl. 96, fig. 126 & 127.*

Fig. 126. & 127. pendiculaire C B, on menera par le point B, où elle coupe l'arc de cercle, la ligne B F parallele à A D, sur laquelle ayant pris B E égale à C D, on menera la ligne E D, laquelle sera l'axe d'une hyperbole; ensuite, portant C D en E F, pour l'amplitude ou la plus grande ordonnée de l'hyperbole, on portera la même C D en E O sur E D prolongée pour avoir un point O, duquel on menera la droite O F; & du point D, pris pour sommet, une autre droite D F; on menera ensuite autant de perpendiculaires à l'axe DE qu'on voudra avoir de points des courbes de l'arc droit & de l'arête de rencontre; ces perpendiculaires couperont la ligne D F aux points *a*, *a*, *a*, & la ligne O F aux points Q, R, S. On cherchera des moyennes proportionnelles entre *g a* & *g* Q, *i a* & *i* R, *k a* & *k* S, en portant *g a* en Q *e*, *i a* en R *e*, & *k a* en S *e*; puis on élevera des perpendiculaires à ces lignes, aux points *a*, & du milieu des lignes *g e*, *i e*, *k e* pour centres, on décrira des arcs qui couperont ces perpendiculaires aux points *x*, *y*, *z*; on portera les longueurs *a x*, *a y*, *a z*, en *g h*, *i h*, *k h*, pour avoir les points *h*, *h*, *h*, qui seront à la circonférence de l'hyperbole D *h*, *h*, *h* F que l'on cherche, laquelle sera l'arc droit de la doële de la trompe.

Présentement, pour trouver la projection verticale de rencontre de cette doële avec la surface de la tour ronde, on menera des paralleles à D E ou C B, pour les points G, I, 24, L, Æ, où les perpendiculaires à l'axe E D coupent l'arc D B, sur lesquelles on portera *g h*, *i h*, *k h*, *l h*, *æ u*, E F, au-dessus de la corde A D; ainsi on portera *g h* en *p q*, où elle donnera sur G *q* le point *q*; *i h* sur *p r*, où elle donnera le point *r*; *k h* sur *p s*, *l h* sur *p* V, *æ u* sur *p u*, & E F sur C H; & par les points H, *u*, V, *s*, *r*, *q*, D, on menera une courbe qui sera la projection verticale de celle à double courbure qui se forme à la rencontre de la doële de la tour ronde, dont la projection verticale est le rectangle A D T *t*, qui est une section de cylindre par un plan parallele à son axe.

Cette courbe A H D, qui est ici un demi-cercle, pourra être prise, si l'on veut, pour le ceintre primitif, sur lequel on fera la division des voussoirs en parties égales, comme aux points 1, 2, 3, 4; mais parce qu'elles deviennent sensiblement inégales dans l'exécution, à cause que la projection verticale A H D raccourcit la courbe à double courbure inégalement, si l'on veut que les têtes des voussoirs soient égales, il faut chercher

chercher une autre courbe qui soit le développement de celle de l'arête étendue sur une surface plane. Pour cet effet, il faut rectifier l'arc de cercle BD sur la droite Cd, en portant de suite toutes ses parties ; par exemple BÆ sur C 1^r ; ÆL sur 1^r, 2^r ; L 24 sur 2^r, 3^r ; 24 I sur 3^r 4^r ; IG sur 4^r 5^r, & GD sur 5^r d, & par les points 1^r, 2^r, 3^r, 4^r, 5^r, on élevera des perpendiculaires égales à leurs correspondantes paralleles qui donneront les points de cette courbe. Ainsi faisant 5^r q^d égale à pq, on aura le point q^d ; 4^r z^d égale à pr, donnera le point z^d ; 3^r y^d égale à ps, donnera le point y^d ; 2^r x^d égale à pV, donnera le point x^d, &c. ces égalités se trouveront facilement par des paralleles à CD, comme qq^d, $r\,z^d$, &c. & par les points u, V, x^d, y^d, z^d, q^d, y^d, on menera une courbe qui sera le développement de celle de l'arête étendue sur une surface plane. *Fig. 126.*

Cette courbe aura, si l'on veut, deux usages ; 1°. pour faire la division des deux voussoirs. Si l'on veut que leurs têtes soient toutes égales en œuvre, il faut la faire servir de ceintre primitif, & renvoyer par une ligne parallele à CD, la division de cette courbe sur celle de la projection verticale A H D. Par exemple, si la division du premier au second voussoir tombe au point z^d, on la transportera sur l'arc H r D, par la parallele $z^d r$, qui donne une division r beaucoup plus bas que celle du point 4, qui avoit été trouvée en divisant le ceintre A H D en même nombre de parties égales, qui sont ici en cinq voussoirs. Secondement, elle servira pour en former des panneaux flexibles, dont on se servira pour tracer l'arête d'enfourchement sur les têtes cylindriques des voussoirs, considérés dans la surface de la tour.

Nous avons déja trouvé pour ce trait trois courbes différentes ; savoir, 1°. D h h F, qui est celle de l'arc-droit de la doële, 2°. HVD, qui est celle de la projection verticale de l'arête de rencontre de la doële & de la tour. 3°. H x^d d, qui est celle du développement de la même courbe. Il nous reste encore à trouver les courbes des sections planes des lits avec la doële, qui sont encore des hyperboles, & celles des mêmes surfaces planes de lit avec la tour, qui sont des ellipses. Pour trouver les sections des plans des lits exprimés dans la projection verticale par les droites C 1, C 2, C 3, C 4, on menera par les points V, s, r, q, des paralleles à CD qui couperont C 3 aux points x, y, z, 13, & qui couperont C 4 aux points X, Y. On transf-

Fig. 128. portera enſuite à part, (comme à la figure 128) la longueur C 3 en C 23 avec toutes ſes diviſions x, y, z, 13, par leſquelles on menera autant de perpendiculaires à C 23, ſur leſquelles on portera les abſciſſes de l'axe DE, dans l'ordre auquel ces diviſions répondent; ainſi on portera l'abſciſſe g D de la figure 126 en 13 g, de la figure 128 : i D en z i, k D en y k, l D en x l; (on a paſſé a D, parce qu'on n'a pas mené de parallele en V, auprès du point 3) & enfin E D en 23, 22.

De la même maniere, ayant tranſporté C 4 de la figure 126 en C 14 de la figure 128, avec ſes diviſions X & Y, & ayant élevé ſur ſes diviſions des perpendiculaires, on portera les abſciſſes correſpondantes g D en Yg, i D en Xi, & k D en 14, 21, ſuppoſant que le point 4 tombe au point s de la ligne sp 24, qui répond au point k de l'axe DE; & par les mêmes points trouvés 22, l, k, i, g, C & 21, i, g, C, on menera des courbes qui feront celles des arêtes des joints de lit des ſecond & premier vouſſoirs de la droite, qui ſerviront auſſi pour ceux de la gauche, qui leur ſeront égales, leſquelles ſerviront à former les panneaux de lit; mais pour les achever, il faut y joindre les ſections de ces plans avec la tour, pour y avoir les joints de tête. On prolongera la ligne C 23, (fig. 128) de la quantité 2, 6, du joint de tête de la fig. 126, avec ſa diviſion au point m^e, & l'on menera par ces points des paralleles à 23, 22, ſur leſquelles on portera les longueurs p 16, p m, compriſes dans le ſegment de projection horiſontale de la tour A B D, & menés des points 6 & m^e, perpendiculairement à AD. De même ayant abaiſſé ſur AD des perpendiculaires 5 A; n N; 1, 21, on portera ſur C 5 (fig. 128) la longueur p N; & par les points 5, N, 21, on menera un arc elliptique qui ſera le joint de tête du lit de deſſus du premier vouſſoir & de celui de deſſous du ſecond, comme 16, m, 22 le ſera du ſecond & troiſieme, & le trait ſera achevé.

Fig. 126 & 128.

Il reſte une ſeptieme courbe à trouver, qui eſt le développement de l'arête du trompillon ſur une ſurface plane, pour en former un panneau flexible propre à être appliqué ſur la ſurface cylindrique de ſon lit, pour l'y tracer, & régler le contour de ſa doële. On pourroit auſſi faire le développement de la même courbe conſidérée dans la doële, qui eſt de nature à pouvoir être développée, parce qu'elle n'eſt courbe qu'en un ſens, comme les cylindres; mais à cauſe de la régularité de la figure ronde

du lit du trompillon, qui est un cylindre circulaire, nous croyons qu'il convient mieux d'en faire le panneau de développement.

Ayant rectifié le demi-cercle *a h b* de la projection verticale, ou d'élévation du trompillon (par le probl. V du troisieme livre) on portera la longueur en a^t *b* (fig. ✠ au-dessus du chiffre 126) avec ses divisions en cinq parties égales aux points 1, 2, 3, 4, & l'on portera les hauteurs *p* 11, *p* 12, C *h* de ces divisions, sur la ligne D M, en des points qu'on n'a désigné par aucune lettre, à cause de la petitesse de la figure, à commencer au point D; par ces points, on menera des perpendiculaires à cette même ligne D M, qui couperont l'hyperbole en ses points, dont la distance à la ligne DM seront les saillies de l'arête du trompillon au-delà de la droite a^t *b*, base de son développement à la fig. ✠: on portera ces saillies sur chaque division de la ligne a^t *b* développée, & par les points de leurs extrêmités on menera la courbe a^t, 1^t, 2^t *h*, 3^t, 4^t, *b*, qui sera le développement demandé pour en faire un panneau flexible propre à être appliqué autour du lit cylindrique du trompillon, & y donner le contour de son arête de rencontre de la doële. On tracera de même les courbes des joints de doële des lits supérieur & inférieur des pierres qui auront trop peu de hauteur ou de longueur pour atteindre du dessus du trompillon jusqu'à la surface de la tour, comme sont les boutisses, qu'il convient de mêler dans les voussoirs de ces sortes d'ouvrages qui portent à faux. *Fig.* ✠.

Application du trait sur la pierre.

Ayant déterminé à volonté & suivant le besoin l'épaisseur de la pierre qui doit entrer dans le mur, pour porter & contrebalancer la charge de la saillie de la trompe à chaque voussoir; par exemple, pour le premier (fig. 129) on ajoutera cette épaisseur 5 *d*, au-delà de la ligne 5, 11, qui est celle de l'alignement du mur droit, sur laquelle on se réglera pour leur épaisseur & pour poser le côté droit des panneaux de lit de dessus & de dessous, afin que la saillie du porte à faux des voussoirs *p* 2^1, *a* 11, reste toute hors de cette épaisseur. On fera ensuite un parement de supposition verticale, sur lequel on appliquera le panneau de l'espace qu'occupe chaque voussoir dans son élévation; par exemple, pour le premier, la fig. quadrilatere A 5, 11 *a*, & pour le second, la figure à cinq côtés 5 *t*, 6, 12, 11, 1 (fig. 130] & pour la clef, le quadrilatere 6, 12, *t*, 6: & *Fig.* 129.

ayant tracé ſur ce parement le contour du panneau, on abattra la pierre à l'équerre de tous côtés, pour en former un ſolide ſemblable à un coin dont la pointe eſt émouſſée.

Sur le lit de deſſous, à l'impoſte marqué A a, (fig. 129) on appliquera le panneau du plan horiſontal A $a\,t$, ^{1}, 21 (fig. 126) avec lequel on tracera l'arc A N, 21 & la droite A a, ſans s'embarraſſer du contour des côtés a, t^{1} 21, obſervant ſeulement de placer la droite A a parallelement à l'arête du lit & du parement $p\ r$,
Fig. 126 & 128. & le point 21 ſur cette arête. On uſera des mêmes attentions pour placer le panneau 5, 21, C de la figure 128 ſur le lit incliné 5, 11, après avoir fait un retour d'équerre ſur l'arête $p\ r$, au point 21, & tracé la ligne 21, 1, pour placer ſur le point 1 le point 21 du panneau 5 21 C, duquel on retranchera ſur le côté 5 1, le rayon du trompillon C 11, pris à l'élévation (fig. 126). Les contours des deux panneaux de lit de deſſous & de deſſus étant tracés, on abattra la pierre à la regle de l'un à l'autre, toujours parallelement à la ligne 1 21, tracée ſur le parement, & après avoir formé la portion de tour ronde, 5, 1, 2 ^{1}, A, on y appliquera un panneau flexible formé à l'élévation (fig. 126) ſur la courbe $d\ q^{d}\ y^{d}$, en triangle mixte rectangle $d\ o^{n}\ y^{d}$, appliquant le côté droit $d\ o^{n}$, dans l'angle mixte en A 5, & par ce moyen, on tracera la courbe de l'arête de rencontre de la doële & de la tour A 1; ſuivant laquelle & la courbe 1, 11, on abattra la pierre à la regle qu'on tiendra toujours parallele à la ligne de l'impoſte A a. Pour la tête du trompillon, ayant tiré 11 t d'équerre ſur 5, 11, on creuſera cette partie avec un biveau pris ſur 1, 11, a, à l'élévation, pour y appliquer le panneau flexible du développement de ſon arête 11 a, marqué à la figure ✠ a^{t} 1, 1^{t}, poſant le côté 1 1^{t} ſur 11 t, de la figure 129, & le point 1^{t} ſur le point 11, pour y tracer la courbe a^{t} 1^{t}, ſur laquelle on poſera un bout de la regle, & l'autre ſur A 1, parallelement à la droite A a, pour achever de creuſer la doële A 1, 11 a.

On en fera de même pour tracer & tailler le ſecond vouſſoir, lequel étant achevé ſera à peu près tel qu'on le repréſente
Fig. 130. dans la figure 130; il faudra ſeulement obſerver que n'y ayant pas de ligne horiſontale marquée comme A a au premier vouſſoir, il faudra en marquer une ſur l'épure, comme 1 o^{r}, que l'on tracera ſur le parement, pour répairer ſur l'arête du lit de deſſous un point o^{r}, par lequel on menera une ligne d'équerre à cette arête juſqu'à la rencontre de la courbe qui marque l'arête

du joint de lit & de doële, qu'on a tracé avec le panneau 6, 16, 22, C, (fig. 128) & par ce point o^r, & l'angle 1 du lit de dessous à l'arête 1, 2, on menera une horisontale 1 o^r, qui servira à conduire la regle toujours parallelement à elle-même & à cette ligne, pour creuser la doële, en l'appuyant & la faisant couler sur les lignes trouvées & tracées 1, 2; 2 o^r, 12; 12, 11, & 11, 1, se servant, pour tracer la ligne de tête vers le trompillon du panneau flexible 1 1^t, 2^t 2 de la figure ✠, au-dessus du chiffre 126.

Explication démonstrative.

La surface de la doële qui sert de cul-de-lampe à la trompe doit remplir deux conditions, qui ont été observées dans ce trait; l'une d'être droite suivant sa direction horisontale, pour s'ajuster au mur droit sur lequel elle prend sa naissance; l'autre, d'être tangente à ce mur, ensorte que sa naissance y soit imperceptible. Ces deux conditions sont bien remplies par une surface de cylindroïde parabolique ou hyperbolique; mais pour la solidité, cette derniere convient mieux, parce qu'elle est moins concave que la parabolique. Pour démontrer que la courbe que nous avons décrit pour servir d'arc droit à la doële de la trompe est une hyperbole, il faut considérer que les deux triangles EDF, EOF, sont coupés par des paralleles à la base commune EF, qui donneront les analogies suivantes EF. kS :: EO. kO; & dans le triangle EDF, EF. ka :: ED. kD, lesquelles étant multipliées l'une par l'autre, on aura $\overline{EF}^2 . kS \times ka :: EO \times ED . kO \times kD$. Mais, par la construction $kS \times ka = kh^2$, donc $\overline{EF}^2 . \overline{kh}^2 :: OED . OkD$, *ce qu'il falloit démontrer*; car on sait qu'une des premieres propriétés de l'hyperbole est que les quarrés des ordonnées sont entre eux, comme le rectangle fait des lignes composées du premier axe & d'une abscisse par l'abscisse, est au rectangle composé de même à l'égard d'une autre abscisse. *Fig. 126.*

REMARQUE.

Cette démonstration servira pour rectifier quelques fautes, non pas de construction, mais d'explication, qui sont restées à la page 480 du tome II, où nous avons donné la même cons-

truction d'hyperbole ; & à celle de la figure 246 (même tome) où les c^1 c^2 sont mal placés, & les lignes tirées de ces points, qui doivent partir du milieu des intervalles c^1 S, c^2 S, pour l'explication seulement, car la construction en est bonne & correcte.

Fig. 126. Cette courbe d'arc droit étant supposée connue, il est clair qu'elle est tangente au mur représenté par D M ou par D T, parce que son axe E D est perpendiculaire à D M ; par conséquent elle touche D M en D. Présentement, si l'on imagine que cette courbe D *h* F, qui est le profil de la doële, se meut autour de son axe horisontal E D, jusqu'à ce qu'elle soit dans une situation verticale, alors elle sera dans le même plan que la ligne D T. Si dans cette situation on imagine des plans verticaux passans par les perpendiculaires à son axe & parallelement au plan du mur, comme *g* Q, *i* R, &c. ils couperont la base de la tour A B D aux points B, L, 24, I, G, & sa surface, suivant les hauteurs E F, *l h*, *k h*, *i h*, *g h*, qui sont les ordonnées de l'hyperbole dont les projections verticales sur le plan vertical A H D seront les lignes C H, *p u*, *p* V, *p s*, *p r*, *p q*, lesquelles ont été faites, par la construction, égales à celles de l'hyperbole; donc la courbe A H D, qui passe par les extrêmités de toutes ces lignes, sera à la surface du cylindre hyperbolique de la doële de la trompe, & en même tems à la surface du cylindre circulaire de la tour, puisqu'elles sont rangées autour de sa base A B D, aux points B, Æ, L, 24, I, G, perpendiculairement à son plan A B D.

Présentement, si l'on considere la courbe A H D dans le plan du mur, & que l'on imagine des plans verticaux passans par ses divisions des joints de tête des voussoirs, aux points 1, 2, 3, 4, perpendiculairement à ce plan A H D, il est clair qu'ils feront deux sections, l'une à la doële, qui sera une portion d'hyperbole, & l'autre dans la tour qui sera une ligne droite & une portion de parallelogramme, telles qu'on les a exprimé dans la figure 126 par les profils C h^e o^h ; a 2e, o^2 ; p^1, 1e, o^1, dont les saillies horisontales H h^e, 2 2e, 1 1e, sont égales aux sections de ces plans avec celui de la base A B D ; savoir, H h^e égale à C B ; 2, 2e = a 22 ; 1, 1e égale à p^1 2^1 ; ainsi des autres. Nous avons déja démontré que l'arc droit de la doële étoit tangent au mur, & que la projection de l'arête de rencontre de cette doële avec la tour étoit bien tracée ; il nous reste à

faire voir que les courbes des joints de lit de la figure 128, 22 *k* C, & 21 *g* C, conviennent auſſi à la ſurface de la doële coupée par des plans inclinés C 3, C 4, figure 126. *Fig. 126.*

Par le théor. III du premier livre, les ſections des cylindroïdes de baſe parabolique ou hyperbolique ſont auſſi des hyperboles proportionelles à celle de la baſe du cylindre ; or il eſt clair, à cauſe des paralleles $x\ x^d$, $y\ s$, $z\ r$, 13 q, qui coupent C 3, que ces diviſions ſont proportionelles à ces ordonnées conſidérées dans la tangente D T ou D M de la baſe du cylindre, & qu'elles donnent la véritable poſition des ordonnées à cette tangente au joint C 3, qui ſont égales aux abſciſſes ; par exemple M F, qui eſt égale à D E, & $m\ h = l$D, ainſi des autres ; donc les courbes des arêtes des joints de lit ſont bien tracées. A l'égard des deux courbes H x^d d, de l'arête d'enfourchement, & $a^t\ h\ b$, de l'arête du trompillon (fig. ✠) qui ſont de la même eſpece inverſe ; ſavoir, l'une le développement de l'arête de rencontre du cylindre hyperbolique horiſontal avec un cylindre circulaire vertical, l'autre du même cylindre hyperbolique avec un circulaire horiſontal qui lui eſt perpendiculaire, la ſeule conſtruction en fait voir la juſteſſe avec un peu d'attention ; après tant de pratiques ſemblables, il paroît inutile de l'expliquer de nouveau.

COROLLAIRE. I.

Il ſuit de cette pratique que ſi la courbe D *h* F n'eſt pas une hyperbole dont la diſtance du point E à ſon centre c^y n'eſt pas égale à ſa plus grande ordonnée E F, la courbe de projection A H D de l'arête de rencontre de la doële & de la tour ne ſera pas circulaire comme dans le cas préſent, mais elle deviendra d'une ovale irréguliere, alongée vers le ſommet H, ou aplatie, ſelon que la courbe D *h* F ſera plus ou moins différente de cette hyperbole. *Pl. 96, fig. 126*

COROLLAIRE II.

Secondement, que ſi l'Architecte veut affecter la figure circulaire à cette projection, il peut commencer le trait par le demi-cercle A H D, & continuer d'une maniere inverſe à celle que nous avons donné, & il trouvera les mêmes courbes d'arc-droit de doële & de joint de lit ; mais ſi la ſaillie de la tour C B devient égale à la hauteur C H de ſon ceintre d'élévation de

l'arête de la trompe, sa doële ne sera plus creuse à sa naissance à l'imposte, mais elle fera un angle de 135 degrés avec le mur, qui sera désagréable à la vue.

Corollaire III et Remarque.

Il suit en troisieme lieu, qu'adoptant la construction qui commence par le ceintre circulaire A H D, telle que la donne M. de la Rue, qui est une inverse de la nôtre, on sacrifie une beauté de peu de conséquence à la solidité de la trompe; car pour augmenter la force de *l'encorbellement*, il en faut prendre la naissance d'autant plus loin que la saillie du *porte-à-faux* augmente. Or, dans cette derniere construction, il arrive tout le contraire; car supposant la saillie égale au demi-diametre de la tour, la hauteur lui deviendra aussi égale, puisque alors C B sera égal à C H, ce que l'on voit mieux par le profil C h^e H, où h^e H sera égal à H C dans la supposition, & non pas dans la figure présente; & si la saillie C B est moindre que le tiers de la corde A D, comme dans l'exemple que donne M. de la Rue, la hauteur devient plus grande que cette saillie, dans le rapport d'environ cinq à trois; ainsi lorsque le besoin de solidité diminue, on l'augmente par cette construction, & lorsque l'on devroit augmenter la solidité, on la diminue, puisque la hauteur de la trompe n'augmente pas en même raison que la saillie; d'où l'on doit conclure qu'on ne doit point se fixer à la figure circulaire, pour ceintre d'élévation dans l'épure A H D, d'autant plus que cette figure n'est pas celle de l'arête d'enfourchement, laquelle est une courbe à double courbure.

Corollaire IV.

Il suit encore que lorsque la saillie de la trompe est égale au rayon de la tour, il convient à la solidité qu'on exhausse le ceintre d'élévation A H D; mais si on le fait elliptique, & qu'on cherche suivant cette pratique l'arc droit de la doële cylindroïde de de la trompe, celle qui en résultera ne sera plus une courbe concave, mais concavo-convexe, c'est-à-dire, partie concave, partie convexe du même côté, à peu près, telle qu'est la section verticale d'une cloche. Et si l'on suit la méthode que nous avons donné, en faisant un arc-droit hyperbolique, dont l'amplitude

plitude & la diſtance du centre de l'hyperbole à la plus grande ordonnée, ſoient égales à la hauteur de la doële; il en réſultera un ceintre d'élevation de face, qui ſera une ovale différente de l'ellipſe, plus élargie aux deux côtés, & preſque circulaire vers ſon grand axe, ſemblable à ces ovales qu'on imite par des arcs de cercles raſſemblés, dont l'effet ne doit pas être déſagréable à la vue, pour l'effet qu'elle produit à l'arête d'enfourchement, ou plutôt de rencontre de la ſurface de la doële de la trompe avec celle de la tour ronde.

Seconde eſpece de trompe en tour ronde, érigée ſur un mur droit, & dont la doële eſt creuſe d'une concavité de ſphéroïde irréguliere.

Pour prendre une idée de la concavité de la doële que nous propoſons, il faut ſe rappeller celle de l'arriere vouſſure de Saint-Antoine, qui prend ſa naiſſance ſur une ligne droite, d'où elle ſe plie en concavité de ſphéroïde irréguliere, mais dont l'arête de rencontre avec la tour eſt dans un plan incliné, puiſqu'elle eſt produite par la ſection d'un plan qui coupe une tour cylindrique. Il ſuit que cette arête eſt néceſſairement elliptique, & non pas une courbe à double courbure, comme celle de la trompe de doële cylindrique ou cylindroïde, dont nous venons de parler.

Le petit axe de cette ellipſe eſt A B (fig, 131), diametre de la tour, & le grand axe, qui eſt la hauteur inclinée, eſt arbitraire. Si l'on prenoit, comme le P. Derand, pour ceintre primitif, le demi-cercle A H B, qui eſt la projection verticale, ou l'élevation de l'arête de rencontre de la tour, on pourroit prendre comme lui, pour moitié du grand axe, la corde A H de la moitié de ce ceintre; mais par ce que ſon inclinaiſon nous paroît trop grande pour la ſolidité, nous croyons qu'il faut l'exhauſſer comme nous l'avons dit ci-devant, lorſque la ſaillie de la trompe eſt égale au demi-diametre de la tour, ou approchant. *Fig.* 131.

De quelque maniere qu'on faſſe, nous ne prenons pas cette projection verticale, circulaire ou elliptique, pour ceintre primitif; mais l'ellipſe A F B, formée par les axes donnés A B & A H, qui eſt la vraie ſection de la tour, parce qu'elle donne le véritabe contour de l'arête de rencontre de la tour & de la doële, ſur lequel on peut faire une diviſion égale des têtes des vouſſoirs, ce qui ne ſe peut, comme nous l'avons dit, ſur le contour

Fig. 131. de la projection verticale A H B. Cette circonférence A F B, qui est dans sa juste étendue, & courbe dans son état naturel, ne nous dispense pas cependant de faire un développement de la projection verticale, ou élevation A H B, non pour régler la division des têtes du voussoir, comme à la trompe précédente, mais seulement pour en former les panneaux flexibles, nécessaires à tracer le contour de l'arête d'enfourchement de la doële concave & de la tour. Des divisions du ceintre primitif A F B, on abaissera des perpendiculaires sur A B, qu'on prolongera jusqu'au contour A M B, qui est la projection horisontale de la tour; telles sont I 21, II 22, III 23, IV 24. On en usera de même pour les divisions du demi-cercle *a h b*, du ceintre du trompillon; mais on ne pourra déterminer leurs projections horisontales, qu'on n'ait tracé les courbes des joints de lit dans un profil à part.

Pour tracer les panneaux des joints de lit, on commencera par former des triangles rectangles, dont tous les côtés sont donnés sur l'épure; savoir, 1°. la hauteur du joint à l'arête d'enfourchement 1 *p*, 2 *p*. 2°. Le rayon de la projection horisontale 21 C, 22 C, qui fait avec la hauteur du joint un angle droit; l'hypotenuse est la longueur des demi-diametres de l'ellipse C I, C II, C III, C IV. Si l'on avoit besoin du panneau du milieu de la clef, on feroit de même un triangle rectangle de l'horisontale C M, de la verticale C H, & de l'inclinée C E.

Il s'agit présentement de trouver les arcs de ces joints de lit, dont nous n'avons pris que les cordes qui ne donnent que
Fig. 132. deux points de chaque arc; savoir, *cf*, 1*f* (fig. 132) & *cf* 2*f*. Pour en trouver un troisieme, on tirera les cordes B 3, B 4 (fig. 131) sur le milieu desquelles on élevera une perpendiculaire, qui donnera les fleches *mx* & *ny*, qu'on transportera à la fig. 132 sur le milieu des cordes *cf* 2*f*, *cf* 1*f*, en *m x* & *m y*, & par les trois points *cf*, *x*, 2*f*, *cf*, *y*, 1*f*, on fera passer les arcs qui seront les panneaux des arêtes des joints de lit, de même que *cf*, *z*, 2*f*, pour le milieu de la clef dont N *z* est égal à N *z* de la fig. 131.

Il ne reste plus, pour achever le contour de ces panneaux, que d'y joindre la courbe du joint de tête, qui est une portion d'ellipse, dont la projection se trouve sur le plan horisontal A M B, en abaissant des points du joint de tête 3, *g*, 7, des perpendiculaires 23, G, 17, & menant sur 3, 23, la perpen-

diculaire 17 K & ſa parallele *l* G, ſuivant notre méthode ordinaire; ſi on éleve des perpendiculaires ſur 3, 7 & qu'on y porte les longueurs de celles de la projection horiſontale 17 en 3 *k*, & *l* G en *gl*; la courbe 7 *g l k*, ſera celle du joint de tête que l'on cherche. Ou, plus ſimplement, par les points 23, G, 17, qui ſont la projection horiſontale des points 3, *g*, 7 de l'élevation, & par les points 24, Q, B, qui ſont celles des points 4, *q*, 8, on menera des paralleles à A B, Q *u*, 24 4*f*, 17 7*f*, G *gf*, 23 3*f*, prolongées indéfiniment; & ayant pris un point ſur A B, prolongée en *cf* à volonté, on prendra la diſtance *cf* 14 égale au rayon C B, qui ſervira pour tous les panneaux de lit, ſi le ceintre d'élevation A H B eſt circulaire, enſuite on portera les longueurs C *q* & C 8, du 1er & 4me lit C 8, projetté ſur une ſurface verticale, & les longueurs C *g* & C 7 du 2me & 3me lit de C F en *c f q*, *c f b*, *c f* V & *c f* 7 (fig. 132) & par les points 7, V, *b*, *q*, 14, on menera des perpendiculaires à B *c f*, qui couperont les paralleles précédentes aux points 7*f*, *gf*, 3*f*, *u*, & 4*f*; la courbe 7*f* *gf* 3*f*, ſera celle du joint de tête 3, 7; & *b u* 4*f*, celle du joint de tête 4, 8. Le contour 7*f* 3*f* *cf*, ſera celui du 2me panneau & du 3me, & *b* 4*f* *cf*, celui du premier & du quatrieme lit. *Fig.* 131 & 132.

Application du trait ſur la pierre.

Les panneaux de lit, & ceux du développement de la tête des vouſſoirs dans la tour étant trouvés, on s'en ſervira pour tailler la pierre, à peu près comme il a été dit pour la façon de trompe à doële cylindroïde, dont nous venons de parler; excepté que celle-ci étant concave ſphéroïde, elle ne pourra être faite à la regle comme celle-là; mais après l'avoir ébauché de même ſi l'on veut, on la creuſera par le moyen des cerches faites de telles ſections qu'on jugera à propos pour la commodité, ou verticales, ou horiſontales, ou inclinées. Ces dernieres ſeront les plus commodes, parce qu'il n'y aura qu'à les placer ſur le milieu de l'arête de la tête, & ſur le milieu de celle du côté du trompillon, & elles ſont très-faciles à tracer, parce qu'il n'y a qu'à ſuppoſer un joint au milieu du vouſſoir, par exemple 9 C, & en tracer le panneau comme on vient de faire pour les joints de lit, dont on fera une cerche convexe, au lieu d'un panneau concave, & avec les deux arêtes des lits & cette *Fig.* 132.

Fig. 131 & 132. cerche, pour le milieu, on peut se régler à la vue assez exactement pour la pratique. Si cependant on vouloit s'assurer encore mieux de la forme de cette concavité, on pourroit faire une cerche de la section verticale, prise par exemple en *s*, 10, 17, en portant sur cette ligne, considérée comme verticale, aux points 10 & 17, les saillies de l'arc de doële fait sur C 9, & celle de 41,7, 1, que donne l'arc *cf* 4*f* (fig. 132) fait sur le joint C 1 du 1er & 4me joint de lit, en portant la longueur C 17 en *cf* 41 & en tirant la perpendiculaire 41 7I; voyez la figure 133, où la cerche est la courbe *s* 7I, dont le plan doit être misper pendiculairement sur la base A C.

Nous n'ajoutons rien ici touchant la courbe de l'arête du trompillon, & celle des joints de doële ou de tête inférieure, lorsque les voussoirs ne sont pas d'une seule piece jusqu'au trompillon; ce que nous avons dit de la maniere de les tracer, & d'en faire usage dans la premiere espece de cette trompe, où la doële est cylindroïde, s'applique naturellement à cette seconde, puisqu'il ne s'agit que de porter les distances de ces joints du centre de la trompe, sur la ligne *cf* 14 du profil, & de lui mener des perpendiculaires par les points que ces longueurs donneront à leur distance du point *cf*; ces perpendiculaires couperont les courbes des joints de lit *cf* 3*f*, *cf* 4*f* en des points qui détermineront la longueur qu'il faudra avancer au-devant de la ligne droite de développement du contour du trompillon, sur chacune de ces divisions, comme il a été fait à la figure 132. Nous ne croyons pas non plus devoir ajouter ici l'explication de ce trait, qui est fort semblable au précédent dans la disposition de ses parties, comme on peut le reconnoître en transposant le point *cf* du profil, au point B; car alors la courbe *cf x* 2*f*, représentera la courbe D *h* F, de la figure 126: la différence qu'il y a, c'est que la courbe D *h* F est seule l'arc-droit de toute la doële, & représente plusieurs joints de lit, qui en sont toujours une partie plus ou moins grande; mais dans ce trait, chaque joint de lit a sa courbe particuliere, qui differe de la prochaine en contour & en longueur. Le reste, qui concerne la gauche de la doële, est commun avec l'arriere-voussure de Saint-Antoine.

Remarque sur l'usage.

Les trompes, dont nous venons de parler, sont du nombre

de ces ouvrages que les bons architectes doivent éviter autant qu'il est possible, parce que portant plus que les autres trompes à *faux*, ils tendent continuellement à leur ruine. Cependant il est certaines circonstances de situations de bâtimens, particuliérement dans des places irrégulieres, où l'on a besoin de les employer pour ménager un cabinet, comme on voit à l'ancien Hôtel de la Feuillade, à la place des Victoires, à Paris. Il faut aussi remarquer qu'il doit y avoir du choix dans la façon de la doële de cette trompe, qui peut être faite, comme on vient de le voir, en deux manieres, ou en sphéroïde, ou en cylindroïde. Lorsque sa situation se présente à la vue plus par les côtés que par la face, comme celle de l'Hôtel de la Feuillade, qui est sur une rue, il convient de faire la doële qui sert de cul-de-lampe en cylindroïde horisontale, parce qu'étant vue par les côtés, on la voit sortir du mur à sa naissance d'une maniere imperceptible sans aucun jarret, le mur étant tangent au cylindroïde. Mais si la trompe se présentoit à une avenue d'où elle fût vue en face, alors il conviendroit mieux de faire cette doële de cul-de-lampe, en façon de coquille concave, dont la figure est plus agréable à la vue que celle du cylindroïde vu de face, & plus propre à recevoir des ornemens de sculpture; & quoique le contour de cette doële soit dans une figure plane qui fait un pli avec le mur, ce défaut, ou plutôt cette imperfection ne peut être apperçue de front, mais seulement vue par les côtés; ainsi l'un & l'autre des traits précédens a son application à différentes positions de la trompe. En voici une d'une autre espece, dont la doële est aussi en forme de coquille dans un angle.

De la rencontre des conoïdes irréguliers horisontaux avec les cylindres verticaux.

Nous avons appellé conoïde régulier, le solide formé par la révolution d'une parabole ou d'une hyperbole tournant sur son axe; ici nous supposons que l'hyperbole génératrice qui tourne sur son axe souffre deux changemens dans un quart de révolution, l'un du mouvement de son sommet, qui se rapproche toujours du sommet S du cône, & l'autre en ce qu'elle se redresse de plus en plus, depuis le plan vertical jusqu'au plan horisontal: nous cherchons la section d'un tel conoïde, dont l'axe est horisontal, avec la surface d'un cylindre vertical,

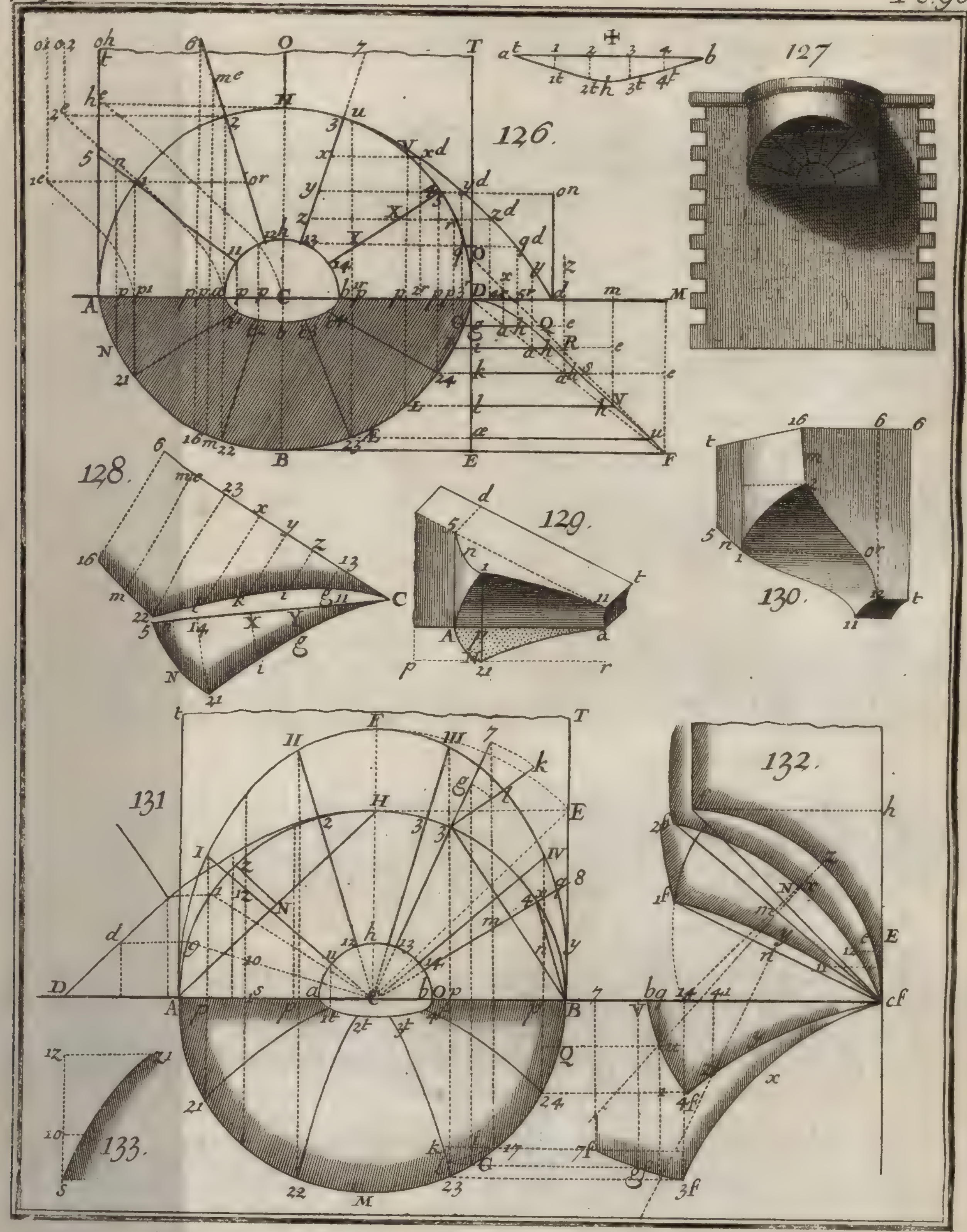
laquelle est évidemment une courbe à double courbure.

PROBLEME XI.

Trompe conico-sphéroïde courbe sous la clef & droite sur les imposses rachetant une tour ronde.

Nous avons parlé au tome précédent (page 480) de cette espece de trompe, lorsqu'elle est terminée par une surface plane, & nous avons donné le trait de sa doële & de ses lits. Présentement nous cherchons comment on doit le faire lorsqu'au lieu d'une face plane verticale, on en substitue une concave ou convexe; comme la concave ne paroît pas d'un grand usage, nous nous arrêtons à la convexe d'une tour verticale, dont la trompe peut soutenir une partie en l'air ; il est visible qu'il ne s'agit dans ce trait que d'un changement survenu aux têtes des voussoirs, les doëles & les joints de lit restant les mêmes jusqu'à l'arc du ceintre primitif, que nous prenons à celui de face de la trompe citée & expliquée, lequel est ici une section dans la tour par la
Fig. 134. corde A B. Ainsi, supposant (fig. 134) toute la partie de la trompe AB, comme prise entre les piédroits A S, S B, & la corde A B, faite comme il a été enseigné au probl. X X I V du tome précédent; il ne s'agit ici que d'y ajouter la partie de la tour dont le segment A D B A est la projection horisontale.

Soit (fig. 134) l'angle rectiligne rentrant A S B, sur lequel on doit faire porter en l'air une portion de tour ronde AD B. Sur la corde A B du segment de cercle A D B, qui est la projection horisontale de cette partie de tour, on tracera le demi-cercle A H B pour ceintre primitif, qui est une section verticale du conoïde, par un plan perpendiculaire à son axe SC. Ayant divisé ce ceintre en ses voussoirs aux points 1, 2, 3, 4, & ayant abaissé à l'ordinaire des perpendiculaires de chacun de ces points sur le diametre A B, comme $1p^1$, $2p^2$, &c. on cherchera les projections des joints de lit qui doivent passer par le sommet S, & les points de projection p^1 p^2 ; mais comme ces projections sont des courbes hyperboliques, qui supposent la description de celles des véritables joints de lit à la doële, il faut commencer par les décrire, comme il a été dit à la page 480 du tome précédent, si l'on opere par inscription du cône droit S A B dans le conoïde ; mais comme il convient mieux d'opérer


126.
127
128.
129.
130.
131
132.
133.

par la circonſcription, nous tirerons une tangente TN, par le point D le plus ſaillant de la tour, pris ſur l'axe SCD, & nous prolongerons les côtés SA & SB jusqu'à ce qu'ils coupent cette tangente en T & N. Cependant comme il n'y a que deux points donnés à la circonférence de chaque hyperbole, ſavoir un en S, l'autre à la circonférence du ceintre primitif AHB, leſquels peuvent toujours être repréſentés en profil par les points S & A, parce que le point S eſt commun, & le point A diſtant de C également comme les points 2 & 3; nous ferons ces profils en AS ou en AB, où les hyperboles paſſeront par ces deux points ſans ſe confondre, à cauſe qu'elle ſont inégalement courbes. Fig. 134.

Pour déterminer la différence de courbures des hyperboles qui doivent former les arêtes des joints de lit, on déterminera les premiers axes, comme nous l'avons dit au tome précédent, (page 480) en tirant une corde AH, qui coupera les à-plombs des diviſions du ceintre primitif $1p^1$, $2p^2$, aux points E, F; les longueurs Ep^1, Fp^2, pourront être priſes pour les premiers axes de ces hyperboles, comme on a fait à la figure 246 du tome précédent; par un changement de la planche poſtérieur au diſcours, qui ne la donne que pour une moitié de cet axe, on les prendra ici pour l'axe entier, afin de montrer la différence de l'effet de ce choix. On portera donc, pour la premiere hyperbole, qui doit paſſer par le point 1, la longueur Ep^1 ſur l'axe CS, prolongé en Ss^e, & la longueur Fp^2 en sf; enfin la longueur CH, qui doit ſervir pour le milieu de la clef, en Ss^h, & par le moyen de ces premiers axes, & ſuivant les pratiques données à la page 480 du ſecond tome, & au trait immédiatement précédent, on décrira les trois hyperboles SYB d^s, pour le milieu de la clef; $S^h t^b$, pour le joint paſſant par le point 2; & enfin $S i t^i$, pour celle qui doit ſervir à former l'arête du premier joint, paſſant par le point 1 du ceintre primitif.

Après avoir déterminé les vraies courbes des arêtes des joints de lit, qui ſont en œuvre dans des plans inclinés, il faut en chercher les projections horiſontales $t^2 x$ S, $t^1 y$ S, qui ſont encore des hyperboles (par le théor. III du premier livre) mais moins courbes que celles qui les produiſent. Nous avons donné (page 480 du tome précédent) la maniere de les tracer, par le moyen des premieres; on en peut revoir la pratique. Il n'y a qu'à prendre leurs ordonnées dh, dh, pour la grande, qui paſſe par le point 2 en œuvre, & di, di pour la petite, qui paſſe par

Fig. 134. le point 1, & les porter ſur les rayons C 1, C 2, du ceintre primitif en C h^x, C i^1, & par les points h^x, i^1, tirer des paralleles à l'axe D S, qui couperont les ordonnées $h\,d$ & $i\,d$, prolongées aux points x, y, par leſquels on tracera les courbes $t^2\,p^2\,x$ S, & $t^1\,p^1\,y$ S, qui ſeront les projections demandées. Ces projections horiſontales des joints de lit qu'on vient de trouver, ne peuvent ſervir à la formation des doëles plates, comme dans les voûtes coniques, parce que les quatre angles de chaque vouſſoir ne ſont pas dans un même plan; c'eſt pourquoi il faut terminer ces panneaux par les angles les plus bas au profil, afin d'avoir aſſez de pierre pour la poſition des panneaux de lit, ſur les joints ébauchés.

Pour ne pas trop embrouiller l'opération, nous ſuppoſerons les hyperboles décrites du côté S B poſées en S A; par exemple, S A i^2, pour la premiere qui ſe termine au point 1^2, par la parallele à A B, menée par la projection du joint t^1, ſur la face A D B de la tour rondel; enſuite, la ſeconde h^2 A S, qui ſe termine en h^2 par la parallele $h^2\,t^b$, paſſant par la projection t^2 du ſecond joint, à la face de la tour A t^2 D. Dans cette hypotheſe, cette partie de l'épure peut ſervir de profil, où les lignes h^2 V, $t^1\,u$, $k\,d$, I d, peuvent repréſenter les hauteurs des quatre angles du vouſſoir, qui ne ſont pas dans un même plan, par les raiſons que nous avons donné au commencement du ſecond tome; c'eſt pourquoi on tirera une ligne droite, par les deux angles les plus bas de la tête de face & de celle du trompillon, qui ſont marqués à ce profil en h^2 & en I, qui coupera l'axe prolongé C S en R, d'où l'on tirera auſſi par les points t^1, t^2 de la face ronde A D B des lignes droites qui donneront la projection R G t^2 R, qui eſt celle d'une doële plate inſcrite dans le conoïde, comme un côté de pyramide dont le ſommet ſeroit en R.

Pour tracer cette doële plate dans ſon étendue, & en former un panneau pour ébaucher la pierre, on décrira du point V pour centre, un arc de cercle h^2 1^u 2^u, qui ſera une portion de baſe de cône droit, partie inſcrite, partie circonſcrite au conoïde paſſant par le joint de face t^2, dans laquelle portion de baſe on déterminera les points 1^u, 2^u, correſpondans du ceintre primitif 1, 2, ou en élevant des perpendiculaires G 1^u, t^2 2^u, ſur les points t^2 & G, ou en tirant par le point V, des rayons V 1^u, V 2^u, paralleles à ceux du ceintre primitif C 1, C 2, qui couperont cet arc aux points 1^u, 2^u. Il ne reſte plus, pour la préparation néceſſaire

néceſſaire à former la doële plate, qu'à déterminer la grandeur de la tête du côté du trompillon, pour laquelle on prendra la diſtance *d* I, du point I, (le plus bas de la tête ſur le trompillon) à l'axe SC, qu'on portera en V *l* & V L ſur les rayons V 1^u, V 2^u, & l'on formera le panneau de doële plate, comme il ſuit.

Ayant fait dans une figure à part (fig. 135) deux lignes à l'équerre *o m*, *g t*, on portera ſur *g t*, de part & d'autre du point *o*, les moitiés de la longueur L *l* de la figure 134, & les moitiés de la longueur 1^u, 2^u, en *o g* & *o t*; puis on tirera par les points *g* & *t*, des paralleles à la ligne du milieu *o m*. Puis prenant au profil la longueur I h^2 de cet intervalle, pour rayon, & des points I & L, pour centre, on décrira des arcs qui couperont ces paralleles en G & en T; le trapeze I G L T ſera une doële plate réguliere d'une pyramide droite inſcrite dans le conoïde, comme pour former un vouſſoir exactement conique; mais comme elle excede la voûte conoïde propoſée, de toute la partie repréſentée à la projection par le triangle mixte G t^1 t^2 qu'il faut retrancher, on réduira la partie circulaire t^1 t^2, qui eſt la projection de l'arête à la face en tour ronde, en parties droites à pans, en tirant t^1 Q perpendiculaire à G R, laquelle coupera V G en Q, par où on élevera Q *q* parallele à G 1^u, qui coupera la corde 1^u 2^u en *q*; on portera la longueur *q* $2u$ en T Q, de la figure 135. Enſuite, pour avoir la valeur de la ligne G t^1, qu'il faut retrancher, on menera t^1 *z* parallele à A B, qui coupera la ligne de profil h^2 R au point *z*, la longueur h^2 *z* ſera tranſportée à la figure 135 de G en Z ſur G I; par les points Z & Q, on tirera Z Q, qui retranchera du panneau la partie Z G Q, repréſentée à la projection horiſontale par le triangle G t^1 Q; ainſi on réduit la doële plate à une tête à pans Z Q T, pour enſuite venir à l'arrondiſſement, comme l'on a fait à la trompe droite en tour ronde. *Fig.* 135. *Fig.* 134 & 135.

Application du trait ſur la pierre.

Ayant dreſſé un parement pour ſervir de doële plate de ſuppoſition, parce que la vraie doële étant gauche, la plate ne peut en toucher que trois angles, on y appliquera le panneau de la figure 135 pour y en tracer le contour deſtiné au ſecond vouſſoir. Enſuite, on abattra la pierre avec le biveau *x* N *y* de lit & de doële, fait ſuivant notre méthode, comme pour une trompe droite, à laquelle nous avons en effet réduit celle ci, comme je

l'ai dit, en tirant par le joint t^2, le plus avancé du second voussoir, la ligne h^2 V.

Fig. 134. Pour rappeller au lecteur la maniere de tracer ce biveau, on l'a tracé dans la figure 134. Sur la projection R t^2, ayant fait la perpendiculaire t^2 2^n, égale à t^2 2^u, on a tiré la ligne 2^n P', perpendiculaire à 2^n R, qui coupe la projection R t^2 prolongée en P, où l'on a tiré x P z, perpendiculaire à la même RP, qui coupe l'axe SC prolongé en Z, & la section de la doële avec l'horison Rx en x, laquelle section a été trouvée par la prolongation de la corde 2^u 1^u, jusqu'à la rencontre de la ligne VO en X, d'où l'on a tiré par le sommet R, la ligne RX x; la longueur 2^n P, étant portée en N^2, sur la projection RP prolongée, si l'on tire N^2 x & N^2 Z, l'angle du supplément x N^2 y sera celui du biveau cherché pour le lit de dessus; on trouvera de

Fig. 134 & 135. même celui de dessous. Ayant abattu la pierre avec les biveaux de lit & doële, le long des côtés du panneau de doële plate, on levera deux panneaux au profil, pour l'intervalle qui doit rester entre l'arête droite de la doële plate & l'arête courbe du véritable joint de lit, lesquels panneaux seront deux triangles mixtes; savoir, I i^1 z, pour le lit de dessous, dont on posera le point I sur le point I de la figure 135, & le point z de la figure 134 sur le point Z de la figure 135, en sorte que la ligne droite z I soit posée en ZI; le côté courbe hyperbolique I i i^1 du panneau, donnera la trace du vrai joint de lit sur le plan du premier lit.

De la même maniere, on appliquera sur le lit de dessus le panneau triangulaire mixte levé au profil en k I h^2, posant le côté droit I h^2 de la figure 134, en LT de la figure 135, le long de l'arête de la doële plate; le côté courbe de ce panneau k h h^2 donnera sur le lit de dessus le contour k h T, de la figure 135, qui est la véritable arête du joint de lit à la doële conoïde. On levera aussi, pour la tête du trompillon, le panneau triangulaire mixte 1 x 2 de la figure 136 qui a été faite pour la tête du trompillon, de la maniere qu'il a été dit à la page 483 du tome précédent, & tracé à la figure 247 (planche 65 du même tome); on l'appliquera sur la tête du côté du trompillon, passant par les trois points donnés I l k de la figure 135, représentés en élévation en I l 2, ce qui détermine déja trois courbes de contour de la doële. On en trouvera une quatrieme,

en portant sur les arêtes des joints de lit les longueurs k A & I A, en k a & I a, de la figure 135, & appliquant sur les points a & a, la cerche de l'arc 1, 2 du ceintre primitif, posée en angle aigu, avec un biveau formé sur l'angle mixte C A h ou C A i du profil, suivant laquelle faisant une plumée, on aura quatre courbes, entre lesquelles on creusera la doële conoïde, dont il est question. Enfin, sur la tête de face qui a été faite à pans, comme à la trompe en tour ronde, page 105, on tracera l'arc de cercle horisontal t^1, t^2 pour former cette tête, comme il a été dit au trait cité. *Fig.* 135 & 136.

Explication démonstrative.

Nous avons dit, en parlant de la même trompe à face plane, au tome précédent, qu'on arrondissoit le fond de la trompe, pour diminuer autant qu'il est possible l'angle solide mixte formé par les deux murs de piédroits de la trompe, & la partie de surface conique des trompes ordinaires, afin que le fond du trompillon ait plus de grace, & que cet arrondissement ne pouvoit être parfait, c'est-à-dire, sans jarret, que sous le milieu de la clef, où la courbe hyperbolique est tangente par son sommet à la ligne verticale, qui est l'intersection des surfaces planes des murs des piédroits, & qu'enfin cet arrondissement devoit diminuer depuis la clef jusqu'aux impostes, où il s'évanouit, parce que les hyperboles se redressent insensiblement à chaque joint de lit.

Comme les courbures des hyperboles sont déterminées par l'éloignement de leurs centres du sommet S de l'axe, on peut les diminuer suivant tel rapport que l'on voudra ; à la figure 246 *, (planche 65) nous les avons éloigné de la moitié seulement, des lignes p^1 E, p^2 F de cette figure, quoique par mégarde dans le discours, nous ayons pris le double pour la moitié ; ici, nous l'avons éloigné de tout cet intervalle, pour faire voir ce qui résulte de ce changement, qui est que la courbe d'arrondissement de la tête du trompillon s'éleve un peu trop en S, de a^t en I, & de b^t en t, au lieu qu'en prenant les intervalles E p^1, F p^2, seulement pour les premiers axes, l'arrondissement est plus agréable à la vue qu'en les prenant pour la distance du sommet S au centre de chaque hyperbole ; ce qui double la longueur de leurs premiers axes.

* Tome II.

Seconde espece de trompe, droite sur les impostes, courbe sous la clef, & rachetant une portion de tour ronde, lorsque la trompe est rampante.

La différence de cette trompe avec la précédente, consiste en ce que son ceintre primitif vertical, perpendiculaire à la direction horisontale, n'est pas circulaire sur un diametre horisontal, mais elliptique sur un diametre rampant, d'où il résulte quelque différence dans la construction. Premierement, en ce que les arêtes des joints de lit ne sont pas des arcs d'hyperboles régulieres, comme celles de la trompe précédente, mais irrégulieres, déduites d'une hyperbole ou de quelqu'autre courbe, prise pour arc principal de la courbure qu'on veut donner vers le milieu de la clef, dans une section verticale, passant par le sommet de la trompe. La même irrégularité auroit pu convenir au trait précédent, si le ceintre primitif n'avoit pas été circulaire. Comme la principale difficulté de ce trait consiste à la formation des courbes des joints de lit, nous nous y arrêterons uniquement, renvoyant celle des panneaux de doële plate & des biveaux aux traits précédens.

Planch. 98. *Fig.* 138. Soit (fig. 138) l'angle rentrant ASB, celui des piédroits sur lesquels on doit construire la trompe rampante, & l'arc ATB, la projection horisontale de la partie de tour ronde, qu'elle doit porter. Soit aussi la ligne BR, la différence de hauteur des naissances A & B, prise sur une perpendiculaire à la corde AB; la ligne AR, sera le diametre du ceintre primitif, dont le milieu C sera le centre, & la ligne CH, prise à volonté sur une ligne DCH, perpendiculaire à AB, sera son demi-diametre conjugué; nous avons fait ici CH égal à DA. Sur les diametres conjugués donnés, on décrira (par le probl. VIII du second livre) la demi-ellipse AHR pour ceintre primitif, que l'on divisera en ses voussoirs aux points 1, 2, 3, 4, affectant autant qu'il sera possible, que les points 3 & 4, qui sont les joints de lit de la clef, soient de niveau.

Le ceintre primitif AHR étant tracé, il faut se déterminer au choix de la courbe de profil vers la clef, qui doit être une parabole ou une hyperbole tangente à la ligne droite d'intersection des piédroits au point S, dans laquelle il n'y a que deux points donnés; savoir, le point S de son sommet, & un point *h*,

135.

136.

134.

137.

déterminé par une ordonnée D *h*, qui doit être égale à la hauteur DH, composée du demi-diametre vertical CH du ceintre primitif, & la hauteur DC de son centre C sur l'horison AB. *Fig.* 138.

Puisqu'il n'y a que ces deux points donnés, il est clair qu'on peut y faire passer des courbes différentes, plus ou moins concaves, comme on l'a vu au trait précédent, en prenant des centres d'hyperboles plus près ou plus loin du sommet S. Supposant que cet arc *principal* soit la courbe prise à volonté S *g h* I, on s'en servira pour régler toutes les courbes des joints de lit à la doële, dont on cherchera autant de points qu'on voudra; par exemple seulement trois, l'un au trompillon *a b*, l'autre au ceintre primitif AB, & le troisieme à la tangente NTE. Si l'on en vouloit chercher davantage, il faudroit tirer d'autres paralleles à la ligne AB, en aussi grand nombre qu'on veut trouver de points de chacune des courbes.

Il s'agit présentement de tracer plusieurs ceintres différens, sur les projections des diametres donnés au plan horisontal, comme *a b* & NE, sur lesquels il faut faire les profils des diametres rampans *a r*, NR^e, ce qui est aisé; car si par les points *a* & N, on mene des paralleles à AR, & par les points *h* & E, d'autres paralleles à BR, on aura par leurs intersections les points *r* & R^e, & par conséquent les diametres rampans *a r*, NR^e, sur le milieu desquels portant les distances *m g* & TI de l'axe ST, à la courbe de profil S *g h* I, on aura les demi-hauteurs *m* G, T *i*, qui déterminent les extrêmités des diametres G *c*, & C^2 *i* des nouvelles ellipses, qui doivent être les ceintres transversaux de la doële conoïde coupée par des plans verticaux élevés sur les lignes *a b* & NE, lesquelles demi-ellipses seront tracées comme la premiere AHR, par le problême VIII du deuxieme livre. Ces mêmes demi-ellipses seront facilement divisées en joints de lit, correspondans aux divisions du ceintre primitif, en menant par leurs centres *c* & C^2, des paralleles aux demi-diametres C 1, C 2, C 3, C 4, du ceintre primitif, comme la figure le montre.

Ces demi-diametres seront prolongés jusqu'aux lignes horisontales de leurs bases *a b*, AB, NE, s'il le faut, qu'elles couperont en des points o^1, o^2, o^3, o^4, à la base du ceintre primitif, & en t^1, t^2, t^3, t^4, à celle de la tangente NE, & au trompillon *a b*, aux points n^1, n^2, n, n; les lignes t^1 S, t^2 S, t S, t S, seront les sections des plans des lits avec l'horison, lesquelles

Fig. 138. pourront être prises pour les bases des profils qui serviront à les décrire; je dis pour des bases & non pour des axes de ces courbes, car leurs ordonnées ne doivent pas être à angle droit, comme l'a avancé M. de la Hire, dans ses leçons. Quoique je respecte la mémoire de ce grand mathématicien, & même qu'elle me soit chere, par l'attachement que j'avois pour lui & pour Mrs ses fils; je crois devoir faire remarquer cette inadvertence, qui pourra me rendre peut-être excusable, s'il m'est arrivé de me tromper en quelque chose, puisque les grands hommes ne sont pas infaillibles. Voici, dans l'exactitude, la maniere de faire ces profils, en cherchant les angles des ordonnées avec les abscisses des courbes. De chaque point de division du ceintre extérieur tangent $N^3 i R^e$, on abaissera des perpendiculaires sur la base horisontale NE, qui la couperont aux points p^1, p^2, p^3, p^4, p^5, par lesquels on menera des lignes au point S, qui serviront de base pour trouver, par des profils, les valeurs des cordes imaginées, tirées depuis les points 1e, 2e, 3e, &c. de ce ceintre au sommet S, par le moyen des hauteurs $p^1\ 1^e$, $p^2\ 2^e$, $t^3\ 3^i$, $p^4\ 4^e$, &c, comme l'on a coutume de faire pour trouver la valeur des projections des joints de lit dans les trompes coniques; par exemple, sur Sp^1, ayant élevé en p^1 la perpendiculaire $p^1 f^1$, égale à $p^1\ 1^e$, l'hypotenuse f^1 S sera la valeur de la corde qu'on cherche.

Ces valeurs étant trouvées, on fera pour chaque joint de lit un triangle avec trois lignes données; savoir, 1°. la section du plan du joint prolongé avec l'horison. 2°. La corde de la courbe de l'arête du joint. 3°. La longueur du joint dans le vuide, depuis le joint de tête jusqu'à l'horison. Par exemple, pour former le plan incliné du premier joint de lit dans le vuide de la doële, & son contour courbe qui doit donner la cerche ou le
Fig. 138 & 139. panneau du lit, on portera à part (fig. 139) la ligne St^1 de la section avec l'horison en s T^1, avec ses divisions $o^1\ n^1$, puis avec la longueur Sf^1 pour rayon, & du point s pour centre, on fera un arc $d\ 1^e$, & du point T^1 pour centre, & de l'intervalle $1^f t^1$ de la figure 138, pour rayon, on décrira un second arc qui coupera le premier au point 1e, pour tirer la ligne $T^1\ 1^e$, à laquelle on menera par les points $o^1\ n^1$, des paralleles $o^1\ 1^x$, $n^1\ 1^n$ indéfinies. Pour en déterminer les longueurs, on prendra à la figure 138 la ligne $1\ o^1$, qu'on portera en $o^1\ 1^x$, & la ligne $1^n\ n^1$, qu'on portera en $n^1\ 1^n$ de la figure 139. Par les points

$s\ 1^n\ 1^x\ 1^e$, on tracera à la main, ou avec une regle pliante, une courbe qui ſera celle de l'arête du joint de lit à la doële, ſur laquelle on formera le creux du panneau du premier lit. Par la même méthode, on trouvera la courbe $s\ 2^n\ 2^x\ 2^e$ du ſecond joint de lit, en prenant pour baſe du triangle qui donne l'inclinaiſon des ordonnées, la ligne $S t^2$ avec ſes diviſions, à la figure 138, qu'on portera en $s\ T^2$, de la figure 139, puis avec les lignes f^2 S, & $2^e t^2$, on fera un triangle $s\ T^2\ 2^e$, qui donnera l'angle $s\ T^2\ 2^e$ des ordonnées avec les abſciſſes, leſquelles ordonnées ſeront priſes à la figure 138, aux lignes $2\ o^2$ du ceintre primitif, & $2^n\ n^2$ du trompillon. On verra, à la figure 140, le reſte des profils des courbes des joints de lit de cette trompe, où l'on a marqué les mêmes lettres qu'à la figure 138, d'où ils ſont tirés. *Fig.* 138. & 139.

Nous renvoyons la conſtruction des panneaux de doële plate au trait précédent, & la formation de la tête ronde, au trait de la trompe en tour ronde, pag. 105, pour former les courbes des joints de tête ſans panneaux de lit; ou, ſi l'on veut en former des panneaux, on ſe ſervira de la méthode qui a été donnée pour toutes les voûtes en tour ronde, comme porte, deſcente, trompe, &c. qui eſt de ralonger l'arc de cercle de la projection horiſontale en arc elliptique, parce que tous les lits étant des ſurfaces planes, leurs ſections à la ſurface des tours, ſont des arcs Elliptiques.

Explication démonſtrative.

Si l'on releve par la penſée, les figures mixtes N 3 *i* R^e E, AHRB, *a h r b*, qui ſont couchées ſur le plan horiſontal, en ſituation verticale ſur leurs baſes NE, AB, *a b*, & le triangle mixte S*g* IT ſur ſon axe ST, auſſi en ſituation verticale, on pourra ſe repréſenter facilement toutes les raiſons de la conſtruction de ce trait. Enfin, ſi l'on examine dans cette ſituation les inclinaiſons des lignes $1^e t^1$, $2^e t^2$, $3^i t^3$, &c. & qu'on imagine des plans paſſans par ces lignes & par le point S, on reconnoîtra facilement tous les profils qu'on vient de faire aux figures 139 & 140. Il faut remarquer que tous ces plans de lit qui ſe croiſent, ont leur commune interſection à l'axe de la trompe, qui eſt repréſenté en projection horiſontale par la ligne ST, & en profil par la ligne inclinée à l'horiſon SX, faiſant *Fig.* 138.

Fig. 138. TX=TC^e ; mais quoique leur interſection ſoit dans une ſeule ligne, elle ſe trouve différemment ſituée dans tous les plans des joints de lit prolongés dans le vuide, comme on le voit à leurs profils, aux fig. 139 & 140, en sX^1, sX^2, sX, sX^4, & sX^5 ; ce qui vient de la différence de leurs inclinaiſons. Il eſt viſible (par la 16 prop. du 11e livre d'Euclide) qu'en faiſant dans chacun des ceintres tranſverſaux des lignes NR^e E, *a r b*, paralleles aux demi diametres des diviſions des vouſſoirs du ceintre primitif, les lits ſeront des ſurfaces planes, qui paſſeront par les diviſions 1e, 1, 1^n ; 2e, 2, 2^n ; au lieu que ſi l'on avoit fait leurs diviſions égales entre elles dans chacun, les ſurfaces des lits ſeroient devenues gauches, ce qu'il faut éviter, par les raiſons que nous avons donné au IIIe. livre.

Des voutes compoſées de ſurfaces cilindroïdes inclinées à l'horiſon.

En termes de l'art,

De la vis S. Giles quarrée, ou ſur tel polygone qu'on voudra.

Ce n'eſt pas donner une juſte idée de la *vis Saint-Giles quarrée*, que de la repréſenter, ainſi que M. de la Rue, comme un compoſé de *berceaux en deſcente*, *biais par les deux bouts* ; il faut y ajouter que ces berceaux ſont d'une irrégularité intrinſeque, & d'une eſpece toute différente des berceaux ordinaires. Premierement, en ce que les berceaux cylindriques réguliers, qui ſont portés par des murs verticaux paralleles entre eux, ſont coupés ou touchés par les plans de ces murs ſuivant les lignes de leurs impoſtes, leſquelles ſont droites, paralleles entre elles, & par conſéquent dans un même plan horiſontal ou incliné en deſcente ; ici les lignes des deux impoſtes ſont bien droites, & dans des plans verticaux paralleles entre eux,
Pl. 99. mais elles ne ſont pas toutes les deux dans un même plan in-
Fig. 141. cliné, comme l'on peut voir à la fig. 141, qui repréſente une portion de la vis où les impoſtes *a b* & *e f* ſe croiſent à leur milieu en *m*, par conſéquent elles ne ſont pas dans le même plan. La raiſon qui fait qu'elles ſe croiſent, eſt que les extrémités *a* & *b* du grand côté du berceau, & celles du petit *e* & *f* doivent être de niveau entre elles, en bas comme *a e*, & en haut comme *f b* ; ainſi les impoſtes ſont inégalement inclinées

138.

139.

140.

inclinées, afin que la plus courte parvienne à même hauteur que la plus longue, dans les diagonales des angles de la tour *a*E, FB. *Fig.* 141.

La *seconde différence* des berceaux de la vis aux cylindriques réguliers consiste en ce que, quoique les impostes *a b*, *e f* ne soient pas paralleles à la ligne du milieu C *c*, qui est l'axe du berceau de la vis, elles sont cependant encore des lignes droites; ce qui est impossible dans les berceaux réguliers, parce que les sections des cylindres faites par des plans inclinés qui croisent l'axe, sont nécessairement des courbes elliptiques. La *troisieme différence* consiste en ce que, dans les berceaux réguliers, toutes les sections perpendiculaires ou obliques à l'axe, qui sont faites par des plans paralleles entre eux, sont égales entre elles; dans la vis Saint-Giles quarrée elles ne sont ni égales ni semblables, en ce que l'imposte *e f* du côté du noyau étant plus inclinée à l'horison que celle du piédroit *a b* de la tour, les extrêmités du diametre transversal de la section plane verticale perpendiculaire au piédroit, seront par-tout à des hauteurs inégales, excepté au milieu sur M *m*, où la section est perpendiculaire aux deux piédroits du noyau & de la tour, dans lequel diametre les projections verticales de tous les joints de lit se croisent. Enfin, dans les berceaux biais en descente, toutes les sections verticales ou inclinées faites par des plans transversaux, qui forment les joints de doële aux têtes des voussoirs, ont leurs diametres ou de niveau ou toujours inclinés d'un même angle à l'horison; ici ils sont tous inégalement rampans.

Ces différences présupposées, pour se former une juste idée de la vis Saint-Giles quarrée ou à pans, il faut se rappeller la génération de la vis Saint-Giles ronde, que nous avons dit, (tome II, pag. 445) se former par le mouvement d'un demi-cercle, ou d'une demi-ellipse verticale, qui se meut par son centre sur une hélice, à l'axe de laquelle son diametre (qui est toujours de niveau) est toujours dirigé ou toujours perpendiculaire à la courbe de la projection de cette hélice, si elle n'est pas circulaire. Si l'on substitue à la courbe à double courbure des impostes de la vis Saint-Giles ronde une suite de lignes droites inscrites dans chaque hélice de l'imposte de la tour & de celle du noyau, qui soient en nombre égal, & égales entre elles dans chaque imposte, & à chaque révolution de ces

hélices différentes ; on aura, au lieu d'un corps cylindroïde tournant, plusieurs portions de cylindroïdes terminées les unes aux autres, tournantes & rampantes, dans une tour de base en polygone, qui peut être d'autant de côtés que l'on voudra ; il pourroit être triangulaire, quarré, pentagone, hexagone, &c. de sorte que si le nombre de ces côtés devient infini, la vis retombe dans le cas de la vis Saint-Giles ronde.

D'où il suit, 1°. que dans la vis Saint-Giles quarrée, comme dans la ronde, on doit observer la même position du demi-cercle générateur, ou de la demi-ellipse génératrice, tant à l'égard de l'axe, pour avoir les têtes & les diagonales des berceaux rampans qui aboutissent les uns aux autres, qu'à l'égard du niveau de son diametre. Secondement, que ce ceintre générateur, qui est toujours le même, & en même position dans la vis Saint-Giles ronde, n'est ici égal à lui-même que dans les positions des milieux des berceaux, & lorsqu'il en est également éloigné en dessus & en dessous, supposant que sa direction à l'axe est toujours la même ; de sorte que ce ceintre s'élargit continuellement, à mesure qu'il s'éloigne de la position perpendiculaire aux plans verticaux passans par les milieux des impostes, & au contraire, qu'il se rétrecit peu à peu à mesure qu'il approche de cette position perpendiculaire. Troisiemement, que ce ceintre générateur n'aura plus son diametre de niveau, lorsqu'il ne sera plus dirigé à l'axe de l'hélice, ni de même longueur, parce qu'il est toujours plus ou moins incliné à l'horison, quoique sa projection soit toujours égale dans le plan horisontal. Un quartier d'escalier tournant dans un angle ABD, [fig. 142) est très propre à expliquer ce que je veux dire ; car si l'on imagine sur chacune des arêtes des marches AE, KI, BF, LN, DG, un ceintre qui soit toujours de même hauteur à la clef HC, on verra que ce seront autant d'ellipses différentes plus ou moins allongées, suivant la longueur des arêtes des marches, & suivant leur éloignement de la ligne du milieu MD ; cela supposé, nous passerons au problême suivant.

PROBLEME XII.

Faire une vis Saint-Giles sur un polygone quelconque.

Soit, par exemple (fig. 142) un quart de tour quarrée

ABDM, dans laquelle eſt un noyau EFGM, qui doit porter toute la partie des berceaux rampans & tournans entre le milieu de la voûte, depuis la clef juſqu'au noyau, laquelle eſt plus petite que l'autre qui eſt du côté de la tour. Soit auſſi GHD, le ceintre primitif de cette vis, duquel émanent tous les autres, pris ſur une ligne DM tirée du milieu M, où eſt le centre du noyau, perpendiculairement aux côtés FG du noyau & BD de la tour, lequel ſe fait ordinairement en arc circulaire, quoique rien n'empêche qu'on ne le faſſe elliptique, ſurhauſſé, ou ſurbaiſſé. Ayant diviſé ce ceintre primitif GHD en ſes vouſſoirs aux points 2, 3, 4, 5, & ayant abaiſſé de ſes diviſions des perpendiculaires à ſon diametre GD, qui le couperont aux points p^2, p^3, &c. on menera par ces points des paralleles à la direction des berceaux, qui couperont la diagonale MB aux points d^2 d^3, par leſquels on menera en retour de la face EF d'autres paralleles d^2 k^2, d^3 k^3, &c. qui marqueront la projection horiſontale des joints de lit, leſquels, dans cette repréſentation, ſont parelleles entre eux, quoiqu'ils ne le ſoient pas dans leur projection verticale. *Fig.* 142.

Pour former les têtes des vouſſoirs, on menera du point M à ces côtés de la tour, autant de droites ML, MB, MK, que l'on voudra avoir de ceintres différens, pour tracer les joints de tête des vouſſoirs ſuivant leurs longueurs, obſervant les liaiſons, de ſorte que les ceintres ſur IK & NL ne ſeront pas ceux d'un joint continu, mais ils ſerviront par parties. Quant à celui qui eſt ſur la diagonale FB, il ſervira dans ſa moitié h^d B, pour l'angle rentrant du concours des deux berceaux, & dans ſon autre moitié h^d F, pour l'arête ſaillante du même concours. Sur les parties IK, FB, NL de ces lignes, compriſes entre le noyau & la tour, on décrira des ceintres elliptiques, par le moyen des hauteurs des aplombs du ceintre primitif p^2, p^3, p^4, p^5, qu'on portera perpendiculairement ſur les diametres NL, FB, IK, aux points où ils ſont coupés par les pararelleles des projections des joints de lit; ainſi on aura le ceintre elliptique d'enfourchement FhB, & l'autre intermédiaire I h^k K, qui ſera égal à celui qu'on peut faire ſur NL, ſi l'on ſuppoſe FN égal à FI.

Cette préparation étant faite, il faut prendre un moyen de conſtruction différent de ceux qu'on a pris juſqu'ici pour la formation des berceaux en deſcente, que nous avons exécuté

par le moyen des doëles plates, parce que les doëles feroient gauches, & par conféquent de très-difficile exécution, qu'on ne pourroit faire qu'à deux reprifes, en fuppofant à la premiere une ébauche en des doëles plates, enfuite cherchant le troifieme angle fur un lit, comme nous l'avons dit ailleurs; mais quand on s'y prendroit par ce moyen, on fe trouveroit encore dans l'embarras de la formation des lits qui font auffi gauches: c'eft pourquoi on a jugé que la voie la plus fimple & la plus courte eft celle de l'équarriffement, à peu près comme il a été fait pour la vis Saint-Giles ronde, dans laquelle on a formé des cylindres concentriques fur les projections des joints de lit, pour tracer fur ces furfaces les hélices de ces joints rampans. Ici nous formerons des tours quarrées concentriques, par des furfaces planes verticales élevées fur les projections horifontales des joints de lit, fur lefquelles nous tracerons les arêtes de ces mêmes joints rampans. Par les rencontres de ces furfaces, il fe formera des angles de deux efpeces, les uns faillans depuis le noyau jufqu'à la clef, les autres rentrans depuis la clef jufqu'aux murs de la tour, comme aux voûtes d'arête ordinaires, c'eft pourquoi les vouffoirs d'enfourchement doivent être confidérés, l'un dans l'angle rentrant, comme en *a b d* (fig. 146), l'autre en angle faillant, comme en *e f g*, (fig. 145) quoique dans le fond ces deux angles foient égaux entre eux.

Suppofant donc pour ébauches des vouffoirs des portions de tours quarrées, comme celles des figures 145, 146, il s'agit d'y tracer les arêtes des joints de lit qui doivent être dans leurs furfaces planes & verticales, ce que l'on pourra faire facilement dès qu'on connoîtra l'angle de leur inclinaifon avec l'horifon, ou, ce qui revient au même, fon complément, qui eft
Fig. 142. l'angle d'un aplomb avec chaque arête. Ayant prolongé la ligne du milieu EM en haut ou en bas, on prendra fur cette ligne un point O à telle diftance au-deffus ou au-deffous de l'horifontale MD, que le point B doit monter ou defcendre au-deffus du point A; par exemple, s'il y avoit deux marches entre ces deux points, comme en IK & FB, on prendroit la hauteur MO égale à celle des deux marches. Puis du point O on tirera des lignes droites à tous les points des projections des divifions des joints de lit fur le diametre GD du ceintre primitif, comme OG, O p^2,

O p^3, O p^4, O p^5, OD, qui donneront les différentes inclinaisons de tous les joints de lit, & sur lesquelles on trouvera les valeurs de toutes les parties de leurs projections, & avec beaucoup de facilité, si le côté AB comprend un nombre de girons de marches égaux entre eux, comme AK, KB. Car supposant qu'il en contienne deux, on divisera la hauteur des marches OM en deux également en n, par où l'on tirera nk parallele à MD, qui coupera tous les profils des joints de lit aux points i, Y, Z, z, y, k; les longueurs O i, OY, OZ, O z, &c. seront les valeurs des joints de lit que l'on cherche, ou si l'on veut leurs restes jusqu'à GD, comme i G, Y p^2, &c. qui leur sont égaux. Si l'intervalle AB n'étoit pas divisé également par les girons, comme si KI étoit plus près de B que de A, alors il faudroit abaisser sur MD des perpendiculaires I i, k^2 Y, k^3 Z, &c. qui couperoient (étant prolongées) les profils des joints de lit OG en i, O p^2 en Y, O p^3 en Z, &c. soit qu'il s'agisse de plusieurs têtes de voussoirs ou d'une seule, comme par exemple q Q, projection donnée qui tend, comme les autres, au centre M; on menera par les points q & Q des perpendiculaires sur le diametre horisontal GD, lesquelles étant prolongées couperont les profils correspondans O p^4 en X & O p^5 en x; les longueurs X p^4, x p^5 seront les valeurs des projections horisontales Q b^5, q b^4 que l'on cherche, & les angles q X p^4, & Q x p^5 ceux de leur inclinaison avec un aplomb, dont le complément est celui de leur inclinaison avec une ligne de niveau. *Fig.* 142.

Par le moyen de ces angles, on peut tracer les joints de lit sur les surfaces verticales des voussoirs ébauchés en portions de tours quarrées, comme aux fig. 145 & 146, par le moyen d'un biveau ou d'une sauterelle ouverte sur l'angle de l'épure qui convient aux voussoirs; par exemple, sur l'angle q X p^4, pour avoir l'inclinaison de l'arête q 4 sur la surface ab BA de la fig. 146, en montant d'un côté de bB, & en descendant de l'autre. Mais parce qu'on a besoin de la hauteur de la retombée, il y en a, comme M. de la Ruë, qui font des panneaux en parallelogrammes, pour être appliqués sur les surfaces verticales qui passent par les joints de lit, ce que l'on peut faire d'une maniere plus simple que celle de l'Auteur cité. Ayant prolongé les horisontales DG vers d, & kn vers N, on leur menera aussi des paralleles par les points 2, 3 des divisions du ceintre primitif, comme 2 f, 3 f; puis ayant pris à volonté un point y^5 sur N n, *Fig.* 142 & 143.

Fig. 142 & 143. on menera par ce point la ligne $y^5\ 5n$ parallele à $y\ p^5$ du profil, qui lui sera aussi égale, parce qu'elle est entre mêmes paralleles horisontales; par le point 5^n, on élevera la perpendiculaire $5^n\ 5^e$, qui sera aussi égale à $p^5\ 5$, qui est la hauteur de la retombée du ceintre primitif, puis on tirera 5e Z parallele & égale à $5^n\ y5$, le parallelograme Z 5^n sera celui du panneau que l'on cherche.

De la même maniere on fera le panneau L 4e, en tirant par le point L la ligne L 9 parallele & égale à $z\ p^4$ du profil, & 9 4e égale & parallele à 9, 4, hauteur de retombée du ceintre primitif GHD, enfin, en faisant $4^e\ f^4$ parallele & égale à L9, qui formera le parallelogramme f^4 9 pour le second voussoir du côté de l'angle rentrant. Il sera aisé de faire de même les deux autres panneaux du côté du noyau, marqués à la fig. 143, N 2e, $l\ 3^e$, lesquels panneaux ne sont point ceux de la doële, mais seulement des surfaces de suppositions verticales pour trouver les quatre angles de la doële, comme on le verra à l'application du trait sur la pierre. Il faut présentement chercher les panneaux des pierres du pilier de la vis, que nous appellons le noyau lorsqu'il porte une partie de la naissance de la voûte sur un lit horisontal & non en coupe, ce qu'on appelle *en tas de charge*, ainsi qu'on est obligé de faire lorsque le noyau est si petit qu'il n'est qu'une espece de pilier quarré, en forme de dé, d'une ou de deux pierres à chaque assise, alors chaque dé du noyau doit avoir une espece de pointe en saillie, qui reçoive le lit horisontal du premier voussoir, qui commence à former la voûte; il s'agit de trouver deux courbes, l'une de section horisontale de la doële concave & gauche, l'autre de section horisontale du lit, qui est une surface planolime un peu convexe & gauche.

Section horisontale du noyau.

Fig. 144. La maniere de trouver cette section, qui est fort embrouillée chez M. de la Rue, sera rendue facile par la figure 144, où l'on a joint le plan horisontal du noyau à sa projection verticale, si l'on fait attention aux relations & rencontres des lignes provenant des points correspondans dans l'une & l'autre espece de dessein. Soit (fig. 144) le rectangle *e* FGÆ le plan horisontal de la moitié du noyau qui est le double du quarré EFGM de la fig. 142, qui en est le quart: ayant prolongé les côtés Æ *e* vers A, & G F vers *g*, on tirera AN parallelle à *e* F, à distance

prise à volonté pour servir de base à l'élevation du noyau ; cette distance a été prise ici égale à la saillie de la retombée PA, pour ne pas multiplier les lignes. On portera ensuite sur N *g* le double de la hauteur MO de la fig. 142, pour tirer A *g*, qui sera la naissance de la voûte sur son noyau. Ensuite sur NA prolongée de la longueur du rayon CD du ceintre primitif de la fig. 142, portée en A C^a, on décrira de ce point C^a pour centre un arc de cercle AB de la grandeur destinée à la premiere assise, qui ne devroit être ici égal qu'à G 2 du ceintre primitif, mais que nous avons pris plus grand pour exprimer le trait plus sensiblement. On tirera aussi par le point *g*, une ligne O *g* parallele à AN, sur laquelle prolongée on prendra *g* C égal à GC du ceintre primitif, pour décrire l'arc *g b* égal à AB ; puis ayant divisé chacun de ces arcs en un même nombre de parties égales, par exemple en trois, aux points 1, 2, B, 1, 2, *b*, on tirera par ces divisions des lignes droites B *b*, 2, 2 ; 1, 1 ; A *g* ; ensuite par les points C & C^a, on tirera les joints *b f*, B *d*, sur lesquels on prendra, suivant l'épaisseur des pierres qu'on doit employer, les longueurs *b f* & B *d* égales entre elles, qu'on divisera aussi à volonté en deux ou plusieurs parties égales, aux points *i*, *n*, pour tirer les lignes droites *d f*, *i n*. Fig. 142 & 144.

Cette préparation étant faite, on tirera par les points M & *e* la diagonale MP, puis on abaissera des points *d*, *i*, B, 2, 1, des perpendiculaires sur PA, lesquelles étant prolongées, couperont la diagonale P *e* aux points P, 9, *q*, 2°, 1e, *e*, par lesquels on menera autant de paralleles à *e* F, comme PX, 9 T, *q* Y, &c. indéfinies, sur lesquelles on trouvera les points des courbes qu'on cherche, comme il suit. Ayant déterminé la hauteur que l'on peut donner à la pierre de dé qu'on veut former, suivant l'épaisseur qu'elle peut avoir, par exemple LN, on tirera L *d* parallele à AN, laquelle L *d* coupera toutes les lignes qu'on a tiré jusqu'à présent, aux points *v*, *z*, *y*, *x*, *t*, *d*, par lesquels on abaissera des perpendiculaires sur *e* F, qui couperont les horisontales correspondantes aux saillies de la doële, aux points X, Y, Z, V ; sçavoir, PN, qui représente en projection horisontale l'arête B *b* de la doële & du lit, qui est coupée en *x* par la ligne *d* L, sera coupée en X par la verticale *x* X. De même l'horisontale 2^n Y de la projection,

Fig. 144. provenant du point 2 de l'arc BA, ſera coupée au point Y, par la verticale *y* Y; l'horiſontale provenant du point 1, & paſſant par 1 *e*, ſera terminée par la verticale *z* Z en Z; enfin le nud du noyau *e* F ſera coupé en V par la verticale *v* V, qui vient du point *v*, où l'horiſontale L *d* coupe la naiſſance de la voûte A *g*; la courbe tracée à la main, ou avec une regle pliante, par les points X, Y, Z, V, ſera celle de la ſection horiſontale de la doële de la vis quarrée.

Par la même pratique, on aura celle qui ſe forme par la ſection du lit B *d* ou *b f*, de laquelle on a déja le point X, qui eſt ſa rencontre avec celle de la doële, repréſentée auſſi par le point B, qui eſt commun à l'arc BA & au joint de tête B *d*; par le point *i*, qui eſt enſuite ſur le même joint, on abaiſſera une perpendiculaire ſur PN, qui coupera la diagonale PM au point 9, par où on menera l'horiſontale 9 T parallele à PN; puis du point *t*, où l'horiſontale L *d* coupe l'inclinée *i n*, paſſant par le milieu du lit, on abaiſſera une verticale qui coupera la ligne 9 T au point T; enfin par le point *d*, on abaiſſera une perpendiculaire ſur PN, laquelle étant prolongée, coupera la diagonale PM au point *q*, où ſera le troiſieme point de la ſection horiſontale du lit XT *q*, qui eſt un peu courbe, laquelle avec la précédente fait l'angle mixte *q* X V, que l'on cherche, pour former le panneau du lit de deſſus du dé de la vis, qu'il faut ajouter en ſaillie au noyau de la vis, & qui doit ſervir à former le lit de deſſous du ſecond dé *d* L *g* O.

Remarque ſur l'uſage de cette ſection.

Il faut faire ici la même obſervation que nous avons faite au tome précédent ſur la ſection horiſontale du noyau de la vis Saint-Giles ronde; ſçavoir, que ſi le noyau eſt aſſez petit pour être fait d'une ſeule piece, l'eſcalier que cette voûte couvrira aura néceſſairement des marches fort étroites au collet, ce qu'on doit éviter en architecture, comme des *caſſe-cou*, pour me ſervir du terme expreſſif; & ſi le noyau eſt grand, cette ſection devient inutile, parce que les couſſinets s'y doivent loger, comme aux berceaux rampans; ainſi dans les ouvrages bien penſés, cette ſection ne doit pas être d'un grand uſage.

Application

Application du trait sur la pierre.

On doit considérer dans la vis Saint-Giles quarrée quatre sortes de voussoirs de figures différentes. La premiere est de ceux qui portent l'enfourchement rentrant KBL, depuis l'imposte jusqu'à la clef, qui sont à branches à peu près semblables à ceux des arcs de cloître, dont ils different en ce que les branches sont rampantes, l'une en montant, l'autre en descendant. La seconde espece est de ceux de l'enfourchement en angle saillant depuis la clef jusqu'au noyau, qui sont semblables à ceux des voûtes d'arête, avec cette différence que leurs branches sont rampantes, l'une en montant, l'autre en descendant. La troisieme est celui de la clef, qui est partie en voûte d'arête, partie en arc de cloître rampant. La quatrieme est de ceux qui sont dans l'intervalle des enfourchemens, lesquels ne sont pas à branches, ni semblables à ceux des berceaux ordinaires, mais gauches, comme nous l'avons dit, en ce que les cordes de leurs têtes ne sont pas dans un même plan, comme les doliolimes dont nous avons parlé au commencement du tome précédent. Comme cette derniere espece est simple, nous renvoyons pour l'application du trait, à la page 40 du second tome, & nous ne donnerons d'exemple de l'application du trait que pour les voussoirs à branches, & les dés du noyau portant naissance de l'enfourchement d'arête. *Fig.* 142.

Premierement, pour un voussoir à angle rentrant. Ayant dressé un parement pour servir de lit de supposition horisontale, par exemple, pour un second voussoir, dont la projection est donnée à l'épure en Q b^5 S s b^4 q, on tracera cette projection sur un panneau qu'on appliquera sur ce lit, pour en tracer le contour; puis ayant jaugé la pierre à hauteur convenable, on abattra à l'équerre les six paremens verticaux, qui doivent être faits pour préparation sur chacune des lignes qQ, Q b^5, b^5 S, &c. pour former une portion de tour quarrée verticale, telle qu'elle est représentée à la fig. 146. La même chose se fera pour un second voussoir du côté de l'angle saillant, comme le représente la fig. 145. Sur les paremens verticaux de ces portions de tour a B, b D qui forment l'angle rentrant $a\,b\,d$ (comme à la fig. 146); ou eF, f G, formant l'angle saillant $e\,f\,g$ (comme à la fig. 145), on appli- *Fig.* 145 & 146.

Fig. 145 & 146. quera les panneaux deſtinés au rang de vouſſoir dont il s'agit pour le ſecond, comme le parallelogramme L 4ᵉ (fig. 143) en montant depuis l'arête *d* D du plan du joint montant, ou en deſcendant depuis la verticale de l'angle rentrant *b* B, juſqu'à cette arête, comme il convient à l'eſcalier, qui peut monter ou deſcendre d'un côté ou d'un autre, ſuivant la ſituation des lieux; ce panneau ſervira à tracer ſur cette ſurface de ſuppoſition verticale, l'angle obtus L f^4 4e de la fig. 143, ce qui ſuffit, ſans s'embarraſſer de la longueur du panneau, qui peut être ſans inconvénient plus long ou plus court qu'il ne faut pour s'étendre de la ligne d'angle *b* B ſur la ſurface *b* D; ce qui fait voir qu'on peut ſe paſſer de panneau, en prenant ſeulement avec la fauſſe-équerre l'angle d'inclinaiſon de l'arête de doële & de lit, avec un aplomb *b* B ou *d* D, lequel eſt obtus (comme L f^4 4e, de la fig. 143), pour la deſcente; & aigu, comme ſon ſupplément à deux droits f^4 L 5e, pour la montée.

Fig. 142 & 146. La ligne de l'arête de lit & de doële étant tracée, on lui menera une parallele au-deſſous à la hauteur 3, 8 ou 4, 9 (fig. 142) de la retombée 2, 8 ou 9, 5 dans chaque parement d'aplomb *b* A, *b* D en *n u*, *n* D (fig. 146), aux extrêmités deſquelles on menera des lignes d'équerre ſur les arêtes des plans des joints montans *a* A, *d* D, qui ſeront des horiſontales, qu'on fera égales aux retombées obliques *q* Q, *s* S, ſi la longueur des retours du vouſſoir ſe termine en Q & en S. Ou bien on prendra la retombée oblique k^4 k^5, ſi la pierre s'étend de k^5 en S, puis avec le biveau mixte d'aplomb & de doële V 5^4 K de la fig. 142, poſé ſur l'arête A *a* de la fig. 146 en V 5 K, on tracera l'arc K 5 ſur le parement vertical de joint montant *a* R. On en fera de même avec le biveau mixte *u* 5° L de la fig. 142 ſur le parement *d* S de la fig. 146. Enfin avec le biveau mixte *u* 5^b B du ceintre formé ſur la diagonale FB, on creuſera une plumée au-deſſous du point 5^b de la fig. 146, tenant le plan de ce biveau dirigé ſuivant la diagonale de la pierre marquée *b* X; ainſi on abattra la pierre ſuivant les trois arcs donnés 5^a K, 5^b B, qui eſt celui de la plumée du milieu, & 5° S, en poſant la regle de l'un à l'autre ſur les parties aliquotes de ces arcs elliptiques; c'eſt-à-dire que ſi la regle eſt ſur la moitié de l'un par un bout, elle ſoit auſſi ſur la moitié de l'autre arc vers le ſecond bout de la regle; ſi elle eſt poſée ſur le tiers

d'un arc en haut, elle soit aussi sur le tiers de l'autre du même côté d'en haut, comme nous l'avons dit de la formation des surfaces doliolimes, parce que chacune des branches des voussoirs d'enfourchement de cette voûte sont des doliolimes à la doële, & que leurs lits sont des surfaces mixtilimes.

Celles-ci se feront facilement de la même maniere, après que les doëles seront faites, en prenant les biveaux mixtes de lit & de doële donnés à la fig. 142 en $8^a 5^a$ K, $8^b 5^b$ B, $8^o 5^o$ L, qu'on tiendra toujours dans une situation verticale, posant la branche courbe sur les mêmes arcs qu'on a formé avec les bivaux mixtes d'aplomb & de doële, & la branche droite dans le même plan que cet arc, ce qui est facile sur les paremens *a q*, *d 5* qui sont donnés ; mais pour le milieu, on dirigera cette branche droite vers un point X marqué dans la diagonale de la pierre, où l'on fera aussi une plumée pour la direction de l'inclinaison de ce lit; ces trois lignes données serviront à former les lits gauches, comme nous venons de le dire de la doële gauche. Les lits de dessous se feront de même, & la pierre sera achevée. *Fig. 142 & 146.*

L'exemple que nous venons de donner pour un des voussoirs d'enfourchement, dont les doëles font un angle rentrant, comme aux arcs de cloître, montre aussi de quelle maniere on doit faire ceux dont les doëles font un angle saillant, comme les voûtes d'arête, ce que la fig. 145 expose à la vue, du moins pour un côté *f* G, parce que l'autre qui est derriere ne peut être dessiné qu'en supposant la pierre transparente, ce qui cause une confusion de lignes difficile à démêler. Il faut seulement observer que les paremens verticaux *g r*, $1^x k$, destinés pour les têtes, doivent toujours être dans un plan dirigé au centre M de la fig. 142, comme KM, BM, LM, sans quoi la retombée GN ne doit pas être égale à N *r* de la fig. 142, ni d'équerre sur l'arête *g* G de la fig. 145, parce qu'il n'y a que les sections verticales qui tendent à l'axe de la vis, qui est tout représenté en projection horisontale par le seul point M, quelque hauteur qu'il puisse avoir, qui soient des demi-ellipses droites ; tous les autres ceintres des sections qui passent ailleurs que par le point M sont des demi-ellipses rampantes, lesquelles sont toutes différentes suivant leur direction, & suivant l'éloignement où elles sont du diametre GD du ceintre primitif, mais qu'il n'est pas nécessaire de décrire, parce que *Fig. 142 & 145.*

Fig. 142 & 145. les joints de doële aux têtes des voussoirs ne doivent point avoir d'autre direction qu'à l'axe de la vis, dont la base est le point M.

Supposant cependant qu'on eût quelque raison de tracer un de ces ceintres transversaux par une ligne donnée, par exemple en P r^o, (fig. 142) perpendiculairement à la direction de la vis du côté GF, prolongée en P de l'intervalle d'une retombée G p^2. On prolongera la naissance de la voûte du côté du noyau OG en e jusqu'à l'aplomb 2 p^2, puis on portera l'intervalle B r^o de D en p^2, où il tombe par hasard, duquel abaissant la perpendiculaire p^2 W, on prendra la hauteur e W qu'on portera du point r^o en R perpendiculairement à P r^o; la ligne PR sera le diametre rampant de la section verticale par la ligne donnée P r^o, & la hauteur sous clef CH du ceintre primitif GHD sera la moitié de son diametre conjugué. Ainsi sur tous les points o, o, où le diametre PR coupe les projections des joints de lit de la vis, on posera les ordonnées p^5 5, p^4 4, &c. qui donneront les points r^5, r^4 de l'arc rampant P h^r R que l'on cherche; mais comme la projection horisontale P r^o coupe la diagonale FB au point d^2, par où passe l'ordonnée à plomb $o\,x$, il est visible que la partie de l'arc depuis P en x, est dans le vuide du second berceau BF, par conséquent que le point x répond au point f^2 du ceintre de la diagonale F h^d B, où finit l'arc rampant; ainsi la section qu'on cherche n'est pas une demi-ellipse complette, mais seulement un arc x h^r R, *qu'il falloit déterminer.* Il est visible que plus le diametre donné approchera du point B, plus l'arc de la section diminuera, & au contraire qu'il augmentera d'autant plus qu'il approchera du point F, ensorte que lorsque le diametre sera terminé au noyau, la section sera une demi-ellipse. Il est aussi visible que ce ceintre sera d'autant plus rampant, qu'il approchera du point B, & d'autant moins que son diametre approchera de celui du ceintre primitif GD, qui est de niveau.

Explication démonstrative.

Fig. 142. On a vu, lorsque nous avons expliqué la vis Saint-Giles ronde, que ses joints de lit à la doële étoient des hélices inégalement inclinées à l'horison. Ici au lieu d'hélices, ce sont des lignes droites aussi inégalement inclinées à l'horison, qui

ſont repréſentées pour une moitié de rampe par les lignes OG, Fig. 142.
O p^2, O p, &c, OD, qui ſe croiſent au point O, qu'il faut concevoir au milieu de EF de la fig. 141, ou du noyau, comme en O, ou de la tour quarrée dans laquelle eſt la vis, comme en o, enſorte que le point O du profil (fig. 142) ſoit conçu comme étant à plomb au-deſſus ou au deſſous du point E, ou du point A, ſelon l'inclinaiſon de montée ou de deſcente de A en B, ou de B en A, de ſorte que le ſeul point O du profil repréſente les ſix points A, o^5, o^4, o, o^2, E, & le triangle OGD, toutes les ſections verticales faites par les lignes EF, $o\ d$, $o^3 d^3$, $o^4 b^4$, $o^5 b^5$, AB, dont les valeurs ſont OG, O p, O p, O p^4, O p^5, OD.

Cela ſuppoſé, il eſt clair que toutes les ſections horiſontales qui tendront à l'axe, & qui ſeront en ſituation horiſontale comme MD, par exemple na, feront toutes des angles égaux avec les joints de lit OG, O p^2, &c. par conſéquent que tous les diametres IK, FB, NL, GD ſeront des axes de ces ſections, parce que toutes leurs ordonnées ſeront à angle droit, comme celles du ceintre primitif GHD, mais non pas celles des ſections qui ne paſſeront pas par le point M dans la projection horiſontale, parce qu'elles ne tendront pas à l'axe. Il nous reſte à expliquer pourquoi (fig. 146) nous avons pris les retombées quarrément ſur les arêtes a A, d D, comme ſi la doële n'étoit pas gauche, parce qu'il ſemble que par cette conſtruction la naiſſance des arcs de la doële doit être une ligne droite parallele à celle du panneau des hauteurs de retombées, & cependant on voit évidemment par le profil que ces lignes ne ſont pas dans un même plan, & qu'elles ſe croiſent. Pour détromper l'eſprit de cette fauſſe apparence, il n'y a qu'à conſidérer que les retombées de chaque pan de doële, comme K k^5, B b^5, ne ſont ni paralleles ni égales, & que cependant chacune d'elles eſt dans un plan de niveau, quoique les lignes qui aboutiſſent à leurs extrêmités ſoient rampantes; or il eſt clair que ſi l'on fait une ligne $b^5\ t$, parallele à la retombée K k^5, le point t tombera au-deſſus ou au-deſſous de B, puiſque B & b^5 ſont de niveau, par la ſuppoſition; car le point t n'aura pas aſſez monté, ſi la rampe monte de K en B, ou le point t ſe ſera élevé au-deſſus de b, qui eſt de niveau avec le point B, par conſéquent l'arête de la naiſſance de la doële & du lit inférieur neſera pas parallele à la baſe du panneau des hauteurs de

retombées, qui eſt plus courte que cette arête du côté de l'arc de cloître, & plus longue du côté du noyau qui fait la voûte d'arête.

Fig. 147 & 148. On a repréſenté à la fig. 147 une pierre du noyau portant enfourchement ſans coupe, mais en ſection horiſontale, & à la fig. 148, une pierre du noyau qui doit ſe poſer au deſſus ou au-deſſous entre les angles, pour donner une idée de leur figure, & ſoulager l'imagination de ceux qui voudront couper du trait, comme il convient de le faire avant que d'en venir à l'exécution, parce que les figures des pierres de cette vis ſont trop ſingulieres pour ſe les bien repréſenter dans l'imagination, ſans la ſoulager par des modeles, lorſqu'il s'agit de l'exécution.

CHAPITRE VIII.

Des voûtes compoſées de coniques & de cylindroïdes.

ON fait des eſcaliers *ſuſpendus*, ou plutôt portés par des voûtes de différentes eſpeces, qui n'ont d'appui que du côté de la *cage*, parce qu'on laiſſe le milieu vuide, ce qui leur donne plus de gaieté & de lumiere. Comme ces cages ſont ordinairement quarrées ou en quarré long, on pratique, aux angles, des paliers qu'on ſoutient par des trompes, ou par des demi berceaux en arcs de cloître; ſouvent dans le même eſcalier on fait des voûtes de l'une & de l'autre eſpece; ſavoir, des trompes ſous les paliers quarrés qui font le retour des rampes & des demi-voûtes en arcs de cloître ſous les paliers de communication d'un appartement à l'autre. De quelque maniere qu'on ſoutienne ces paliers, on fait porter les rampes par ces eſpeces de demi-berceaux droits ſur les impoſtes & courbes au ſommet, que nous avons appellé au tome précédent *cylindrico-ſphéroïdes*, & dont nous avons donné le trait à la pag 490. Nous avons auſſi donné les traits des voûtes en *trompes ſur le coin*, & en arcs de cloître, qui conviennent pour ſoutenir le palier; il ne s'agit ici que d'un aſſemblage de ces parties, que nous connoiſſons chacune en particulier, c'eſt en quoi conſiſte toute la difficulté de ce trait.

141.

142.

143.

144.

145.

146.

147.

148.

PROBLEME XIII.

Faire un escalier suspendu & à repos, porté par des trompes ou des voûtes en arcs de cloître.

Soit (fig. 149) un quarré ou un quarré long ABDE, le plan horisontal de la cage d'un escalier, au milieu duquel on veut laisser un vuide FGIK, compris par les côtés des rampes FG, GI, IK, & par un palier de communication d'appartements R *k* EA. Si l'on prolonge les côtés des trois rampes FG, GI, IK, de part & d'autre, leurs prolongations formeront dans les angles de la cage deux quarrés *m* BHG, & I*æ*DN, ausquels aboutissent les rampes des marches, les unes en montant, comme FG en G *m*, les autres en descendant, comme IG en GH. Quoique nous ne parlions ici que d'une cage quarrée ou en quarré long, rien n'empêcheroit qu'on ne pût pratiquer le même escalier dans un autre polygone, pentagone, exagone, &c. alors les paliers ne seroient plus quarrés, mais des trapezoïdes, qui auroient un angle obtus, qui les rendroit d'autant moins propres à y construire des voûtes solides, qu'il seroit ouvert, parce que la partie qui porteroit à faux étant dans l'angle aigu, elle deviendroit plus grande, & par conséquent plus foible. D'où il suit que dans une cage en triangle, l'escalier deviendroit plus solide, mais les paliers ne seroient plus quarrés, par conséquent ils seroient moins beaux; ainsi il faut s'en tenir à la figure d'une cage en quarré ou en quarré long. Planch. 100. *Fig.* 149.

Cela supposé, on commencera par faire le profil d'une des rampes, en faisant servir le côté AB pour sa base, & élevant des perpendiculaires sur les points R & *m*, ce qui se fera facilement si la cage est sur un rectangle, parce qu'alors il n'y a qu'à prolonger les côtés du vuide KR & I *m*. Sur une de ces perpendiculaires, comme *m* M, on portera la hauteur de la rampe, c'est-à-dire, la somme de celle de toutes les marches qu'elle contient, laquelle sera égale à la moitié de FG, si les girons sont doubles de la hauteur des marches, on tirera RM pour la ligne de rampe, & l'horisontale M *b* égale à *m* B, pour le profil du repos auquel elle aboutit. On fera ensuite la projection verticale de la trompe qui doit couvrir ce palier &

Fig. 149. porter celui de l'étage au-dessus $G^m B$, laquelle projection sera l'élévation d'une des têtes d'une trompe sur le coin, que nous avons dit au tome précédent, page 271, devoir être une parabole; & comme cette tête de trompe doit se joindre immédiatement avec celle du demi-berceau qui couvre la rampe, en montant d'un côté & en descendant de l'autre, il suit que cette courbe doit aussi être celle des têtes du demi berceau rampant, & non pas un quart de cercle, ni un arc de 60 dégrés, comme le font le P. Derand & après lui M. de la Rue, qui ayant fait la hauteur R *r* égale à RA, largeur du palier, tracent de l'intervalle A *r* pour rayon, & des points A & *r* pour centres, des arcs qui se coupent en C^e, d'où comme centre & du même rayon ils décrivent l'arc A *q r*, dont ils font le ceintre de la tête de la trompe & de la rampe.

Pour moi, qui ne dois copier personne, pour ne pas faire acheter au Public ce dont il est déja en possession, je fais mon ceintre primitif parabolique, non par affectation, pour me distinguer, mais par plusieurs raisons qui me paroissent mériter qu'on y ait égard. La premiere est, que la pratique des Auteurs nommés pêche contre une regle de décoration, qu'on doit inviolablement observer lorsqu'il est possible, qui est d'éviter les jarrets à la jonction des surfaces planes des murs avec les courbes des voûtes : or il est clair que l'arc A *q r* fait un jarret en A avec la ligne AL, qui représente le profil du mur de cage, puisque le rayon AC^e de l'arc de 60 degrés A *q r*, n'est pas perpendiculaire sur LA, qui est une verticale, avec laquelle il fait un angle aigu de 75 degrés, comme il est aisé de le démontrer. Car l'angle de la corde *r* A avec le rayon AC^e est (par la construction) de 60 dégrés, par conséquent plus grand de 15 degrés que l'angle RA *r*, qui est de 45 : ainsi l'angle $LAC^e = 90 - 15 = 75$: donc la droite LA, prise comme profil du mur aplomb, fait avec l'arc A *q r* un jarret en A, parce que la ligne AL n'est pas une tangente à l'arc A *q r*, mais seulement au quart de cercle A *n r*, au dedans duquel est l'arc A *q r*. Puisqu'on doit éviter cette difformité, & cependant diminuer un peu de la concavité du quart de cercle, afin que que la voûte pousse moins au vuide, il suit qu'on doit preferer la parabole à l'arc de 60 degrés, pour que la voûte ne fasse pas de jarret à sa naissance A, & qu'elle ne pousse pas trop au vuide en *r*.

La

La seconde raison est, que cette courbe de ceintre en demie parabole, qui est peu différente dans son contour A *p r* de l'arc de 60 dégrés A *q r*, comme il paroît à la vue par le peu de distance du point *p* au point *q*, a cependant beaucoup moins de poussée en *r*, puisque la partie *r p* 1 s'éleve beaucoup moins que la partie *r q* 1. Fig. 149.

La troisieme raison est, que les jarrets étant inévitables à la jonction des voussures rampantes avec les trompes dont les axes AR & M *b* sont de niveau, il vaut mieux diminuer ceux des voussures à leurs bases qu'à leurs sommets, parce que la direction de la poussée de leur charge sur la trompe agit moins contre le vuide, étant évident que l'angle curviligne *p r*H est plus ouvert que l'angle *q r* H, par conséquent que la charge de la rampe est mieux appuyée sur la trompe, & que le jarret qui est en *r* dans l'une & l'autre construction, est moins sensible dans la mienne. Je conviendrai que s'il diminue à la base, il augmente au sommet S; mais il est clair que la solidité n'en souffre point, au contraire la voûte en seroit plus solide, & quant à la beauté de la décoration, il sera aisé de supprimer ce jarret, en faisant la courbe rampante *r* HS de deux arcs de cercles, au lieu d'un seul, tel que le font les Auteurs cités, en faisant le petit TS tangent au premier *r* HT, & à la parabole S *b*, comme nous le pratiquerons dans notre trait.

La quatrieme raison qui me détermine au ceintre parabolique, est la simplicité & l'uniformité de la doële de la trompe, qui sera une portion d'un seul cône droit régulier, coupé obliquement par ses faces, comme la *trompe droite sur le coin*; au lieu qu'en faisant le ceintre A *q r* de chacune des faces circulaires, il en résulte une surface moins réguliere, qui est un composé de deux portions de cônes scalenes, dont les surfaces qui se rencontrent sur la diagonale AF ou BG, font entre elles un angle saillant à la clef, comme on peut le concevoir par le discours de la page 129 du I[er]. tome, & en jettant les yeux sur la fig. 80 de la planche 7 du premier livre, qui représente la position de ces deux cônes, qui se pénétrent mutuellement, vus en perspective. Cet angle saillant est à la vérité fort obtus, mais il ne l'est pas au point qu'il devienne insensible, par conséquent il interrompt l'uniformité de la doële & y fait un jarret sans nécessité.

Enfin la cinquieme raison est, que le ceintre parabolique

Fig. 149. n'eſt pas moins convenable à la vouſſure rampante, qui porte les marches entre les paliers, qu'aux trompes qui ſoutiennent ces paliers, auxquelles cette vouſſure doit ſe joindre, en ce que le renflement des ceintres tranſverſaux de la rampe *r* HS ſe fait très-regulierement par des paraboles de différentes amplitudes, qui ont toujours leur axe de niveau, & leur ſommet à la naiſſance de la vouſſure RM, laquelle courbe par cette diſpoſition n'y fait aucun jarret, comme on peut le remarquer au profil D æ 8 h^m, qui ſera expliqué ci-après; cela ſuppoſé, nous venons à la conſtruction.

Ayant pris la longueur AR pour axe d'une parabole, & la hauteur *r* R pour ſon amplitude, c'eſt-à-dire pour ſa plus grande ordonnée, on décrira cette courbe (par le probl. X du 2^d liv.) laquelle ſervira de ceintre primitif, tant pour les trompes des paliers, que pour la vouſſure rampante qui porte les marches de l'eſcalier à ſa jonction, & on le diviſera en ſes vouſſoirs aux points 1°, 2°, 3°, par leſquels on menera des paralleles à l'ordonnée *r* R, qu'on prolongera juſqu'à la ligne L^e K, qui eſt la projection de la tête de la trompe oppoſée du palier L^e E *k* K.

Ces lignes couperont la diagonale aux points a^1, a^2, a^3, F, par où on menera des paralleles au côté AB de la cage, juſqu'à la rencontre de la ligne *m* G, qui eſt auſſi la projection de la face de la trompe oppoſée à l'autre coin B, qui porte le palier *m* B H° G. Ces lignes & les précédentes donneront les cordes des projections des joints de lit des vouſſures rampantes, comme RM, & auſſi de celles qui peuvent être de niveau, comme FK, ſuppoſant que ce ſoit un palier de communication d'appartemens de plain-pied.

J'ai dit que ces lignes étoient les cordes des projections, & non pas les projections, parce que les arêtes des joints de lit doivent être des courbes à double courbure, comme nous l'avons dit au tome précédent, (pages 494 & 495) contre la pratique des Auteurs qui ont écrit de ce trait. Il n'en eſt pas de même pour les joints de lit des trompes, qui ſont des lignes droites, parce que ce ſont des ſections *verticales*, c'eſt-à dire par le ſommet du cône, par conſéquent leurs projections ſont les lignes droites tirées du ſommet A ou B, par les points p^1, p^2, p^3, F, & 1^r, 2^r, 3^r, F, qui ſont les projections des diviſions du ceintre primitif. La valeur de toutes ces projections ſe trouvera, comme il a été dit au tome précédent, au trait de la trompe ſur

le coin (page 270) en faiſant un profil ſur chacune de ces projections pour baſe, par un triangle rectangle où l'on a les jambes données; ſçavoir la projection horiſontale pour une, & la hauteur de la diviſion pour l'autre; l'hypotenuſe ſera la vraie longueur du joint de lit, de laquelle on déduira celle du trompillon. *Fig.* 149.

Pour faire ces profils, on peut profiter de l'angle droit K k N, & porter ſur N k les hauteurs des diviſions du ceintre primitif 1° n^1, 2° n^2, 3° n^3, r R, en k^1, k^2, k^3, k, K; & les projections A p^1, A p^2, A p^3, AF, en ka^1, ka^2, ka^3, kaf; les lignes k^1a^1, k^2a^2, k^3a^3, K af, ſeront les valeurs des joints de lit de la trompe que l'on cherche. Quant à la projection horiſontale & verticale de la rampe, ſi l'on veut faire les intervalles des joints de lit égaux entre eux dans chaque ſection verticale ou inclinée, il faut avoir recours au trait qui a été donné à la page 490 du tome précédent; mais ſi, pour la facilité de l'exécution, on vouloit ſe relâcher de la grande régularité, qui donne pour les arêtes des lits des courbes à double courbure, & les faire en courbes planes dans des plans verticaux, on peut s'y prendre de la maniere ſuivante. On tracera, ſi l'on veut, à la main la courbe r HTS, ſuivant le bombement qu'on veut donner à l'arête du ſommet de la vouſſure, au-deſſus de la ligne droite de rampe r S, parallele à RM, & le racordement de cette courbe avec le profil de la tête de la trompe, qui eſt une parabole S p b.

Ou bien, ſi l'on veut opérer géométriquement, pour éviter les jarrets au point S, on portera la longueur M b en bt prolongée; on tirera t S, qui ſera une tangente à cette parabole, à laquelle on menera par le point S, une perpendiculaire S o, ſur laquelle on prendra à volonté un point O, pour centre du petit arc de racordement ST. Enſuite par un point T de cet arc, auſſi pris à volonté, on tirera par le point O, une ligne indéfinie TOC^r. Puis par les points T & r, ayant tiré la corde T r, on la diviſera en deux également en m^t, où on lui tirera une perpendiculaire qui rencontrera la ligne TO prolongée en un point C^r, duquel comme centre, on décrira l'arc r HT qui touchera l'arc TS, lequel TS touche auſſi la parabole; par conſéquent il ne ſe fera point de jarret depuis le point r de la trompe inférieure juſqu'au point b, qui repréſente ſur le même plan vertical

Fig. 149. le point H° du plan horisontal, ſur le même alignement, du côté de l'eſcalier.

On peut décrire auſſi cet arc rampant par les différentes manieres qui ont été données au 2^d livre, en ſe donnant à volonté une ligne de ſommité, & prolongeant la tangente *t* S juſqu'à cette ligne de ſommité ; enſuite chercher le point T de l'attouchement de la courbe à décrire avec cette ligne de ſommité, par exemple *i i* ; & continuer par les prob. XIII, page 184, & XV, page 188, ou XX, page 210 (*Tome I*). Comme ce bombement que l'on donne au ſommet de la vouſſure n'eſt fait que pour donner de la force à cette partie qui porte le limon des marches, & que l'impoſte de ſa naiſſance RM eſt toujours une ligne droite, ce bombement doit inſenſiblement diminuer à chaque joint de lit, comme il a été dit au tome précédent, page 491, où nous avons fait leurs arêtes à double courbure, ſuivant la grande régularité.

Mais comme pour variété de trait, nous nous relâchons de cette régularité, en faiſant ces arêtes en courbes planes, comme font tous les Auteurs cités, on pourra auſſi diminuer comme eux le renflement de ces arêtes, mais plus régulierement, comme nous allons faire. On menera par les points de hauteur des diviſions de la trompe inférieure à ſa tête f^1, f^2, f^3, *r*, des paralleles à la rampe RM, qui donneront ſur SM les points 1^s, 2^s, 3^s, S, par leſquels on tirera des lignes du point *t*, comme $t\,1^s$, $t\,2^s$, $t\,3^s$, auxquels on fera à ces points des perpendiculaires qui couperont la ligne TC^r en des points c^1, c^2, c^3, où ſeront les centres des petits arcs de cercle qui couperont la même ligne TC^r en des points t^1, t^2, t^3, par leſquels on tirera des cordes qu'on diviſera en deux également, pour faire ſur leurs milieux des perpendiculaires, comme on a fait ſur la corde *r* T, leſquelles couperont la ligne TC^r en des points où ſeront les centres du grand arc qui acheve le rampant ; leſquels centres s'éloignant toujours de plus en plus, donnent des arcs moins convexes, à meſure qu'on approche de l'impoſte, qui ſont cependant toujours tangens au petit, lequel ſe racorde à peu près avec les joints de lit de la trompe ſupérieure, comme au ſommet S. Les projections verticales des joints de lit étant données, elles ſerviront à faire les profils des ſections verticales de la vouſſure rampante RS, qui ſont néceſſaires pour

former les têtes des vouſſoirs, & des cerches pour creuſer leurs doëles. *Fig.* 149.

Suppoſant, par exemple, qu'on veuille faire un *profil par la ligne du milieu* HM^e, on prendra pour baſe de ce profil une ligne horiſontale, comme I $æ$, qui eſt diviſée en parties égales à celle de la ligne LF ou OP, qui eſt la ſection du plan vertical HM^e, avec la projection horiſontale de la vouſſure. Sur IG, perpendiculaire à I $æ$, on portera la hauteur H m^r du point I en h^m; ſur ſa parallele 3^p 3^z, on portera la hauteur m^r z^3; ſur 2^p 2^z, on portera la hauteur m^r z^2; enfin ſur 1^p 1^z, on portera la hauteur m^r z^1, & par les points $æ$, 1^z, 2^z, 3^z, h^m, on tracera la courbe h^m 2^z $æ$, qui ſera le profil du milieu de la vouſſure, par un plan perpendiculaire au mur de la cage. On pourra faire autant de profils que l'on voudra ſur d'autres plans paralleles, paſſans par des points donnés h^d Q & h^e q, en prenant les hauteurs des ſections des arcs rampans avec les projections verticales des joints de lit au-deſſus de la rampe aux points m^d, m^e. Les courbes tracées ſuivant cette méthode ſont moins régulieres que des arcs de parabole, qu'on peut leur ſubſtituer en opérant d'*une maniere inverſe*.

Au lieu de commencer par les projections verticales des joints de lit, comme nous venons de faire, on peut commencer par faire les profils des ſections verticales de la vouſſure, par des plans perpendiculaires au mur de la cage, leſquels auront toutes leur axe de même longueur OP ou I $æ$; & pour amplitudes des demi-paraboles qu'on veut faire, on aura les hauteurs différentes h^d m^d, H m^r, h^e m^e; ainſi (par le prob. X du 2e liv.) on décrira les demi-paraboles h^m $æ$, h^e $æ$, h^d $æ$, qui couperont les paralleles à IG aux points 3^z, 3, 3^d; 2^z, 2, 2^d; 1^z, 1, 1^d, leſquels détermineront les hauteurs de la projection verticale SR, qui doivent donner les points des courbes rampantes f^1, z^1, 1^s; f^2 z^2 2^s; f^3 z^3 3^s; r, H, S. Cette derniere maniere a l'avantage ſur la précédente que la doële eſt plus réguliere, étant un paraboloïde tangent au mur de la cage; mais la précédente eſt plus propre à diminuer les jarrets des joints de lit de la vouſſure à leur jonction avec ceux des trompes.

Lorſqu'on ſuit la maniere du P. Derand, qui ne fait qu'un arc de cercle dont r S eſt la corde, ces jarrets ſont d'autant plus ſenſibles que cet arc eſt d'un petit nombre de degrés, & ſi pour les diminuer on veut faire cet arc plus concave, en le

Fig. 149. faiſant d'un grand nombre de degrés, on eſt obligé de prendre la naiſſance de la voûte fort bas, ou d'entailler les vouſſoirs du ſommet pour y loger les marches de l'eſcalier, ce qui l'affoiblit; le ſeul avantage qu'on peut alléguer en faveur de ſa conſtruction, eſt que le plus grand enfoncement de l'arc eſt au milieu du vuide de l'eſcalier, ce qui ne mérite aucune conſidération, parce que les arcs rampans ſont naturels à la ſituation inclinée des faces qui ſont ſur le vuide de la cage. Venons préſentement à la formation du ceintre de bombement de la vouſſure LFKL^e, qui porte le grand palier de communication de niveau d'un appartement à l'autre, lequel a ſa naiſſance ſur la ligne droite AE, & ſa tête à plomb de la ligne FK. Cette vouſſure peut être jointe en LF & L^e K, à une trompe ſur le coin ALFR, de même qu'à l'autre bout en L^e K *k* E, ou bien à un arc de cloître établi dans chacun des angles; nous y ſuppoſerons encore des trompes.

Il eſt aſſez difficile de racorder le bombement de cette vouſſure avec le ceintre de tête de ces trompes, qui fait une continuation de ſection tranſverſale verticale ſur la ligne de projection horiſontale R *k*, ſans qu'il y paroiſſe quelques jarrets, à moins que la cage ne ſoit un peu large. Il faut ſe contenter de les rendre les moins ſenſibles que l'on peut. Le trait du P. Derand & celui de M de la Rue en font un à chaque naiſſance R & *k*, parce qu'ils font le ceintre primitif de la trompe qui n'eſt pas tangent au mur de cage. Par notre méthode nous effaçons celui-là, & même celui qui ſe fait à la jonction de la vouſſure en L & L^e, ou F^e & K^e, même lorſqu'on ſera aſſujetti par une hauteur de palier donné P^a P^e, qui ſoit trop baſſe pour ne faire qu'un arc de cercle dans la face ſur le vuide. Soit R a^2 L, le profil de la tête de la trompe ſur la ligne RF, que nous avons fait en demi-parabole; on portera la longueur LA ſur la même ligne prolongée en *r*, & l'on tirera la droite *r* L, à laquelle on fera au point L une perpendiculaire, qui coupera la ligne du milieu de la cage *c* M^e *d* en X, où ſera le centre de l'arc L *d* L^e; & au cas que le point *d* monte trop haut, comme il peut arriver lorſque le palier eſt long, il faudra faire ce ceintre de trois arcs de cercle qui ſe touchent ſans ſe croiſer, ſuivant la méthode que nous avons donné au Tome I. liv. II, page 203.

Ou ſi l'on veut, pour opérer encore plus parfaitement, on peut faire paſſer un arc elliptique par les trois points donnés

LVLe, enforte qu'il foit tangent aux deux paraboles, c'eft-à-dire perpendiculaire à la ligne LX d'un côté, & L^e X de l'autre; ce qui eft facile en prolongeant les deux tangentes des paraboles des trompes qui fe rencontreront en Y; la ligne paffant par YX fera fur un des demi-diametres de l'ellipfe, & (par le probl. XIV, page277 du tome II,) on trouvera autant de points que l'on voudra de cet arc d'ellipfe. Les joints de lit de cette vouffure, qui eft de niveau fuivant la direction de fon impofte, diminueront comme ceux des vouffures inclinées par leur impofte & rampantes par le bombement fur le vuide de la cage, & courbes depuis le fommet jufqu'à l'impofte, comme il a été dit pour la vouffure RS rampante; les doëles des vouffoirs fe feront auffi, fi l'on veut, en ceintres paraboliques. La projection horifontale, & la verticale des joints de lit étant faite, on s'en fervira pour tailler les vouffoirs par équarriffement; parce que la voie des panneaux feroit trop incommode, à caufe du *gauche* de la doële. *Fig.* 149.

Application du trait fur la pierre.

Suppofant qu'il s'agiffe d'un vouffoir d'enfourchement de la trompe & de la vouffure rampante à la feconde affife, on commencera par dreffer un parement pour un lit de fuppofition horifontale, dont on levera le panneau fur l'épure, fuivant la longueur de la pierre deftinée à la formation de ce vouffoir, qui eft déterminée au plan horifontal par l'exagone irrégulier $u\ 1^r\ d\ e\ 2^r\ t$, qui eft partie dans la trompe $u\ 2^r$, partie dans la vouffure rampante en $2^r\ d$. Ayant tracé fur le lit de fuppofition le contour de ce panneau, on abattra enfuite la pierre à l'équerre fur l'angle faillant $t\ 2^r\ e$, pour former deux paremens à plomb, qui fe rencontreront fuivant une arête verticale, fur laquelle on portera les hauteurs $o\,f^1$, $o\,f^2$, prifes au profil au-deffus de l'horifontale Vo, menée par le point V le plus bas du vouffoir donné par la fection de la verticale uV, & de la projection du joint de lit Af de la fig. 149. On portera auffi fur la ligne VT de la fig. 150 la hauteur VV du profil, qui eft donnée par l'interfection de la verticale uV prolongée avec le profil du joint de lit A f^1, & l'on tirera fur le parement V b de la fig. 150 les lignes V f^1, V^2 f^2. *Fig.* 149 & 150.

Sur le fecond parement b D, on tracera auffi avec un panneau

Fig. 149 & 150. le profil de la partie $f^1\ d^1$, $e^2\ f^2$, qui repréſente dans ſes juſtes meſures la longueur & l'inclinaiſon de la partie du vouſſoir qui entre dans la vouſſure rampante, au lieu que la partie précédente V f^2 étant racourcie dans ce même profil, on n'a pas pu en faire un panneau. Sur ce ſecond parement, on abattra la pierre à l'équerre le long des lignes $f^1\ d^1$, $d^1\ e^2$; & au premier parement on l'abattra à l'équerre ſuivant la ligne $t\ f^1$ & non pas ſuivant la ligne t V, mais ſuivant un biveau $2^r\ t\ y$, formé ſur l'angle du joint $t\ 2^r$ avec la ligne $t\ y$, parallele à la corde LR. Par cette opération, on formera les deux têtes des branches du vouſſoir, pour y poſer les arcs de chacune des ſections des deux voûtes, & un plan incliné perpendiculaire au vertical paſſant par l'arête du joint de lit de la trompe, pour tracer ſur cet incliné les lignes de retombées de ces arcs, à la diſtance où elles ſont marquées dans la projection, & convergentes comme $2^r\ t$, $1^r\ u$. Enfin on formera une quatrieme ſurface courbe, ſuivant l'incliné $f^1\ d^1$, pour y tracer les deux paralleles de la projection $1^r\ d$, $2^r\ e$.

Il faut préſentement abattre la pierre ſuivant les lignes des joints de lit des arêtes ſupérieures; ſavoir, V f^2 qui eſt droite, & $f^2\ e^2$ qui eſt courbe, en ſe ſervant des biveaux d'aplomb & de coupe, qu'on a tracé un peu au-deſſous en $a^2\ 2^o\ 6$ pour la trompe, & $2^o\ 2\ 6$ pour la vouſſure rampante; par ce moyen, on formera les deux lits de deſſus, qui ſe rencontreront en angle ſaillant ſur la diagonale de projection $2^r\ 1^r$. Après avoir formé le lit de deſſus par le moyen du biveau de coupe & d'aplomb, on formera le lit de deſſous, en abattant la pierre avec le biveau de niveau & de coupe marqué aux profils, tant de la trompe que de la vouſſure $O^r\ 1^o\ 5$, tenant la branche de celui de la trompe parallele à la tête $t\ y$, & celui de la partie de la vouſſure d'équerre à l'arête courbe $f^1\ d^1$, c'eſt-à-dire auſſi parallele à la tête. Enfin avec les biveaux mixtes de lit & de doële, ou avec des cerches différentes priſes ſur les profils des paraboles h^d æ, h^e æ, &c. on formera la ſurface de la doële entre les deux arêtes de lit données, en tenant ces cerches paralleles à la tête.

Nous diſons qu'il faut des cerches différentes, parce que la ſurface de cette vouſſure étant gauche & irréguliere, une cerche ne peut ſervir que pour une ſeule poſition donnée: ce qui eſt clair, parce que les intervalles des arêtes des joints de lits

s'écartent

s'écartent les uns des autres, en montant jusques vers T, & ensuite se resserrent jusques en S.

Quoique nous ne parlions que de cerches en position verticale, on pourroit cependant en faire d'inclinées perpendiculaires au plan du mur vertical ; mais celles-ci ne seroient plus des paraboles, & suivant la formation de la voussure, il faudroit en chercher les points par leurs intersections avec les paraboles primitives, ce qui alongeroit l'opération sans qu'il en revînt aucun avantage, qu'au cas que la voussure fût revêtue de lambris de menuiserie, ce qui ne se pratique jamais en fait d'escalier.

Après avoir parlé des voussoirs d'enfourchement, il nous reste à dire quelque chose des autres en continuation vers la trompe ou vers le rampant. Pour ceux de la trompe sur le coin, nous n'avons rien à ajouter à ce qui en a été dit à la page 270 du II tome. Mais à l'égard de ceux du rampant, il seront tracés par la voie d'équarrissement.

Ayant dressé un parement *a b c d*, on le destinera pour être un vertical de supposition, sur lequel on appliquera le panneau que donnera la longueur de la pierre présentée sur l'élévation, par exemple, pour la continuation du même voussoir du second rang, le quadriligne mixte $e^2\, y\, z\, d^1$, & l'on abattra la pierre suivant le contour de ce panneau à l'équerre de trois côtés, savoir par les deux têtes & au lit de dessous, lequel sera creusé en portion cylindrique, suivant la courbe $d^1\, z^1$. Ensuite avec le biveau d'aplomb & de coupe $R^2\, 2^1$, 6, on abattra la pierre pour former le lit de dessus, suivant l'arête courbe $e^2\, y$, tenant toujours une branche du biveau parallelement aux arêtes des têtes $e^2\, d^1$ & $y\, z$, & l'autre dans un plan perpendiculaire au premier parement, ce qui formera une surface convexe, portion d'un cylindre scalene ; & dans la surface concave, qui est une portion d'un cylindre droit, que nous avons fait pour avoir seulement l'arête du lit de dessous, on y tracera une parallele avec une regle pliante distante de l'arête $d^1\, z^1$ de la longueur de la retombée $p^1\, p^2$ de ce voussoir, suivant laquelle on abattra la pierre avec le biveau 4 1 *o* de la coupe du lit 4 1, & d'une ligne de niveau 1 *o*, & l'on formera ainsi le lit de dessous, après quoi l'on creusera la doële suivant les cerches de plusieurs arcs verticaux différens, suivant l'exactitude que l'on veut apporter à cette opération, mais en il faudra au moins trois, une à chaque tête & une au milieu ; celle de la tête $y\, z$ sera prise au profil sur l'arc *Fig.* 149 & 152.

1^1 2^d, & les autres ſur des courbes tracées ſur les ſections qui leur conviennent, de la même maniere qu'on a trouvé la courbe *œ h*, & la pierre ſera achevée.

Fig. 149 & 153. Il ne reſte plus de différence de façons de vouſſoirs qu'aux angles rentrans des retours de rampes, que la clef de la trompe doit former par un enfourchement de trois branches, comme on le voit à ſa projection G *g* 3^g 2^3 3e 3^t 3^n 3^u g^e, marquée à l'élevation en perſpective par la lettre A, dont on viendra facilement à bout par la voie de l'équarriſſement, appliquant premierement le panneau de ſa projection horiſontale ſur un parement dreſſé, pour y tracer ſon contour : on commencera par abattre la pierre ſuivant la direction de ſes têtes qui ſont à angle droit, ce qui donnera deux paremens verticaux d'équerre entre eux & avec le premier parement de ſuppoſition horiſontale; enſuite on abattra le priſme rectangulaire, dont la baſe eſt le parallelogramme G *g* *i* g^e, qui formera un angle rentrant, dont les côtés ſeront les deux têtes des vouſſures rampantes de différentes directions, leſquelles ſe prendront, l'une à la naiſſance de l'arc rampant *r* HS vers *r*, l'autre vers S, où on levera les panneaux de ces deux branches, qui font un angle rentrant à l'équerre entre elles, ſuppoſant que le vuide de l'eſcalier ſoit exactement quarré.

On formera enſuite les têtes de chaque vouſſure rampante, de la même maniere que nous l'avons dit de la partie 1^1 *d e* 1 2 du ſecond vouſſoir, par le moyen de laquelle on aura la tête 2 *g* G & G 3^n de la clef de la trompe; enſuite menant par le point 3e pris à volonté pour la queue de la clef, une parallele 3e 3^x à GS, la différence des hauteurs M 3^s & *x* 3^x donnera celle des points 2^3 3e, par conſéquent l'inclinaiſon de l'arête du joint de la trompe, qui ſera la même que celle du joint g^e 3^t; le reſte de la doële de la clef & des lits ſe fera comme aux trompes ſur le coin, dont nous avons parlé à la page 270 du tome II. La fig. 153 fait voir à peu près l'effet de cette clef toute taillée & prête à poſer.

REMARQUE.

Il y a une obſervation à faire ſur la direction des joints de tête de l'arc rampant *r* S, c'eſt que de quelque façon qu'on faſſe ceux du corps de la vouſſure, ſoit à plomb, ſoit perpen-

diculairement à la direction de la ligne de rampe RM, ni l'une ni l'autre de ces directions ne convient à la tête de l'arc rampant *r* HS, parce qu'ils doivent être perpendiculaires à cet arc, de sorte que les joints de tête des voussoirs du sommet de la voussure devroient avoir au-dedans une fausse coupe, dont le P. Derand ni M. de la Rue ne disent rien; pour moi je crois qu'elle convient, je ne sais si elle a été mise en exécution.

Explication démonstrative.

Ce trait est fait sur le grand principe de l'équarrissement, qui est l'usage des projections verticales & horisontales, expliqué au commencement de ce 4e livre. On a fait la projection horisontale des joints de lit, tant des trompes que des voussures rampantes, ensuite on en a fait l'élevation, dans laquelle on trouve les mesures des rampans, mais non pas des coniques de la trompe, de sorte qu'on est obligé de les chercher par un profil particulier. A l'égard des courbes des ceintres de tête, tant des trompes que des rampans, elles sont données dans cette élevation, parce qu'elles sont paralleles au plan sur lequel elles sont tracées; mais parce que celles qui sont les ceintres des joints montans des voussures rampantes, sont dans des plans perpendiculaires à celui de l'élevation, elles n'y sont représentées que par des lignes droites m^r H, ou m^d h^d, de sorte qu'on est obligé de les chercher par un profil à part, comme en *æ* h^e ou *æ* h^a, où l'on prend les abscisses sur le plan horisontal, & les ordonnées sur l'élévation, comme nous l'avons dit. Le reste de la construction des ceintres, pour empêcher les jarrets à la rencontre des différentes parties données, a été expliqué dans l'usage des tangentes des paraboles, & des autres courbes circulaires ou elliptiques.

Pour aider l'imagination du lecteur à se représenter l'effet de cette sorte d'escalier, & l'accord des différentes voûtes qui y sont rassemblées, on a cru qu'il convenoit de mettre sous ses yeux une représentation en perspective d'une de ses moitiés, en supposant la cage coupée par la ligne *c* M^e *d*, & regardée d'une distance à peu près égale à sa profondeur; ce genre de dessein m'a paru préférable à celui d'une élevation, en ce qu'il ne s'agit pas ici de mesures à prendre sur le dessein, mais de la *Fig.* 154.

représentation de toutes les parties qu'une seule élevation ne peut exprimer.

Remarque sur l'usage.

Les Architectes du siecle passé, au rapport du P. Derand, faisoient beaucoup d'escaliers suspendus à repos, portés les uns par des arcs de cloître, les autres par des trompes, & quelquefois de l'une & de l'autre maniere. Il en reste encore beaucoup à Paris, entre autres à l'Hôtel des Fermes, entre les rues de Grenelle & du Boulois. Mais ces sortes d'escaliers ne sont plus guere à la mode. Premierement, parce qu'ils chargent trop les bâtimens, & coûtent beaucoup, tant en voûtes qu'en épaississemens des murs, qu'il faut renforcer pour résister à leur poussée; encore est-il de la prudence d'y ajouter beaucoup de fer pour mieux s'assurer de leur résistance. Secondement, parce que s'il s'agit d'un grand hôtel, il ne convient pas de pousser l'escalier principal plus haut que le premier étage, qui doit être le seul pour l'usage du maître; ceux qui montent au-dessus pour les logemens des domestiques, doivent être à part derriere le grand escalier ou ailleurs. Troisiemement, parce que rien ne donne plus d'air de grandeur qu'une belle cage ouverte jusqu'au comble, & dont le plafond est susceptible des décorations de la peinture & de la sculpture; & s'il ne s'agit que de l'escalier d'un second étage, on peut le faire propre, solide, dégagé & léger, avec des limons de charpente si l'on veut, ou avec des rampes de pierre, qui portent les marches sans le secours des voûtes, qui leur donnent un air bas & écrasé.

CHAPITRE IX.

Des voûtes composées d'annulaires & de conoïdes qui les croisent.

En termes de l'art,

Des voûtes d'arête sur le noyau.

C'Est ici une de ces especes de voûtes dont le trait n'a pas été donné correctement par les Auteurs des traités de la coupe des pierres. M. de la Ruë a remarqué qu'aux voûtes d'arête sur le noyau des écuries du Roi à Versailles, on apperce-

150.

152.

153.

151.

154.

149.

voit quantité de jarrets dans les arêtes d'enfourchemens, *malgré les ragrémens qu'on avoit pu y faire*, ce qui lui a donné occasion de proposer des panneaux de développemens de doële, afin de corriger & éviter ceux que l'on pourroit faire en pareil cas.

Ce moyen est bon pour pallier le mal, mais il ne va pas à la cause, qui est la fausseté du trait du P. Derand, qu'il a suivi, en ce qu'il fait pour la projection de chaque arête, un arc de cercle, au lieu d'une courbe méchanique qui n'est certainement point circulaire ; ainsi faisant son épure sur un faux principe, & se réglant sur une courbe qui ne peut servir qu'à causer de nouvelles irrégularités, puisqu'elle sert de base à la position & aux divisions des joints, il ne seroit pas étonnant que la voûte de M. de la Rue, malgré sa précaution, fit encore des jarrets, à la vérité moins sensibles qu'ils ne le seroient sans ce correctif; mais cependant ils seront encore réels & suffisans pour offenser l'œil d'un spectateur délicat, quoiqu'il ne puisse pas bien dire en quoi une telle figure de voûte pêche.

PROBLEME XIV.

Faire une voûte d'arête sur le noyau.

Soit (fig. 157), le quadriligne mixte ABED, le plan horisontal d'une portion de voûte sur le noyau, dont le centre est C^n, laquelle est traversée par une autre sorte de voûte conoïde de cette espece dont nous avons parlé sous le nom de *passage ébrasé*, dont la clef est de niveau, & dont la direction des impostes est supposée en BA & ED, tendante au centre C^n, & celle de tous ses autres joints de lit à une ligne verticale dont le point C^n est la projection; telles sont les lignes continuées $V^1 n^1$, $V^2 n^2$, & le milieu de la clef QO, qui doit être de niveau, & passer par le milieu M de celle de la voûte sur le noyau, qui est dans la courbe CMN. Si l'on choisit pour ceintre primitif l'arc droit de la voûte sur le noyau, on fera sur AB, comme diametre, le demi-cercle AHB, ou une demi ellipse sur-haussée ou sur-baissée, il n'importe, c'est au choix de l'Architecte. L'ayant divisé en ses voussoirs aux points 1, 2, 3, 4, & abaissé de ces points des perpendiculaires sur son diametre AB, qui le couperont aux points p^1, p^2, &c. on tracera par tous ces points des arcs concentriques au noyau AOD, qui seront

Planch. 101. *Fig.* 155 & 157.

Fig. 157. les projections horiſontales des joints du berceau tournant autour du noyau, leſquelles ſeront croiſées par celles de la voûte conoïde directe BADE.

Pour déterminer les points d'interſection des projections des joints de lits de ces deux eſpeces de voûtes, le P. Derand & M. de la Ruë font paſſer des arcs de cercles par les trois points donnés A, M, E, & B, M, D, des interſections des lignes des impoſtes, & du milieu de chaque voûte ; ces arcs de cercles coupent les projections des joints tournans en des points f, g, i, k & F, G, I, K, qui leur déterminent la poſition des projections droites des joints de lit de la partie de la voûte conoïde, laquelle croiſe celle qui eſt tournante ſur le noyau, au centre duquel C^n ils tirent ces joints $V^1 n^1$, $V^2 n^2$. Mais cette méthode, comme nous venons de le dire, eſt mauvaiſe & fauſſe dans ſon principe, parce que les projections des arêtes ne ſont pas des arcs de cercles, mais des courbes méchaniques, dont il faut chercher les points par l'interſection des projections naturelles à la voûte du paſſage ébraſé, qui ne tendent pas toujours au centre du noyau, comme le pratiquent les Auteurs cités, & de celles des joints tournans de la voûte ſur le noyau.

Il faut donc commencer par diviſer proportionnellement les diametres des ceintres des extrêmités oppoſées du paſſage ébraſé, pour y placer les projections des diviſions des vouſſoirs en parties relatives, & en même nombre que celles du ceintre primitif AHB de la voûte ſur le noyau ; ainſi on diviſera les cordes BE & AD proportionnellement aux diviſions du diametre AB, ou, ce qui eſt la même choſe, leurs moitiés Bm & AL aux moitiés BC & AC. Pour cet effet on tirera Cm & CL de milieu en milieu, & par les points des projections p^1, p^2 on menera des paralleles à CL, qui donneront par leurs interſections avec la ligne AD, les points l^1 l^2 que l'on cherche ſur cette ligne, & par les points p^3, p^4, des paralleles à C m, qui donneront ſur BE les points 1^3, 1^4 que l'on cherche, leſquels donneront auſſi les autres points des projections entre m & E pour la moitié m E, étant reportés à même diſtance d'un côté à l'autre.

Si l'on tire des lignes droites des points 1^4, 1^3 aux points l^1, l^2, on aura les projections des joints de lit, leſquelles tendront au centre C^n ſi le noyau eſt circulaire, auquel cas il ſuffit de trouver les points d'une moitié AL ou Bm, & tirer

ces lignes par le centre C^n, parce qu'alors on a deux points donnés de chaque projection de joint de lit; savoir C^n, qui est commun à tous, & celui qu'on a trouvé sur un des diametre AD ou BE; mais si le noyau est elliptique, le centre C^n devient inutile; il faut chercher les projections sur chaque ligne AD, BE, & tirer les lignes droites d'un point à son correspondant sur l'autre diametre opposé. Les intersections de ces projections droites avec les courbes concentriques au noyau donneront par leurs intersections les points D, F, G, I, K, B pour l'arête BMD, & les points *f*, *g*, *i*, *k* pour la courbe de projection de l'arête AME, qui est égale à la précédente, & qui la croise à la clef en M. *Fig. 157.*

Comme ces arêtes sont des courbes à double courbure, il faut, suivant nos principes, en chercher les points sur une surface courbe cylindrique qui ait pour base la projection d'un des joints de lit courbes concentriques au noyau, pour avoir l'intersection de la surface conoïde du passage ébrasé qui forme les lunettes avec une ouverture en tour ronde; c'est pourquoi il faut rectifier chacune des bases cylindriques, comme AOD, BQE, pour former sur ces bases les ceintres en développement, qui doivent être appliqués sur chacune des surfaces cylindriques verticales qui coupent la voûte sur le noyau par des arcs horisontaux $p^2\,g$, p^3 I, &c, & le passage ébrasé par des arcs verticaux dont les projections sont les courbes G *g*, *i* I, &c, qu'il faut chercher, comme il suit.

Soit, par exemple, à tracer celle dont BQE est la projection; ayant tiré par le point Q la droite *b e* parallele à BE, & égale à l'arc BQE rectifié, on portera sur cette ligne la longueur QV^3 rectifiée en Q t^3 sur Q*b*, & V^3 V^4 rectifié en $t^3\,t^4$, & enfin V^4 B rectifié en $t^4\,b$, portant aussi les mêmes distances sur l'autre moitié Q*e*; ensuite sur tous les points t^1, t^2, t^3, t^4, on élevera des perpendiculaires, qu'on fera égales aux hauteurs des retombées correspondantes au ceintre primitif 1 p^1, 2 p^2 en $t^1\,2^1$, $t^2\,2^2$, CH en Q h^d, &c. La courbe $b\,h^d\,e$ sera la naissance de la voûte d'arête sur l'arc BQE, laquelle sert dans toute son étendue, de même que la courbe A h^n D du côté du noyau, l'une pour être pliée sur une surface concave BQE, l'autre sur une surface cylindrique convexe du noyau AOD. Les autres ceintres en développement ne servent qu'en partie; celui qui est fait sur la rectification de l'arc p^1 q^1 ne sert que dans la

Fig. 157. partie depuis f en F; celui qui eſt formé ſur l'arc $p^2 q$ ne ſert que depuis g en G, ainſi des autres formés depuis M en Q, c'eſt-à dire dans la partie du conoïde du paſſage ébraſé, laquelle diminue depuis les lignes d'impoſtes de ſuppoſition AB, DE, juſqu'à la clef M, commune à la voûte annulaire & à la conoïde.

Il eſt aiſé de voir par la figure que les ceintres en développement ſur toutes les ſurfaces cylindriques, paſſans par les points $p^1 q^1$, $p^2 q^2$, &c. ſont tracés par le moyen des rectifications des arcs de projection avec leurs diviſions pour abſciſſes, & avec les hauteurs des retombées du ceintre primitif pour ordonnées. On y a raſſemblé du côté du noyau les trois courbes $2^n h^n n$, $1^r h^n r$, $o h^n d$, qui ſe reſſerrent depuis la clef vers le noyau, & les moitiés des trois autres R h^d, S h^d, $e h^d$, qui s'élargiſſent depuis la clef M vers le piédroit concave EQE, & la courbe du milieu ſur CMN en $c h^n n$, qui doit être le ceintre primitif du paſſage ébraſé, lequel doit approcher autant qu'on le peut du demi cercle, afin que les parties des extrêmités, l'une ſur-hauſſée vers le noyau, & l'autre ſur baiſſée vers le piédroit concave, ſoient également différentes du cercle en différens ſens, l'une en ſur-hauſſé l'autre en ſur-baiſſé.

Par exemple, pour avoir celle qui ſe feroit ſur la baſe courbe $S^4 m p^4$, projection du premier joint de lit de la voûte ſur le noyau; ayant rectifié ſa moitié $m k$ 5^4, on la portera de Q en S, avec celle de ſes parties $m k$, $m k^2$ que l'on n'a pas marqué ſur la ligne QS, pour éviter la confuſion des lettres; & ſur chacune de ſes diviſions, élevant une perpendiculaire, on y portera la hauteur du ceintre primitif qui lui appartient, comme en k la hauteur p^4 ou p 1, en k^2 la hauteur p 3 ou p 2, & l'on aura une courbe S o h^d plus reſſerrée que la premiere $e h^d$. Par la même pratique, on tracera la courbe qui provient de la même ſection du cylindre, dont la baſe eſt l'arc horiſontal q R^3, en portant la rectification de l'arc $q i$ R ſur la droite QR, avec celle de ſa partie $q i$, & l'on aura la courbe R 1° h^d pour moitié de ce ceintre.

On a raſſemblé dans ce trait les trois courbes qui s'élargiſſent depuis celle du milieu CMN d'un côté en R h^d, S h^d, $e h^d$, & les trois autres qui ſe reſſerrent en $r h^2$, s h^n, D h^n, cette derniere étant le ceintre du côté du noyau. On a auſſi marqué le ceintre du milieu paſſant par H du ceintre primitif, ou ce qui eſt

eſt la même choſe, par ſa projection M en $n\ h^n\ c$, qui ſe trouve ici un demi-cercle par haſard, parce qu'on a fait la courbe CMN égale au diametre ACB du ceintre primitif & circulaire de la voûte ſur le noyau, ce qui donne un agrément à la voûte, lorſqu'on le peut, parce que les ceintres des piédroits oppoſés BQE & AOD different également de la courbe circulaire, l'une en la ſur-baiſſant, l'autre en la ſur-hauſſant. On a auſſi tiré les horiſontales $2^1\ o^n$, $2^2\ i^o$, du côté des grands ceintres, & de l'autre $1^o\ o$ & $4^o\ o$, pour marquer que ſi l'on raſſemble ces ceintres ſur une même baſe Q e, ou L n, les hauteurs des diviſions de ces ceintres ſont toutes égales. Ainſi ayant tiré ces lignes pour l'un de ces ceintres, les perpendiculaires des diviſions de la baſe les couperont en des points qui appartiendront aux points des diviſions de chacun de ces ceintres reſſerrés ou élargis; ce qui épargne la peine de répéter les hauteurs, & fait voir d'un coup d'œil le rapport de toutes ces courbes, ou ſeulement de leur moitié, ce qui ſuffit, puiſque l'autre moitié n'en eſt qu'une répétition en ſens contraire. *Fig.* 157

Par le moyen de ces courbes on peut bien tracer les vouſſoirs, & les conduire à leur perfection par une voie d'équarriſſement, comme nous le dirons ci-après; mais parce que M. de la Ruë juge que pour vérification du contour des arêtes, il convient de faire des panneaux de doële, nous allons donner une méthode d'en faire le développement, beaucoup plus ſimple que la ſienne. Ayant élevé ſur les diviſions 1^4, 1^3 de la corde BE, des perpendiculaires 1^4 X, 1^3 Y égales à $p^4\ 4$, $p^3\ 3$, qui ſont les hauteurs correſpondantes du ceintre primitif, on tracera (par le prob. 16 du 2d liv.) la courbe BXY h S, qui ſera une de ces ovales du 4e ordre, dont nous avons parlé: on en fera de même ſur la corde AD, pour avoir l'autre oppoſée AZ z h^n D. On portera enſuite la longueur LQ à part, comme à la fig. 156, avec ſes diviſions O, M, & m, & ayant abaiſſé des perpendiculaires aux points L & m prolongées indéfiniment, on portera ſur chacune de ces lignes la rectification d'une moitié de ces courbes, en faiſant L l^2 égale à l'arc $h^n\ z$, L l^1 égale à h^n Z, & LD égale à l'arc h^n ZA. De même ſur la droite m E^b (fig. 156) on portera la rectification de l'arc h Y en m Y, h X en m X, & h B en m E^b; & l'on menera par les points l^2 Y, l^1 X les droites $l^2\ V^2$, $l^1\ V^1$, $D^a\ E^b$; enſuite on portera la longueur $1^2\ V^2$ de la fig. 157, en Y V^2 de la fig. 156, $1^1\ V^1$ *Fig.* 156. & 157.

Fig. 156 & 157. en X V^1, & par les points QV^2, V^1, E^b, de la fig. 156, on menera la courbe Q E^b; de même pour avoir la courbe OD^a, on portera la longueur l^2 n^2 de la projection horisontale (fig. 157,) en l^2 z du développement; l^1 n^1 de la projection en l^1 Z du développement; & par les points O, z, Z, D^a, on tracera la courbe OD^a, qui sera celle de la tête de la doële du côté du noyau.

Il reste à présent à trouver les points du développement des arêtes sur les lignes l^2 V^2, l^1 V^1. On portera la longueur de la projection n^4 f, n^3 g, ou bien n F, n^2 G, en Zf, z g du développement, 1^4K en XK, 1^3 I en YI; & par les points M, I, K, E^b, & M, g, f, D^a, on menera des courbes à la main, qui seront d'autant plus exactement tracées qu'on y aura des points g, f, I & K, que l'on peut multiplier autant qu'on voudra, en prenant plusieurs points entre les divisions XYh du ceintre B h S, & les renvoyant par des perpendiculaires sur la projection horisontale, entre les points M, I, K, B, & m, 1^3, 1^4, B, comme on a fait aux lignes K 1^4 & I 1^3.

Application du trait sur la pierre.

Pour tracer les voussoirs de cette espece de voûte, il faut se *Fig.* 157. & 158. ressouvenir de ce qui a été dit de la voûte d'arête ordinaire; la seule différence qu'il y a, c'est que dans celle-ci il n'y a qu'une direction droite, l'autre étant courbe, circulaire, ou elliptique; mais en se servant de panneaux flexibles pour le côté courbe, cette variété ne cause aucune difficulté. Soit, par exemple, le second voussoir d'enfourchement à faire du côté du piédroit concave, dont la projection horisontale est la figure mixte R i u V k s, fig. 158. Ayant fait un lit horisontal de supposition, pour y appliquer le panneau de cette figure levé sur l'épure, on abattra la pierre à l'équerre sur ce contour, excepté sur la partie renfoncée s k V; ensuite sur l'arête verticale dont le point V est la projection, ayant porté la retombée y 2^2, on appliquera sur la surface convexe, dont la courbe V u^2 est la projection, le panneau flexible y 2^2 2^1, avec ses coupes 2^2 6 & 2^1 5, & sur la surface cylindrique concave dont R x i est la projection, on appliquera le panneau flexible de la partie du développement fait sur l'arc p^3 q R^3, comme on a fait le ceintre b h^d e sur l'arc BQE, avec des coupes qui devroient être différentes des pré-

cédentes, si l'on observoit la regle générale de les faire toujours perpendiculaires à la tangente; mais parce qu'elles rendroient les lits gauches, on pourra, suivant l'usage ordinaire aux appareilleurs, faire ces coupes un peu fausses, en réglant leur inclinaison sur celles d'un ceintre pris au milieu en CMN, qui est dans ce trait $n\ h^n\ c$, afin qu'elle soit moyenne entre les ceintres sur-haussés $d\ h^n\ a$ d'un bout, & $b\ h^d\ e$, de l'autre, ainsi une coupe étant donnée dans une tête de voussoir, l'autre lui sera menée parallele, par le prob. I du II^d tome.

Les têtes convexe & concave du voussoir étant tracées, elles donneront la direction & la courbure de la doële conoïde, qui se fera à la regle, comme celle des coniques ordinaires, & sur la tête droite R^3 E, on appliquera le panneau 7 3 4 8 du ceintre primitif AHB, par le moyen de la hauteur y 3 posée sur l'arête verticale, dont le point i est la projection d'un côté & R de l'autre, & l'on traînera la retombée y 4 parallelement à l'arête horisontale i R, sur le lit de supposition horisontale, & la pierre sera tracée pour la partie du berceau tournant, dont la doële se creusera comme aux voûtes sur le noyau simple. La rencontre de cette surface avec celle du conoïde, donnera l'arête d'enfourchement, dont on pourra diriger exactement le contour, en appliquant sur la doële de direction droite $V^2\ i$, le panneau flexible de son développement pris dans la fig. 156, dans sa partie IK V^1 V^2, car si ce panneau est appliqué intimement à la doële, ensorte que son côté $V^1\ V^2$ soit ajusté le long de l'arête dont V^2 V est la projection, le côté IK donnera le contour de l'arête courbe à double courbure, dont $i\ k$ est la projection horisontale, ainsi des autres voussoirs. Les fig. 158 & 159 font voir l'effet des voussoirs d'enfourchement, l'un ébauché, l'autre fait, vus du côté de la doële par dessous. *Fig. 158. & 159.*

Explication démonstrative.

On a vu au tome précédent tout ce qui concerne la construction des voûtes simples, dont celle-ci est composée; ainsi l'on peut y avoir recours pour la voûte sur le noyau, page 438, & pour le passage ébrasé, page 466. Il nous reste seulement à rendre raison de notre maniere de faire le développement des pendantifs inégaux de cette espece de voûte d'arête. Il est clair que la partie de la voûte de passage ébrasé est la seule où l'on

Fig. 157. doive faire uſage de panneaux flexibles, parce que ſa ſurface eſt à ſimple courbure, au lieu que celle de la voûte ſur le noyau eſt comme les ſphériques à double courbure, de ſorte qu'une ſurface plane ne peut s'y appliquer, ſi flexible qu'elle puiſſe être, ſans s'étendre en différens ſens, ce qui eſt impoſſible avec du carton ou du fer blanc, dont on fait les panneaux flexibles; par conſéquent, on ne peut faire de développement que des pandantifs du paſſage ébraſé, & c'en eſt aſſez pour la pratique, parce que leurs extrêmités déterminent les arêtes à double courbure des enfourchemens, & les angles rentrans des formerets, qui ſont concaves en dehors, & convexes du côté du noyau.

Nous avons démontré au théoreme VI du 1er livre, que la ſection perpendiculaire au rayon C^n Q, étoit un ovale du quatrieme ordre; ainſi ſuppoſant un plan vertical paſſant par BE, il formera pour ſection la courbe B x^4 E dans la voûte annulaire, & la courbe B *h* E dans la conoïde, leſquelles n'ont rien de commun que les points B & E, parce que la clef de la premiere eſt au-deſſous de la ſeconde de toute la hauteur *h* 4 du profil, ainſi le pandantif BM *m*, ou ſon double BME, eſt tout compoſé de la ſeule ſurface conoïde; il en eſt de même de ſon oppoſé AMD. Si l'on conſidere préſentement que toutes les diviſions des vouſſoirs des ceintres oppoſés A h^n D vers le noyau, & B *h* E vers l'ébraſement, ſont à des hauteurs égales, par la conſtruction, on reconnoîtra que toutes les lignes des arêtes des joints de lit ſont des droites horiſontales, par conſéquent qu'elles ſont repréſentées dans leur juſte longueur ſur le plan horiſontal, tant dans le tout que dans chacune de leurs parties compriſes depuis la tour creuſe d'un côté, & ronde de l'autre de la voûte ſur le noyau. Donc les parties de MQ, M *m*, MO, ML, doivent être égales au développement de la fig. 156, à celles qui ſont cottées des mêmes lettres à la fig. 157; & parce que le plan paſſant par BE eſt ſuppoſé vertical, toutes les lignes qui ſont dans ce plan ſeront perpendiculaires à la ligne L *m*, perpendiculaire à BE, donc au développement, ME^b doit être perpendiculaire à L *m*. Or comme la ligne BE repréſente la ſection elliptique B *h* E, la moitié *m* B doit être exprimée au développement par la rectification de la demi-ellipſe *h* B, qui ſera auſſi étendue en ligne droite, par la raiſon qu'on a vu à la page 389 du tome premier.

155.

156.

157.

158.

159.

Ce que nous disons de la section sur BE sert aussi pour celle qui est supposée faite sur AD; d'où il est aisé de conclure que tous les points D^a, f, g, M, I, K, E^b (fig. 156,) sont au contour de l'arête d'enfourchement développée sur le conoïde, & les points o, z, Z, D^a & Q, V^2, V^1, E^b sont au contour du formeret sur la tour, qui fait les piédroits de la voûte sur le noyau: donc le développement fait par cette construction est exact, & infiniment plus simple que celui de M. de la Rue. Quoique nous ayons ébauché nos voussoirs en portion cylindrique, il ne seroit pas impossible de commencer par un parement droit parallele aux cordes AD, BE, il auroit sa commodité pour la formation des lunettes du passage ébrasé; mais dans la partie de la voûte sur le noyau, il faudroit tracer une portion de la courbe du 4e ordre, qui est la section plane de l'anneau, ce qui rendroit le trait plus composé.

CHAPITRE X.

De la rencontre des voûtes hélicoïdes avec les sphéroïdes & les cylindriques.

EXEMPLE.

En termes de l'art,

Trompe en niche rampante, rachetant une vis S. Giles ronde.

CE trait n'est pas un des moins difficiles de la coupe des pierres, le P. Derand s'y est trompé, comme l'a fort bien remarqué M. de la Rue, qui en a donné un plus correct. Celui que je vais proposer est si semblable au sien, qu'on pourroit croire que je le tiens de lui, si l'on pouvoit douter que ce fût une suite naturelle de la théorie que j'ai fait précéder au théorême VI du Ier livre, de la pratique que j'ai donné au prob. 16 du livre II, & enfin de la maxime générale pour la description des courbes quelconques, qui se forment par la mutuelle pénétration des solides. Quoiqu'on en pense, on ne pourra me refuser la justice d'en avoir éclairci le mystere, & démontré la justesse de l'opération, ce qui manque totalement au livre de M. de la Rue. Pl. 102 *Fig.* 160.

Avant que d'entrer en matiere, je dirai que quoique j'exécute ce trait par une espece d'équarrissement comme lui, ce n'est pas que je pense que ce soit par une nécessité absolue, comme il l'assure, faute de pouvoir l'exécuter par panneaux; ses raisons, qu'il appuye du sentiment de Desargues, ne prouvent rien contre le commode usage des doëles plates dont il se sert lui-même dans la coupe des trompes coniques, & que nous avons employé en plusieurs rencontres, même pour la formation des surfaces gauches, en cherchant la distance du quatrieme angle de cette doële, lorsque le panneau plan & quadrilatere ne la touche qu'en trois. Il est de plus évident que si l'on vouloit réduire les doëles plates à des panneaux triangulaires, il n'y a point de surface concave gauche à laquelle ils ne puissent convenir : donc on peut employer dans ce trait les panneaux de doële plate; mais parce que l'exécution en deviendroit extrémement composée & embarrassée, je ne la propose pas; le lecteur médiocrement intelligent la trouvera de lui-même s'il en est curieux, par l'exemple des panneaux de la voûte sur le noyau, expliquée au tome précédent. Il ne s'agit que de les briser en deux parties par une diagonale, & trouver l'angle d'inclinaison de ces deux moitiés triangulaires, ce qui n'est pas difficile, & qui ne mérite pas qu'on s'y arrête; il suffit d'avoir montré que les impossibilités sur lesquelles bien des gens décident hardiment, ne le sont que pour ceux qui ne connoissent pas bien le fond des choses, & les moyens d'y parvenir.

Fig. 164. Soit (fig. 164,) l'arc de cercle TDS, la projection horisontale d'une portion de vis S. Giles, & le cercle $n\ d^n\ t^n$ son noyau, dont le centre est C^n, concentrique à l'arc TDS. Soit le demi-cercle AFB, la projection horisontale de la niche ou trompe qui doit racheter la voûte de la vis, suivant une arête à double courbure, dont A *ff* B est la projection qu'il faut trouver. Pour y

Fig. 163. parvenir, il faut auparavant faire l'élévation de la niche sur un plan vertical, dont la droite AB, qui est son diametre horisontal, est la projection. Ayant tiré par le centre du noyau C^n, & le milieu C^t du diametre AB, la droite indéfinie C^n CE, on lui menera par les points A & B les paralleles A a^2, Bb; puis ayant mené par le point a, pris à volonté sur A a^2, la droite $a\ b$ parallele à AB, on portera sur A a^2 la hauteur dont la vis Saint-Giles s'éleve en rampe dans l'intervalle BDA, c'est-à-dire, la hauteur dont le point A surpasse B, qu'on suppose ici l'inter-

valle $a\ a^2$, & l'on tirera la droite $b\,a^2$, qui repréſentera l'inclinaiſon de la rampe de la vis, mais non pas la projection verticale de ſon contour ADB, qui eſt une courbe ondée $a^2\ s\ c\ e\ s\ b$, telle que nous l'avons décrite au livre IIIe, planche 20, fig. 249. Sur la droite $b\,a^2$, comme diametre incliné de la niche, & avec un demi-diametre conjugué de telle hauteur qu'on voudra prendre ſur C^e E, on décrira une ellipſe, qui ſera le ceintre vertical de cette niche; mais pour la rendre plus facile & plus réguliere, lorſqu'il n'y a pas de ſujétion, on prendra pour ce demi-diametre vertical celui de la projection horiſontale C^t F; ainſi l'on fera C^e E égal à C^t F, & l'on décrira la demi-ellipſe $a^2\,Eb$ (par le probl VIII, du 2e livre, Tome I.) ou, ce qui ſera plus commode, par le probl. 19, (page 205 du même tome I.) en menant à volonté autant de paralleles que l'on voudra à la ligne C^n E, qui coupent la projection horiſontale de la vis & de la niche, comme LH, MI, N 3, 2 Q, K 8, G 9, indéfinies de part & d'autre, ſur leſquelles on portera les ordonnées correſpondantes du demi-cercle de la niche, comme q 12 en 242, p 11 en $p^1\ p^2$, $o^1\ 1^o$ en $o^2\ 2^2$, de même $k\,q^3$ en $3^p\ 3$, $i\,q^2$ en $2^p\ 2^m$, $h\,q^1$ en $H^p\ 2^3$, & par les points a^2, 2^3, 2^m, 3, E, 2, p^2, 12, b, on décrira l'arc rampant, qui eſt le ceintre vertical de la niche, qui repréſente celui de face, ſur lequel on déterminera les coupes des joints de tête, comme H 3, G 2, qu'on tirera au centre C^e contre les regles des ceintres de face, parce que celle-ci n'eſt que ſuppoſée, & que l'opération en deviendra plus facile. *Fig. 163. & 164.*

Nous ſuppoſons donc ici, pour plus grande ſimplicité de la figure, qu'il n'y a que trois vouſſoirs à peu près égaux, & quatre joints de tête; ſavoir, 3 H, 2 G, & ceux des couſſinets $d\,a^2$, $b\,d^2$, & que les paralleles que nous avons tiré ci-devant, paſſent par leurs extrémités & leur milieu, ce qui eſt indifférent, puiſque leur nombre & leur éloignement ſont arbitraires. Or chacune d'entre elles étant conſiderée dans le plan horiſontal & dans le plan vertical, comme la ſection d'un plan vertical qui coupe la vis Saint-Giles & la niche, peuvent être conſidérées comme autant d'axes des courbes des ſections qu'ils font dans ces deux corps, leſquelles ſont des quarts de cercle dans la niche, & des courbes ovales du 4e ordre, dont nous avons parlé aux livres I & II; ainſi il faudra les chercher par le probl. 16, page 191, du tom. I, comme nous allons l'expliquer.

Fig. 164. Par les points X, Y, Z, pris à volonté sur la ligne d^n D, diametre horisontal de la vis, on menera autant d'arcs de cercles concentriques X 13 *o*, Y 14 *o*, Z 9 O^2, prolongés jusqu'à un diametre pris à volonté, comme RS, sur lequel ayant décrit le demi-cercle S *r* R, on lui menera par tous les points *o* O^2 autant de perpendiculaires *o* r^1, *o* r^2, qui seront des ordonnées, & par les points 4, 5, 6, où les paralleles à la ligne EC^n coupent l'arc intérieur du plan horisontal de la vis, on menera autant de lignes au centre C^n du noyau, comme 4 C^n, 5 C^n, 6 C^n, qui couperont les arcs X *o*, Y *o*, Z O^2 aux points *x*, *y*, *z*, à une certaine distance des points où les paralleles coupent ces mêmes arcs aux points 7, 8, 9. Il faut trouver l'inclinaison des arcs rampans de la vis, dont ceux-ci sont la projection horisontale; pour cela, il en faut faire le développement.

Fig. 169. Soit fait à part l'horisontale e^x B (fig. 169), égale à l'arc BD, & la hauteur e^x c^h égale à *e* C^e de l'élévation; la droite C^h B sera celle de l'inclinaison de la rampe de la vis à son piédroit; mais parce que les arcs X 13, Y *b*, Z *z* sont toujours plus petits en longueur, quoiqu'égaux en nombre de degrés, & que cependant ils montent tous en même tems à même hauteur, il faudra faire un développement de chacun d'eux sur l'horisontale e^x B, pour trouver la différence des inclinaisons des rampes, qui deviennent toujours plus grandes en approchant du noyau. Ainsi faisant la droite e^x 13 (figure 169) égale à l'arc du plan X 13, e^x *b* égale à Y *b*, e^x *z* égale à Z *z*, on aura les rampes C^h 13, C^h *b*, C^h *z* de chacun des arcs concentriques au noyau, par le moyen desquelles on trouvera facilement les hauteurs de chacune de leurs parties. Par exemple, pour trouver la hauteur que doit donner la partie horisontale *x* 7 de l'arc X 13, on la portera de e^x en 1^7, & l'on menera 1^7 3^4 parallele à C^h 13; la hauteur e^x 3^4 sera celle que l'on cherche. On trouvera de même la hauteur e^x 3^6 en portant *z* 9 de e^x en 1^9, & faisant 1^9 3^6 parallele à C^h *z*. Ces hauteurs serviront à trouver les courbes ovales du 4e ordre que font dans la vis les plans qui la coupent verticalement & parallelement à la ligne du milieu C^n E, lesquelles seront toutes différentes dans chaque plan qui en sera également éloigné. Mais ayant fait (par la construction) les paralleles correspondantes de la droite & de la gauche également éloignées de cette ligne, on pourra

pourra trouver deux de ces courbes sur un même plan, l'une qui monte, l'autre qui descend.

Soit mise à part la ligne 10, 9 (fig. 166), égale à la ligne 10 9 du plan horisontal; au point 9, on lui fera la perpendiculaire O *o*, sur laquelle on portera de part & d'autre la hauteur e^x 3^5 de la fig. 169, & ayant porté l'intervalle 10, 6 du plan horisontal de 10 en 6 à la fig. 166, on menera les lignes 6 o^2, 6 *o*. Ensuite on portera de 6 en 13 la longueur 6 13 du plan 6 *b* en 6 *b* de la fig. 166, & par les points 13 & 6, on menera des paralleles à o^1 r^2, sur lesquelles on portera les ordonnées correspondantes; savoir, *o* r^3 de la fig. 164, en *o r* de la fig. 166, & la même de o^3 en *o* 13; de même *o* r^4 en o^4 X, & en *o r* sur la même ligne; enfin *o* r^5 de o^5 en r^2, & de *o* en Y; & par les points trouvés r^2, X, *r*, 6, on fera passer une ligne courbe, de même qu'au-dessous par les points trouvés Y, *r*, *r*, 6. Mais parce que entre *r*3 & 6 il n'y a pas assez de points pour guider cette courbe, il faudra faire plusieurs arcs concentriques au noyau entre les points *x* & 4 du plan, comme Q *ff*, &c. qui donneront des ordonnées *ff*, X^y & autres de suite dont on fera même usage que des précédentes, pour trouver les points de la courbe en dessus & en dessous. Enfin ces courbes étant tracées, du point *b* pour centre, & pour rayon l'intervalle 10 o^1 du plan horisontal, on décrira la portion de cercle, qui coupera l'une des courbes au point *x* (fig. 166,) & l'autre au point *y*. Cette figure représentera deux sections verticales, l'une par la ligne q^1 29, l'autre par la ligne 10, 9 rassemblées sur un même plan, dont les axes seront O 6 pour la section 9, 6 qui descend de 6 en 9, l'autre 6 o^5 de la section q^1 29, qui monte de 26 en 29, pendant que la section de la niche est la même. *Fig.* 169 & 160.

On trouvera de la même maniere les courbes des autres sections faites par les lignes 11, 8, & 12, 7; car mettant à part (fig. 167) la ligne 25 8 égale à 5 8 du plan horisontal, on portera de part & d'autre du point 8 sur la perpendiculaire 8 R, les distances 8 *o*, 8 o^2 égales à la hauteur *ex* 3^5 de la fig. 169, & l'on tirera les lignes 25 *o* & 25 o^2, sur lesquelles ayant porté toutes les longueurs des divisions des abscisses de la ligne 5 8, on y portera aussi les ordonnées *o* r^4, *o* r3, *o* r^2, &c. comme l'on a fait à la figure précédente, & l'on aura les points r^1, X, r^2, &c. pour la courbe ascendante, & R *r r y* pour la descendante, dont la projection horisontale est la droite 5, 8. Enfin on por- *Fig.* 167.

tera la diſtance 5 p du plan horiſontal en $2^5\ p$ de la fig. 167 ; & du point p pour centre & pour rayon p 11, on décrira l'arc de cercle 11 3 y, qui coupera ces courbes, l'une en x, l'autre en y. On trouvera de même les points des courbes qui ſe font aux ſections 12, 4, 7 d'un côté, & q3 N de l'autre. Par le moyen des différences de ces ſections, on fera la projection de l'arête d'enfourchement de la niche avec la vis.

Fig. 164. Ayant élevé ſur SR (fig. 164), une perpendiculaire SF^2, on portera la diſtance C^t D de S en C^a, d'où comme centre & de l'intervalle C^t F, on décrira l'arc de cercle $F^d\ F^2\ X\ f$, qui coupera le demi-cercle S r R en X^f ; la longueur $F^2\ X^f$ ſera portée

Fig. 166, 167 & 168. au plan horiſontal de D en ff. On portera de même (aux fig. 166, 167, 168) les longueurs 4 q, 5 p, 6 o^1, (qui ſont égales par la conſtruction à leurs correſpondantes 23 k, 25 i, 26 h,) aux diviſions 6, 25, 34, aux points marqués b, par leſquels on menera les perpendiculaires $a\ b$, qui couperont les arcs aux points d. Les diſtances $d\ x$ & $d\ y$ ſeront portées en avant du diametre AB, ſavoir $d\,x$ de la fig. 166, du point h au point 15, & $d\,y$ de o^1 en 19, pour la courbe deſcendante ; $d\ x$ de la fig. 167 en 16 i pour la courbe aſcendante, & $d\ y$ en p 18 pour la deſcendante ; enfin $d\ x$ de la fig. 168 en k N pour la courbe aſcendante, & $d\,y$ en q 17 pour la deſcendante ; & par les points trouvés A, 15, 16, N, ff, 17, 18, 19, B, on tracera la projection de l'arête d'enfourchement, où il faut remarquer que les lignes $d\ x\ y$ qui ſont courbes dans cette figure, comme partie d'arc de cercles, ſeront des droites tangentes à ces arcs. Si l'on ne veut pas que la niche faſſe une arête plus baſſe que le point d, comme le fait M. de la Ruë, on change la nature de la courbe de cette arête, car alors la partie $d\,y$ devient cylindrique, au lieu qu'en continuant les arcs de cercles, elle devient portion & continuation du ſphéroïde. Dans l'exemple de cette figure la différence eſt ſi petite qu'elle peut être négligée ; mais ſi le point d étoit beaucoup plus haut que les points x & y, il faudroit mener par ces points des horiſontales pour avoir leur éloignement de la verticale $a\ b$, qui ſert à trouver les points de la courbe A ff B.

Nous avons trouvé les ſections du ſphéroïde avec l'hélicoïde pour l'arête d'enfourchement, il faut à préſent trouver la projection des joints de tête 3 H, 2 G, dont nous n'avons que les points 3 & 2, projettés, l'un en N, & l'autre en Q. On portera la longueur HH^p de l'élévation en $b\ e^h$ de la fig. 166, & l'on

tirera e^h Y perpendiculaire à *a b*, c'eſt-à-dire parallele à l'horiſontale *b* 9, laquelle e^h Y coupera la courbe aſcendante en X, & la deſcendante en Y. On portera ſur HL la diſtance e^h X du point *h* en L de la fig. 164, & la diſtance e^h Y de *o* en 9 de la même fig. 164, ainſi l'on aura deux points de chacune des projections des joints, ce qui ſuffiroit s'ils étoient droits, mais parce qu'ils ſont courbes, il en faut d'autres entre deux pour en diriger la courbure; nous nous contenterons d'en trouver un dans la ſection du milieu IM. On portera la longueur 1^p I de l'élévation, ou ſon égale K 35 de l'élévation, de *b* en e^r (fig. 167) & de l'autre côté l'on tirera e^r R perpendiculaire à *a b*; cette ligne e^r R, qui eſt une horiſontale, coupera les deux courbes, l'une en X, l'autre en Y; la plus courte diſtance e^r X ſera portée à la projection de la fig. 164, de *i* en M, pour la courbe aſcendante, & l'autre e^r Y, de *p* en P, pour la courbe deſcendante; & l'on menera par les points trouvés les courbes LMN pour un joint, & QP 9 pour l'autre, ce qui acheve la projection horiſontale de tout ce trait. Il ne s'agit plus que de trouver les cerches des joints de doële du ſphéroïde, & les panneaux des joints de tête. *Fig. 166.* *Fig. 164. & 167.*

Puiſque les ſections des ſphéroïdes ſont des ellipſes, il ne s'agit que d'en tracer de différentes ſur deux demi-diametres donnés. Premierement elles ont toutes pour demi-diametre commun la profondeur de la niche C^t F, qui eſt donnée dans la projection horiſontale, & tous les autres ſont donnés dans la projection verticale; ſavoir, C^e 23, C^e 3, C^e E, C^e 2, C^e 22: ainſi portant la longueur C^t F du plan horiſontal en $C^2 f$ de la fig. 165, on pourra en voir la différence; cette ligne ſervira pour les unes de demi grand axe, & pour les autres de demi petit axe, ce qui n'a aucune difficulté. Il reſte à ajouter à chaque panneau de lit elliptique, celui du joint de tête, qui en eſt une continuation. Si l'on fait une partie cylindrique entre le ſphéroïde & la vis, on ajoutera au-devant de chaque ellipſe une portion droite, comme 22, 2, priſe à la projection en *q* Q, & 23 3, priſe ſur *k* N; mais ſi l'on veut que le ſphéroïde rencontre la vis S. Giles ſans médiation, ces lignes ſeront des courbes en continuation des ellipſes 22 *f*, 23 *f*. *Fig. 165.*

On portera ſur la ligne C^2 h^2 la longueur du joint 2 G de la fig. 163 de 22 en *g* de la fig. 165, & la longueur 2 K de 22 en *k*, & par les points *g* & *k*, on abaiſſera ſur h^2 C^2 les perpen-

Fig. 163 & 165. diculaires $g g^2$, $k k^2$, qu'on fera égales à o^1 9, & à p P du plan horisontal ; & par les points, g^2, k^2 2, on tracera la courbe qui sera la section du plan du joint & de la doële de la vis. De la même maniere, ayant porté la longueur 3 H de l'élevation de la fig. 163, de 23 en h^2 de la fig. 165, & 3 I en 23 i, on abaissera par ces points les perpendiculaires h^2 h^3, i^2 i, & on les fera égales aux lignes h L, i M du plan horisontal ; & par les points h^3, i^2, 3^n, on tracera la courbe de l'autre joint qui est représenté à l'élévation (fig. 163) par la droite 3 H. Enfin pour le panneau du coussinet, on prendra la longueur du joint a^2 d, & son milieu a^2 u (fig. 163) & l'on tracera la courbe TV a (fig. 165,) qui sera peu différente de celle du plan horisontal TVA, parce que le joint d a^2 n'est pas beaucoup incliné à l'horison.

Application du trait sur la pierre.

Plan. 102, *Fig.* 163 & 170. Ayant dressé un parement pour servir de plan vertical, on y appliquera le panneau du voussoir qu'on se propose de faire ; par exemple, le premier b 2 pris en son entier sur l'élevation, fig. 163, qui est ici la figure triangulaire (fig. 170) d^1 b C^e 2 G œ, laissant l'espace depuis œ en d^1 indécis, & l'on abattra la pierre qui excede les lits C^e d^1, C^e G à l'équerre ; ensuite ayant repairé sur les deux arêtes les points 2 & 24, on tirera une ligne de l'un à l'autre pour lui tracer une parallele à une distance arbitraire du point G, comme en œ, qui marquera le retour horisontal que l'on veut donner à la pierre au-delà de son joint. Sur cette ligne on appliquera le biveau de l'angle que fait le plan vertical avec celui du joint montant dans la vis, lequel est W O^2 S marqué au plan horisontal, & l'on appliquera sur ce point l'arc de cercle SXf r^5, que l'on tracera pour tailler la doële suivant cette courbure, quand il en sera tems. On portera ensuite sur l'arête que fait la rencontre des lits, la longueur W C^e & W F, que l'on y marquera en repaire ; & sur une parallele à cette arrête tracée par le point 2, on portera la longueur 27 Q, qu'on y marquera. Par le moyen de ces deux repaires, on y appliquera le panneau de lit f 22 2 k^2 g^2 de la fig. 165, pour y tracer son contour. On appliquera aussi sous le lit de dessous le panneau f a^2 VT, posant le point f sur le repaire F, & le point a^2 sur un repaire fait par une ligne 39 B tracée dans ce lit, parallele à son arête W D. A cette parallele on en tracera une

autre sur le lit de dessus, où l'on repairera la profondeur 39 9, qui donnera l'extrêmité du joint 6, duquel on tirera une ligne au repaire 39; enfin sur les points 24, p^1, c^2, où les trois paralleles se terminent au bas du plan vertical, on fera trois lignes de retour d'équerre sur lesquelles on repairera les longueurs des lignes horisontales 27 12, 38 11, & 39 10, qui serviront à donner la position des trois cerches des arcs descendans des fig. 166 & 167, & la pierre sera prête à être taillée. *Fig.* 163.

On commencera par abattre la pierre le long de l'arête du joint montant avec le biveau de l'angle mixte S o^2 9, tenant ses branches d'équerre à cette arête, & par ce moyen on formera une portion de tour creuse; on abattra ensuite la pierre qui remplit l'intérieur de la vis, suivant la cerche S r^5, que l'on tiendra toujours parallele à elle-même avec le lit de dessous suivant l'angle C^e 24 2, & son plan toujours perpendiculaire à l'arc BS, afin qu'elle soit toujours dirigée au centre du noyau, venant chercher les points repairés au plan du lit supérieur 2 K G. On creusera ensuite la niche entre les arcs tracés par les panneaux aux lits de dessus & de dessous, qui donnent deux côtés de la portion de sphéroïde; & le troisieme représenté par 2 24, se formera par la cerche de l'arc 32 *d* de la fig. 168, & les autres de suite, ce que l'on pourra perfectionner par le moyen d'une cerche faite d'une portion d'ellipse, dont C^e 22, & Ce F sont les demi-axes. Il ne restera plus à faire que le lit supérieur de la pierre, qui fait partie de celui de la vis Saint-Giles, lequel se fera, comme nous l'avons dit en son lieu. *Fig.* 163 & 164.

Démonstration.

Si l'on suppose la vis Saint-Giles & la niche qui la pénetre en partie coupées par un plan vertical passant par le milieu du noyau C^n, & par le milieu F de la niche, il est clair qu'il fera pour section deux arcs de cercles représentés en RX^f F^d, l'un comme R r^5 S dans la vis, qui sera un demi-cercle dont le diametre RS sera horisontal, par la génération de cette vis; l'autre sera une portion de cercle F^d F^2 X^f, par la formation du sphéroïde, lequel dans le cas présent est formé d'une suite de rayons de cercles, qui sont les ordonnées au diametre du demi-cercle AFB, transportées suivant leurs directions verticales & *Fig.* 164.

Fig. 164. horisontales dans le sphéroïde ; de sorte qu'on doit le considérer comme une suite de cercles verticaux rangés sur un axe incliné. Cela supposé, la section du sphéroïde ne changera pas de figure, mais seulement de grandeur ; il n'en est pas de même des sections verticales de la vis, il n'y en aura de circulaire que celle qui passe par son centre ; toutes celles qui s'en éloigneront parallelement seront toujours des ovales du 4e ordre d'un contour différent, comme nous l'avons démontré au théor. VI. du Ir livre ; de sorte qu'on ne peut faire servir une pour toutes : c'est pourquoi les rencontres de ces ovales avec les arcs de cercles doubles du sphéroïde forment une courbe à double courbure, qui n'est pas uniforme aux deux côtés de la section circulaire faite sur la ligne du milieu C^n F ; ce qui paroît étonnant du premier abord, & contraire à l'uniformité des solides coupés, d'où est venu l'erreur du P. Derand.

Fig. 162. Pour en appercevoir la raison, soit la fig. 162, laquelle représente dans un même plan vertical trois sections rangées suivant leurs distances respectives à l'égard de celle du milieu, dont l'axe est horisontal. Il est clair que les sections rampantes AB, GH étant également éloignées de celle du milieu D*d*, elles doivent être égales entre elles ; mais parce qu'elles sont tournées en sens contraire, l'une montant du côté de D en H, & l'autre descendant en A, elles présentent à la niche des courbures différentes, l'une B *n* plus arrondie que *d s*, l'autre G *m* qui l'est moins, & par conséquent les intervalles horisontaux N *k*, Q *q*
Fig. 164. (fig. 164) placés à même hauteur sur les points B & G, doivent être inégaux, ce que l'on apperçoit sensiblement dans les fig. 166 & 167, aux points X & Y. Il reste à faire voir pourquoi on a cherché les hauteurs que les parties horisontales *x* 7, *y* 8, *z* 9 donnent au-dessus & au-dessous de l'horison, dans les axes des ovales : il est visible que c'est pour trouver l'inclinaison de ces axes, suivant lesquels on doit poser verticalement les ordonnées du demi-cercle générateur représenté par R r^5 S. Pour y parvenir on a fait plusieurs arcs de cercles concentriques X *o*, Y *o*, Z O^2, qu'il faut considérer comme autant de bases de cylindres qui coupent la vis, dans la surface desquels elle fait autant de lignes rampantes, toutes inégalement inclinées dans le rapport de la longueur des arcs semblables ; c'est-à-dire qu'elles sont toujours plus roides à mesure qu'elles approchent du noyau, puisque les diametres C^n B & C^2 D de la vis sont horisontaux, la

hauteur de chacun ſera toujours égale, quoique les intervalles d'inclinaiſon ſoient inégaux. Or il eſt clair que le rapport de la baſe horiſontale Y *o* eſt à une hauteur quelconque, par exemple *e* C^e de l'élevation, comme la partie *y* P (qui eſt la diſtance du rayon horiſontal, paſſant par le point 5 de la ſection du plan vertical coupant l'horiſontal en 5 P) eſt à un quatrieme terme, qui a été trouvé au point 24 de la fig. 170, par le moyen des triangles ſemblables. *Fig.* 164.

On pourroit trouver d'une autre maniere les inclinaiſons des axes des ovales avec l'horiſon par une ſimple analogie, en diſant, par exemple, pour l'axe de la ſection de l'ovale paſſant par le point 4; comme l'arc D 4 eſt à la hauteur *ll* C^e, trouvée par la parallele *ll* 24, ainſi la demi-circonférence de la vis, moins deux fois l'arc D 4, eſt à un quatrieme terme, qui ſera la hauteur totale de cet axe, ou ſon abaiſſement ſous l'horiſon; ou bien D 4. *ll* C^e : : 90 — D 4. *x*, qui ſera la moitié de cette hauteur, par laquelle doivent paſſer tous les axes des ovales qui ſe coupent toutes au profil, ou à la projection faite ſur un plan vertical. De ſorte que prenant cette demi-hauteur pour un point fixe au milieu, ſi l'on porte la hauteur que donne l'intervalle de l'arc D 4, conſideré comme en rampe, au-deſſous du diametre horiſontal de la ſection circulaire de la vis, & que de ce milieu l'on prenne la longueur horiſontale de la moitié de l'axe 4^n 4, on aura l'extrêmité de l'axe; d'où par le point donné à ſon milieu, on menera une ligne qui en exprimera l'inclinaiſon. Or on ſait (par le probl. XVI du 2e livre) que ſi cet axe incliné eſt diviſé proportionnellement à l'horiſontal, qui l'eſt par des cercles concentriques au noyau qui coupent le diametre horiſontal de la vis, on aura toutes les abſciſſes ſur leſquelles on doit poſer verticalement les ordonnées de la ſection circulaire correſpondante, ce qu'il falloit faire pour trouver les contours des courbes ovales du 4e ordre dont il eſt queſtion, par le moyen deſquelles on trouve les avances de la rencontre de la vis avec la niche.

Il faut remarquer que cette rencontre ne ſera plus immédiate ſi l'on fait les parties de la niche qui excedent l'hémiſphere, horiſontales, comme nous l'avons dit; alors le ſphéroïde ſe joint inſenſiblement à une portion cylindrique, de cylindre intrinſéquement ſcalene, qui eſt cependant perpendiculaire au plan de l'ellipſe verticale paſſant par l'axe du ſphéroïde, la-

quelle ellipse est sa base droite. D'où il suit que cette ellipse étant commune au cylindre, & au sphéroïde, la surface cylindrique est tangente à celle du sphéroide, & la jonction des deux devient imperceptible à la vue; mais dans ce cas la niche ne rachete plus la vis Saint-Giles immédiatement, elle rachete un berceau rampant, lequel rachete ensuite la vis Saint-Giles; de sorte que cette circonstance du trait change l'énoncé & l'état de la question.

De la rencontre des voûtes hélicoïdes avec les conoïdes.

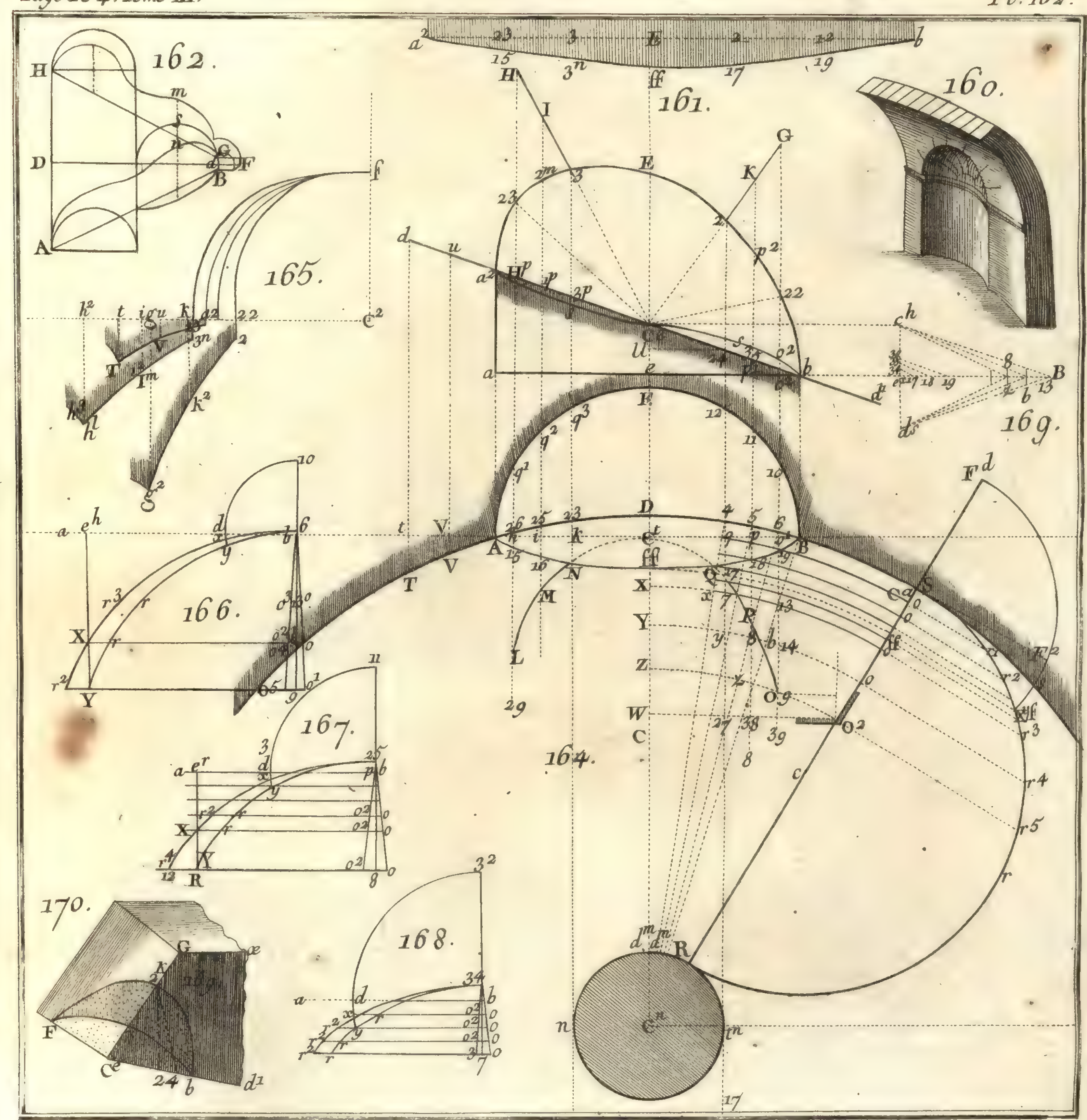
En termes de l'art,

Lunette ébrasée dans une vis S. Giles ronde, ou voûte d'arête tournante & rampante.

Comme la voûte d'arête tournante & rampante est composée de lunettes inégales tournées en sens contraire, l'une étroite du côté du noyau, l'autre plus large du côté de la tour ou du mur de cage, il suffira, pour satisfaire à l'énoncé des deux traits, de donner celui d'une lunette ébrasée, qui servira pour l'un & pour l'autre. Soit (fig. 171,) le cercle RPN°, la projection du noyau de la vis, & l'arc KNS, celle de la tour ou du piédroit de la vis; soit le demi-cercle ou la demi-ellipse VH^u S, la section d'un plan vertical passant par le centre C^n du noyau, laquelle est le ceintre primitif de la vis. Soient enfin les deux lignes DA, EB dans l'épaisseur du mur de cage, dirigées au centre C^n, qui forment les piédroits de l'ouverture DEBA, sur laquelle on doit établir la lunette proposée à faire, dont la doële est une surface conoïde, laquelle par sa pénétration dans celle de la vis, forme à leur commune intersection une arête à double courbure, dont il faut chercher la projection horisontale.

Planch. 103. *Fig.* 170 & 171.

Pour y parvenir, il faut premierement considérer ces deux voûtes rampantes, comme si leurs impostes étoient de niveau, parce que la rampe n'ajoute rien à la saillie de la lunette dans la vis. En second lieu, il faut se déterminer à la position du ceintre primitif de la lunette, qu'on peut prendre en DE ou en AB. Sur la corde DE, par exemple, ayant décrit le demi-cercle ou la demie-ellipse DHE pour ceintre primitif, on le divisera en ses voussoirs aux points 1, 2, 3, 4, d'où on lui abaissera des perpendiculaires qui le couperont aux points d^1, d^2, d^3, d^4, par



Picquet Sculpt.

par lesquels on tirera au centre C^n du noyau les indéfinies $x^1 l^1$, $x^2 l^2$, &c, qui seront terminées à l'arc DME de la tour en $x^1 x^2$, mais qui seront indéterminées du côté du noyau. Pour trouver leurs terminaisons de ce côté, on tirera par le point S, extrêmité du diametre du ceintre de la vis VS, une perpendiculaire ST, qui sera tangente à l'arc $H^u S$, sur laquelle on portera les hauteurs des retombées du ceintre primitif de la lunette $1\ d^1$, $2\ d^2$, en $S t^1$, $S t^2$, & celle de la clef CH en $S t^l$; ensuite par les points t^1 t^2 t^l, on menera des paralleles au diametre VS, qui couperont l'arc $H^u S$ aux points 1^u, 2^u l^u, d'où l'on abaissera des perpendiculaires sur le même diametre VS, qui le couperont aux points p^1, p^2, l. Par ces mêmes points on tracera des arcs de cercles concentriques au noyau (supposant la cage circulaire) comme $V^1 p^1$, $V^2 p^2$, qui couperont les projections des joints de lit correspondans dans la lunette aux points l^1, l^2, L, l^3, l^4, par lesquels on tracera à la main la courbe ondée ALB, qui sera la projection de l'arête de la lunette dans la vis que l'on cherche. *Fig. 171.*

Il faut présentement former les ceintres rampans de la voûte de lunette dont on suppose le milieu de la clef de niveau, de même que tous les joints de lit, c'est pourquoi leurs hauteurs étant constantes, & leurs diametres DE & AB inégaux, ces ceintres sont inégaux entre eux, comme au passage ébrasé dont nous avons parlé au tome précédent, page 466. La différence de leur construction ne consiste qu'en ce qu'au passage ébrasé les impostes sont de niveau, & qu'ici elles sont plus hautes l'une que l'autre. Pour déterminer la différence de leur hauteur, il faut savoir de combien monte la vis du point A au point B, & porter cette hauteur perpendiculairement sur AB de B en b, & sur DE de E en R, pour tirer les rampantes Ab, DR, & par les points 1, 2, 3, 4 de la ligne AB, où elle est coupée par les projections des joints de lit, on lui élevera des perpendiculaires indéfinies qui couperont la rampante A b aux points o^1, o^2, o^3, o^4; de même par les points d^1, d^2, &c, on élevera sur DE des perpendiculaires indéfinies, qui couperont la rampante DR aux points e^1, e^2, e^3, e^4. Tous ces points de l'un & de l'autre diametre sont ceux des abscisses des ellipses rampantes, sur lesquels il n'y a qu'à porter les hauteurs des retombées du ceintre primitif DHE, aux verticales correspondantes; ainsi on portera la hauteur $1\ d^1$ en quatre endroits, sça-

Fig. 171. voir en e^1 1^r, e^4 4^r pour le ceintre ſur DR; & en o^1 a^1, & o^4 a^4 pour le ceintre ſur Ab; de même la hauteur 2 d2 en e^2 2^r, e^3 3^r, & o^2 a^2 & o^3 a^3, & l'on aura tous les points du contour de chaque ceintre D, 1^r, 2^r, 3^r, 4^r, R, & A1, a^2, a^3, a^4, b que l'on cherche.

On auroit pu auſſi décrire ces deux ellipſes par le probl. VIII du livre II, parce que l'on a un diametre rampant, un demi-diametre vertical, & l'angle qu'il fait avec le rampant donné; ainſi on peut en trouver autant de points qu'on voudra, ou la tracer par un mouvement continu, comme il a été dit au problême cité. Ces deux ceintres que nous venons de tracer ne ſont autre choſe que des cerches verticales pour former la doële de la lunette, leſquelles ne peuvent ſervir que pour l'endroit préciſément où elles ont été formées; enſorte que ſi on les plaçoit un peu plus en dedans ou en dehors, ou qu'elles fiſſent un angle plus ou moins ouvert avec les arêtes horiſontales des lits à la doële, elles donneroient un faux contour, parce que la doële eſt gauche & de la nature des conoïdes; ainſi au cas que les pierres ne ſoient pas aſſez longues pour occuper l'épaiſſeur du mur, il faut tracer par la même pratique d'autres arcs rampans entre DE & AB, aux endroits où l'on ſera obligé de faire des joints de doële, pour avoir les courbes des têtes de chaque vouſſoir.

Il nous reſte préſentement à chercher les biveaux des coupes des lits, qui doivent auſſi être pris aux mêmes endroits que les arcs rampans des cerches, par la même raiſon que les doëles ſont gauches. Ayant tiré les joints de tête à l'ordinaire du centre C de l'arc DHE, qui eſt un ceintre primitif de ſuppoſition, on remarquera que les coupes des arcs rampans qui répondent à ſes diviſions en vouſſoirs, doivent être les unes plus inclinées à l'horiſon, les autres moins que celles du ceintre primitif, & ces différences d'inclinaiſon ſe trouveront à peu près de la même maniere qu'on a trouvé les points des arcs rampans. Soit, par exemple, le joint de tête 1 q tiré du centre C par le point 1 du ceintre primitif, on abaiſſera ſur la ligne horiſontale ED, prolongée, une perpendiculaire q X, qui coupera, étant auſſi prolongée, la ligne de rampe RDX au point X, & l'horiſontale ED au point i; on prendra enſuite la hauteur $i\,q$ qu'on portera en X z ſur Xq, où elle donnera le point z par lequel & par le point 1, on tirera la

ligne 7 1, qui sera la réforme de l'inclinaison du joint de tête, à laquelle celle de l'arc rampant 1^r 5 doit être parallele. On voit que cette tête a sa coupe plus couchée que celle du ceintre primitif. *Fig.* 171.

Mais si l'on cherche la coupe du joint de tête 3^r 7, on verra au contraire qu'elle doit être plus inclinée que celle du ceintre primitif dont le joint est la ligne 3 *p*; car suivant la même méthode, ayant pris sur ce joint un point *p* à volonté, & ayant abaissé de ce point une perpendiculaire sur DE, qu'elle coupera au point V, & la ligne de rampe DR au point *y*; si l'on prend la hauteur V*p*, & qu'on la porte sur la même ligne prolongée en *y* 7, elle donnera le point 7, par lequel & par le point 3^r on tirera le joint de tête 7 3^r, qui sera plus incliné que celui 3 *p* du ceintre primitif. Pour le démontrer, il faut tirer par le point e^3 où l'aplomb 3 d^3 coupe la ligne de rampe, une ligne *e o* parallelle à DE, qui coupera l'aplomb *p* V au point *o*, & qui donne l'excès de hauteur de la rampe *y o*, lequel étant porté en *p* Y, la ligne Y 3 sera le joint réformé auquel 7 3^r est parallele, comme il est visible par la construction; donc le joint de tête 7 3^r de l'arc rampant est plus incliné à l'horison que le joint de tête 3 *p* du ceintre primitif, en quoi il differe du joint 1^r 5 qui est moins incliné que le joint 1 *q*.

On trouvera de même le joint de tête de l'arc rampant intérieur A h^a *b*, où simplement, pour faire les lits en surface plane, on menera par les divisions a^1, a^2, a^3, &c, des paralleles aux joints trouvés pour les divisions du grand ceintre 1^r, 2^r, 3^r, &c. Par le moyen de la position des joints de tête, on aura deux biveaux dont on fera usage différemment; l'un est le biveau rectiligne de l'angle que fait chaque joint de tête avec une ligne à plomb, comme 5 $1^r e_1$, 7 3^r e^3, qui servira pour trouver facilement la position du lit, qui sera la même dans la grande & la petite cerche, parce qu'on ne doit pas faire le lit en surface gauche. L'autre biveau sera l'angle mixte que fait le joint de tête trouvé avec la courbe de chaque cerche, celui-ci est variable d'une cerche à l'autre; par exemple, au premier lit au-dessus de l'imposte inférieur, ce biveau est l'angle mixte 5 $1^r n$ D, qui est plus ouvert que son correspondant à la cerche intérieure 9 a^1 *ff* A: ainsi des autres angles sur lesquels on doit former les biveaux mixtes.

Pour tracer une cerche courbe à double courbure, ou un

panneau flexible, propre à former la tête convexe des voussoirs qui peuvent être apparens au-dehors de la tour ronde en DME, on rectifiera l'arc DME, comme on a fait à la fig. 172, sur une base horisontale D e, qui sera un peu plus grande que DE, dans le rapport de la corde à l'arc, sur laquelle on portera toutes les divisions que donnent sur cet arc les projections des joints de lit aux points x^1, x^2, x^3, x^4. Puis ayant élevé des perpendiculaires sur chacune de ces divisions, égales à celles de la courbe plane D h^r R, on tracera par leurs extrêmités un arc rampant un peu différent, qui sera le développement de celui qui doit se former à la surface convexe de la tour, par les têtes des voussoirs de la lunette, sur lequel on formera des panneaux flexibles, dont on fera usage, comme pour une porte en tour ronde.

Fig. 171 & 172.

Corollaire

De la voûte d'arête tournante & rampante.

Fig. 171. Il est visible que si la hauteur de la clef d'une lunette percée dans la voûte de la vis Saint-Giles est égale à celle du ceintre primitif, qui est la section verticale par le noyau de cette vis, la lunette étant prolongée en formera une autre plus étroite du côté du noyau; par exemple, si la lunette commençoit dans la tour creuse sur la largeur KN, elle deviendroit en se retrécissant jusqu'au milieu de la clef de la vis en O, d'où elle se rélargiroit du côté du noyau jusqu'à un certain point de part & d'autre, comme vers n^4 k^4, & ensuite se retréciroit vers le noyau en RP, ce qui formeroit une voûte d'*arête tournante & rampante*, dont les projections des arêtes KOP, NOR qui se croisent en O, sont les mêmes que celles d'une *voûte d'arête sur le noyau*; lesquelles ne sont point des arcs de cercles, comme les tracent le P. Derand & M. de la Rue, mais des courbes méchaniques, comme nous l'avons remarqué au chap. VIII de ce livre. Sur quoi il faut remarquer que ces sortes de voûtes ne conviennent qu'aux berceaux tournans & rampans, sur un noyau d'un fort grand diametre, & non sur un pilier mince comme aux vis Saint-Giles proprement dites, parce que la lunette du côté du noyau deviendroit extrêmement serrée & étroite pour sa hauteur, ce qui seroit difforme par l'exhaussement extraordinaire du ceintre à double courbure de son formeret sur le noyau, & qui rendroit l'ouvrage inutilement difficile, & même moins solide.

Application du trait sur la pierre.

Pour connoître la hauteur que doit avoir la pierre qu'on destine à faire un voussoir qui fasse la longueur de la lunette, & porte enfourchement dans la vis ; par exemple, pour le second rang, on menera par l'angle le plus bas 1^r l'horisontale $1^r f$, au-dessous de laquelle on abaissera l'aplomb $1^r o$ égal à $e^1 d^1$; par le point o on menera l'horisontal o V, qui rencontrera l'aplomb 5 X au point V, par où on tirera la ligne V 1^r, qui exprimera la rampe du retour dans la vis, la hauteur 6 o, ou $o^6 o$ sera celle que l'on cherche. Pour la longueur, on en prendra les mesures sur la projection horisontale en $V^2 l^2$, $x^2 x^1$, $l^1 k^1$, dont on levera un panneau pour en tracer le contour sur le premier parement que l'on doit faire pour un lit de supposition horisontale, sur lequel on repairera les points G^2 & d^2, observant que la pierre soit plus large que le panneau, de la longueur $i d^1$. *Fig.* 171.

On formera ensuite la tête $V^2 l^2$, & $s k^1$ en voussoir de vis Saint-Giles, comme s'il n'y avoit point de lunette, ainsi qu'il a été dit touchant le trait de cette vis, au tome précédent, page 445. Sur la ligne $l^2 x^2$, on fera un parement à plomb qui sera en retour d'équerre sur le lit horisontal ; dont l'interfection sera l'arête $l^2 x^2$, sur laquelle on a dû repairer les points G_2 & d^2, comme nous venons de le dire, pour tracer par ces points les lignes AG^2 & D d^2, par le moyen des angles $x^2 G^2 A$ & $G_2 d_2$ D, qu'on transportera sur ce lit avec la sauterelle ou la fausse équerre. Par ces mêmes points G^2 & d^2, on élevera des perpendiculaires sur l'arête du lit de dessous dans le parement à plomb, pour y porter les hauteurs de la retombée de la lunette $e\ 2^r$, par l'extrêmité de laquelle on tirera une parallele à l'arête du lit horisontal de supposition, laquelle déterminera l'arête du lit supérieur avec la doële. Pour donner à ce lit supérieur son inclinaison de coupe, on prendra avec la fausse équerre l'angle 6 $2^r e$, qu'il fait avec l'à plomb $2^r d^2$, posant une de ses branches sur la ligne verticale tracée dans le parement à plomb, & l'autre branche sera tenue perpendiculairement à l'arête du joint de lit à la doële.

Par le moyen de ce biveau, on abattra la pierre pour former une surface plane, qui sera celle du lit de dessus, laquelle ser-

Fig. 171. vira à ſon tour d'appui à une des branches de chacun des biveaux mixtes qu'on doit former à chaque cerche, l'une du côté du dehors $1^r\ m\ 2^r\ 6$, & l'autre du dedans de la lunette $a^1\ m^a\ a^2\ 6^a$, tenant toujours leurs branches d'équerre à l'arête du lit de deſſus. Les biveaux mixtes étant dans cette poſition, on creuſera deux plumées, dans leſquelles on appliquera exactement leurs branches convexes pour former la concavité de la doële, qui eſt également creuſe dans chacune de ces poſitions, parce qu'elle eſt gauche; après quoi il ne reſtera plus qu'à achever d'abattre la pierre à la regle entre ces deux plumées, pour former cette ſurface, comme il a été dit pour celle du paſſage ébraſé. La rencontre de cette ſurface avec celle de la vis, qu'on ſuppoſe déja faite, parce que nous avons commencé par là, formera ſans panneaux, comme par une eſpece de haſard, l'arête à double courbure, qui eſt la commune interſection des doëles de la lunette & de la vis, laquelle eſt marquée en projection par la courbe ondée $l^1\ l^2$.

On me demandera peut-être pourquoi la projection totale de cette courbe AZB eſt égale de chaque côté du point Z, & que celle de rencontre de la lunette faite par une niche dans la vis Saint-Giles, eſt différente d'un côté à l'autre, comme il a été dit à la page 262 de ce dernier tome. La raiſon de ces différences de rencontre vient de ce que dans le trait de la niche il s'agit de celle du cylindre avec une vis, où les directions des joints de lit de la lunette ne concourent pas au centre du noyau; deſorte que dans la partie inférieure de la lunette, ce joint prolongé horiſontalement, perce & ſe dégage plutôt de la voûte de la vis que dans la ſupérieure, comme nous l'avons expliqué par un profil; au lieu que dans cette lunette conoïde, les directions des joints de lit, tendant toutes au centre du noyau, elles coupent les hélices des joints de lit de la vis à diſtances égales du rayon du milieu C^n M.

Il eſt viſible que la doële de la lunette étant creuſée, elle ſervira à ſon tour d'appui aux branches convexes des biveaux de lit de deſſous & de doële, qui ſeront formés ſur les angles mixtes $5\ 1^r\ m\ 2^r$ & $9\ a^1\ m^a\ a^2$; la largeur de la doële étant déterminée par les cordes des arcs $2^r\ 1^r$ & $a^2\ a^1$, on aura exactement l'arête du lit du deſſous & de doële, à laquelle on appliquera perpendiculairement les branches de ces biveaux, avec leſquels on abattra la pierre pour former une ſurface plane qui

rencontrera la courbe du lit de dessous dans un angle rentrant, au lieu que le lit de dessus avoit rencontré celui de la vis en angle saillant.

Explication démonstrative.

Nous avons dit, en parlant de la vis Saint-Giles, au tome précédent, que les diametres de toutes les sections verticales passant par l'axe de la vis étoient des lignes horisontales, & en parlant du passage ébrasé, nous avons aussi remarqué que toutes les sections de ce corps conoïde, qui tendoient à l'axe vertical élevé au point de concours des lignes convergentes de ses impostes, étoient aussi des lignes horisontales; par conséquent elles seront paralleles aux diametres des sections verticales de la vis. Mais comme tous ces diametres s'élevent à mesure que l'on tourne autour du noyau, il convient aussi que les lits du passage ébrasé qui fait la lunette, soient à des niveaux différens qui s'élevent autant que les ceintres de la vis, ce qui convertit le passage ébrasé en berceau rampant d'une imposte à l'autre, comme la vis change la voûte sur le noyau en berceau rampant : la différence qu'il y a dans ces manieres de ramper, c'est que la vis rampe suivant sa direction courbe, & que la lunette qui la croise ne doit point ramper suivant sa direction qui est droite, mais suivant ses sections transversales.

On auroit pu prendre ces sections transversales suivant des lignes courbes concentriques à la vis; le trait en seroit un peu plus régulier, j'en conviens, mais il en seroit aussi plus difficile dans l'exécution. 1°. Parce qu'il faudroit développer tous les diametres courbes de ces sections, qui sont des arcs de cercles ou d'ellipses. 2°. Parce qu'il faudroit se servir de panneaux flexibles pour appliquer les courbes de ces ceintres sur des têtes convexes ou concaves, ce qui est un troisieme inconvénient qu'on évite en faisant des cerches sur des sections planes. D'ailleurs la différence de contour qui en peut résulter est si petite qu'elle doit être imperceptible à la vue, c'est pourquoi il est inutile d'allonger l'opération, puisqu'il n'en peut résulter aucun avantage, mais au contraire plus de difficulté.

Voilà tout ce que j'avois à dire touchant les voûtes; je crois n'en avoir oublié aucune de celles qui peuvent être de quelque usage : j'ai tâché de me rendre intelligible le plus qu'il m'a été

poſſible, mais je ne me flatte pas de l'avoir toujours été à ceux qui ne ſont pas un peu initiés dans la pratique des traits; je leur conſeille de s'aider l'imagination, & de ſuppléer à ce qui manque à mes explications, par le travail des mains, en *coupant du trait* avec de la craie ou du plâtre. Quoique les voûtes renferment les plus grandes difficultés de la Stéréotomie, il eſt cependant vrai qu'il s'en trouve encore dans la conſtruction des eſcaliers, conſidérés par leurs apuis, limons & coquilles; c'eſt ce qui nous reſte à examiner.

CHAPITRE XI.

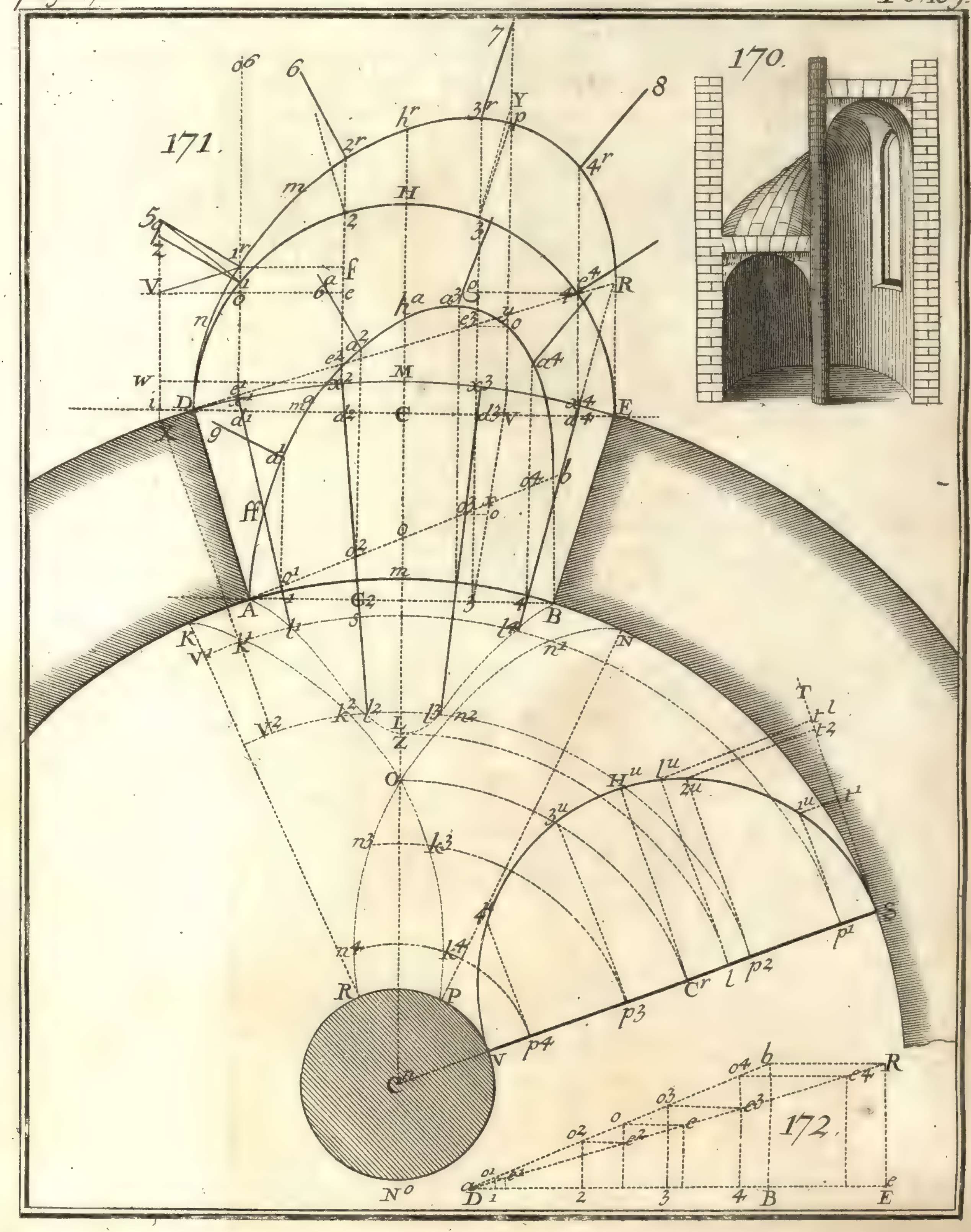
De l'appareil des eſcaliers, conſidérés ſeulement dans leurs appuis, limons & coquilles.

APRÈS avoir traité des différentes eſpeces de voûtes deſtinées à couvrir les eſcaliers, comme la vis Saint-Giles ronde, pour ceux qui montent en tournant dans une tour ronde, la vis Saint-Giles quarrée, pour ceux qui ſont dans des tours quarrées ou à pans: les voûtes droites ſur les impoſtes rampantes & bombées au ſommet, avec repos ſuſpendus & portés par des trompes ou des arcs de cloître, pour les eſcaliers à rampes droites, avec un quarré ou autre poligone vuide au milieu, &c. il nous reſte à parler des parties eſſentielles aux eſcaliers, qui ſont les marches, les limons, les appuis & les coquilles du parement inférieur des marches droites, qui ont auſſi leurs difficultés pour l'appareil; les moindres ſont dans les rampes droites: cependant il n'eſt pas inutile, pour la pratique, de les faire remarquer.

PREMIEREMENT.

Du raccordement des appuis & limons des rampes droites aux angles de leur rencontre ſaillans ou rentrans, extérieurs ou intérieurs.

Il y a trois ſurfaces dans chaque limon, qui méritent d'être conſidérées à part. 1°. La ſupérieure, dont les ſections perpendiculaires à ſes côtés rampans, doivent toujours être des lignes de niveau, ce qui s'étend auſſi aux limons & appuis courbes. 2°. L'intérieure du côté des marches, qui fait une eſpece de ſocle


170.
171.
172.

dont l'arête doit être parallele à la ligne tangente aux angles des marches. 3°. La ſurface extérieure, dans les eſcaliers vuides au milieu, qui eſt ordinairement une plinthe, ou une petite corniche rampante parallele à l'arête de la face intérieure, par conſéquent à la tangente des angles des marches. Quoique ces trois ſurfaces ſoient relatives, elles peuvent cependant, à l'égard de certaine ſymétrie, être conſidérées comme indépendantes, parce que leurs arêtes peuvent faire des ſuites dans les retours d'un côté, quoiqu'elles ſoient interrompues de l'autre; pour donc traiter cette matiere à fond, comme nous croyons avoir fait juſqu'ici celle des autres *traits*, nous allons établir un lemme qui en donnera une pleine connoiſſance.

LEMME.

Deux parallelogrames de différentes directions, inclinés à l'horiſon ſuivant un de leurs côtés & de niveau par l'autre, ne ſe coupent pas ſuivant la diagonale de la projection de l'angle qu'ils ſont entre eux, mais ſe croiſent ſeulement en un point des côtés qui ſe touchent.

Ou, ce qui eſt la même choſe en différens termes; ſi deux parallelogrames inclinés à l'horiſon ſont perpendiculaires à deux plans verticaux de différentes directions, ils ne ſe croiſeront qu'en un ſeul point, qui ſera dans la ligne d'interſection des deux plans verticaux.

Suivant ce dernier énoncé, la vérité de cette propoſition eſt facile à démontrer, car on peut conſidérer les deux plans inclinés comme projettés ſur les plans verticaux, & alors ils ſe réduiſent chacun à une ſeule ligne inclinée; or deux lignes ne peuvent ſe couper qu'en un ſeul point, par conſéquent ces deux plans ne ſe croiſent qu'en un ſeul point. Secondement, ces deux plans étant inclinés à l'horiſon, ne peuvent être coupés par un plan horiſontal, que ſuivant deux lignes horiſontales inclinées entre elles, qui ſont dans des plans différens: or ces deux lignes ne peuvent ſe croiſer qu'en un ſeul point, par conſéquent ces deux plans ne peuvent ſe croiſer qu'en un ſeul point horiſontalement, ſuppoſant toujours des parallelogrames & non pas des plans prolongés en tout ſens.

Plan. 104, *Fig.* 177. Si nous en venons à l'application particuliere, nous pouvons considerer ce qui arrive lorsque leurs directions sont dans des plans verticaux perpendiculaires entre eux, comme à la fig. 177, où les parallelogrammes CK, HE sont les projections des parallelogrammes qu'on suppose inclinés à l'horison, l'un suivant l'angle du profil CED ou REL, son opposé au sommet, l'autre suivant l'angle CGA. Il faut démontrer que si le point F est celui de la rencontre des côtés IE, KG, toutes les lignes qu'on peut tirer de ce point F dans l'un & l'autre parallelogramme, sont divergentes, & qu'aucune ne peut être la commune intersection des deux plans inclinés, comme dans leur projection horisontale.

Premierement, il est visible que celles qui seront menées de ce point F perpendiculairement aux côtés KG, IE, seront divergentes, quoique réunies dans la projection, puisque FE considérée dans le plan CI, est inclinée à l'horison (par la supposition) suivant l'angle CGA du profil, & que la même ligne FE, considérée dans le plan CK, est horisontale, aussi par la supposition; par conséquent ces deux lignes seront inclinées entre elles, comme GA & GC, ou par un autre profil, comme GF & F *d* en descendant, ou comme GF horisontale avec FD en montant; ce qui fait voir aussi que les lignes en FG sont encore divergentes, comme GF & F *d* ou FD. Il ne sera pas plus difficile de faire voir que les lignes tirées du point F, suivant la diagonale FC, ou toute autre F dans chacun des plans, seront aussi divergentes; car si l'on fait C *a* perpendiculaire à CF, & égale à CA, il est clair que la ligne *a* F représentera un des plans qui monte comme IC, ou qui descend de K en C; de sorte que faisant l'angle de cette descente en CF d^a, l'angle total *a* F d^a sera le profil de la section des deux plans par la diagonale de la projection FC, ainsi des autres. La même démonstration s'applique sans aucune difficulté à la rencontre des parallelogrammes dont les directions sont obliques, comme à la fig. 179.

Corrollaire de pratique.

Il suit évidemment de cette proposition que deux tablettes d'appui de rampes, ou deux limons paralleles à la tangente qu'on doit imaginer toucher les arêtes des marches de

chaque rampe, *ne peuvent ſe joindre à leur rencontre que par un reſſaut* formé par une troiſieme ſurface à plomb ou de niveau, qui paſſe de l'un à l'autre ; quelque précaution qu'on prenne, on ne peut l'éviter, il eſt inutile d'y chercher d'autre expédient, ou bien il faut les faire terminer à un pilaſtre ou piédeſtal, &c. qui en cache la terminaiſon ; car ſi l'on fait enſorte par la diſpoſition des girons des marches, que les côtés intérieurs des limons ſe réuniſſent dans l'angle rentrant, les côtés intérieurs ne ſe réuniront pas dans l'angle ſaillant oppoſé ; & ſi au contraire les côtés intérieurs des limons ou appuis ſe réuniſſent dans un angle qui eſt ſaillant du côté des marches, ils ne ſe rencontreront pas dans l'angle ſaillant oppoſé, ils y feront néceſſairement un reſſaut.

D'où il ſuit que les expédiens que Boſſe donne pour éviter les reſſauts à l'arête du ſocle du côté des marches, ſont inutiles pour le côté extérieur, ou quoiqu'ils ne paroiſſent pas lorſqu'on le couvre d'une baluſtrade, ils paroiſſent à l'appui ſupérieur, comme on peut le voir à la fig. 174, où il s'en fait néceſſairement deux, un triangulaire incliné *b f c*, & un triangulaire vertical *c f g*; ou bien ſuivant la correction de Deſargues, que Boſſe appelle une merveilleuſe invention, on en peut faire trois en partageant la moitié du reſſaut intérieur *f g* en deux, en *m*, d'où on tirera des lignes en *b* & en *c*; ainſi alors on aura trois reſſauts triangulaires, ſavoir deux verticaux *b c m* & *c g m*, & un en pente *b m c*. *Fig.* 174.

La ſeconde ſurface que nous conſidérons dans le limon ou dans l'appui, eſt l'intérieure du côté des marches où le limon fait ordinairement un bord de quelques pouces de hauteur, qui eſt la baſe intérieure des baluſtrades, ou le *reſſocle* du limon ſur lequel on met la rampe de fer, auquel l'arrangement des marches aux paliers de retour cauſe ſouvent de l'interruption, & oblige l'Architecte d'y faire un reſſaut ; ce qui arrive lorſque les deux marches DC, BC, fig. 173, qui forment le palier de retour ABCD, aboutiſſent à l'angle ſaillant C du limon MCL, parce que le point C eſt la prolongation commune à deux hauteurs de marches ; ſavoir à DC du palier ſur le giron D *g*, & CB ſur le palier AC, ce que l'on voit plus diſtinctement au profil, fig. 176, aux lettres GC & C 6 ; de ſorte que l'arête MC du ſocle de la premiere rampe tombe au- *Fig.* 173.

Fig. 173. & 176. dessous de la hauteur de l'arête du socle en retour de toute la hauteur d'une marche.

Pour y remédier, il faut faire entrer l'angle C dans le palier de chaque côté de la moitié de la largeur d'une marche, en élargissant le palier par le reculement de l'arête DC en *h* K, & de BC en I *i*, parce qu'alors le point de rencontre des arêtes du socle, ou des tangentes des marches de chaque rampe, se trouvera au-dessus du palier de la moitié d'une hauteur de marche, & au dessous de la premiere marche de la seconde rampe, de la moitié d'une marche. Cette construction qui réunit les arêtes de la surface à plomb intérieure, entraîne aussi avec elle le ressaut de la surface supérieure, qui fait la tablette du socle, laquelle ne peut se racorder dans le retour que par une surface triangulaire à plomb sur la diagonale, qui change suivant l'angle de rencontre de ces deux surfaces, & si leurs directions horisontales sont paralleles, comme lorsqu'elles sont tournées en sens contraire, alors ce triangle est loxigone C *e* K, double de celui du profil d'une demi-marche; si les directions sont à angle droit, il sera rectangle, ayant pour une de ses jambes la largeur du limon, & pour hauteur une ligne proportionnelle à sa largeur à l'égard des marches; de sorte que si le limon avoit deux fois la largeur d'une marche, le ressaut du côté extérieur seroit égal à deux hauteurs de marches, ainsi du reste.

Corollaire.

D'où il suit que pour ôter totalement ce ressaut vertical, & le changer en une plate-forme horisontale, qui est plus agréable à la vue, il faut reculer les marches du palier du retour jusqu'à l'alignement des côtés du quarré, de l'épaisseur du limon C *efg*; savoir, en *df*, & 6 *f* pour les terminer au limon en *g* & *e*, c'est-à-dire qu'il faut agrandir le palier jusqu'à ce que toute la largeur du limon y soit comprise. Cette correction changeant la rencontre des limons de l'angle saillant au rentrant, formera une continuation d'arêtes de plinthe ou de corniche, en retour aux angles rentrans, sans aucun ressaut, & c'est en quoi consiste l'attention qu'on doit avoir à la *troisieme surface du limon*, pour donner une suite de retour à ses arêtes & à ses ornemens. Si les directions des rampes faisoient entre elles un angle aigu, ou un obtus, il faudroit tirer de l'angle ren-

trant P, (fig. 179) des perpendiculaires P*p*, P*e* ſur les côtés oppoſés, qui détermineroient la direction & les extrémités du palier, qui ſe trouveroit alors moins élargi que de l'épaiſſeur du limon, parce que la ligne M*e* eſt plus petite que *e*P, & il ſeroit au contraire plus élargi ſi l'angle étoit aigu; ce qui eſt clair à la ſeule inſpection de la figure, parce que l'angle de la diagonale PM avec le côté MN ſeroit plus ou moins aigu, par conſéquent ſon complément MP*e* donneroit une plus grande ou une plus petite diſtance entre la perpendiculaire P*e* & le point M. *Fig.* 179

L'inconvénient qui ſuit ce grand élargiſſement, qui peut faire perdre deux ou pluſieurs marches à chaque palier, ou peut-être l'ignorance des moyens de le lever eſt la cauſe qu'on voit pluſieurs eſcaliers où les limons font des reſſauts déſagréables à la vue, comme aux grands eſcaliers du Palais Royal & du Luxembourg, à Paris. Les Architectes François modernes ont trouvé une invention fort ingénieuſe, très-agréable à la vue, & très-commode pour éviter la difformité des reſſauts dans les angles, ſans perdre de la place, en agrandiſſant les paliers; ils inſcrivent un arc de cercle dans l'angle rentrant qui augmente la place du retour, & ſauve toute irrégularité; voici comme il faut le tracer.

Soit l'angle rentrant MCN, qui étoit le ſaillant du limon dans le palier; ayant pris à volonté les points d'attouchemens T & *t* à diſtances égales du ſommet C de l'angle donné, on menera par ces points les lignes perpendiculaires 1 c^r, 8 c^r, qui ſe rencontreront en c^r où ſera le centre de l'arondiſſement, enſuite on diviſera l'arc T*t*, comme il convient pour le collet des marches, par exemple, ici en parties égales, qui approchent de la largeur du giron des autres. On tirera par chacune de ces parties de l'arc diviſé, & par le centre c^r des lignes droites $c^r x$, juſqu'à la rencontre des marches qu'elles couperont en *x* & *x*, d'où l'on portera ſur la face de la marche la diſtance qu'il y a du point *x* à l'arc de cercle d'arondiſſement en *xn*; par le point *n* on tirera une perpendiculaire *ny* ſur *n* 5, & du point *r* une autre perpendiculaire *ry* ſur $c^r x$, qui coupera la précédente en *y* où ſera le centre de l'arc *rn*; ainſi des autres, comme la figure le montre. *Fig.* 175.

M. Herſtenſtein, dans ſon petit Traité d'architecture civile, s'y prend d'une autre façon, page 369, de ſes cahiers de

Mathématique. » Il prend de part & d'autre depuis l'angle du » filet intérieur la valeur de deux rampes & demie, (il entend » apparemment deux girons & demi) ; l'interſection que » l'on fera de ces deux points donnera le centre de l'aron» diſſement ; duquel ayant décrit un quart de cercle dans cet » angle, on le diviſera en huit parties, & les points 1, 3, 5, 7, » ſont ceux où doivent aboutir les marches. « Cette méthode me paroît bonne lorſque l'arondiſſement du bout des marches eſt peu conſidérable, & qu'il y en a peu à arondir ; mais lorſque le nombre en eſt plus grand, il faut en revenir à celle que nous venons de donner, qui dirige cet arondiſſement le mieux qu'il eſt poſſible, & qui le diminue inſenſiblement juſqu'à ce qu'il s'anéantiſſe.

Des eſcaliers tournans à vis.

La difficulté de ces ſortes d'eſcaliers conſiſte dans la façon des têtes des marches qui portent leur noyau ou leur limon, & dans le délardement du parement inférieur qu'on appelle la *coquille* ; ils ſont ſuſceptibles de cinq variations. 1°. La vis peut être ſoutenue par un *noyau plein & à plomb*, c'eſt-à-dire un pilier rond portant de fond. 2°. Par un *noyau plein* mais *rampant*, en façon de colonne torſe. 3°. Le noyau peut être ſupprimé, enſorte que la place demeure vuide, ce qu'on appelle *vis à jour* ; alors les marches ne ſont ſoutenues que par leur queue, & par une petite partie de recouvrement ſur leur longueur, continué juſqu'à la tête ſans coupe, ce qu'on appelle en *tas de charge*, terminant ſeulement la tête par une moulure continuée en hélice autour du vuide, qui doit être une ouverture d'un petit diametre, pour que cette moulure de tête étant peu inclinée en ſoit plus ſolide. 4°. Dans la même circonſtance du noyau vuide, on peut laiſſer une ouverture d'un aſſez grand diametre, en faiſant porter à chaque tête de marche une portion de limon tournant qui ait une bonne épaiſſeur, pour que chacune de ſes parties s'appuye ſur l'inférieure partie en *tas de charge* dans ſon milieu, & partie en coupe vers ſes arêtes extérieures & intérieures aux lits de deſſus & de deſſous. 5°. Enfin les marches peuvent être portées à leur tête par un limon de pieces détachées des marches, qui ſoient capables de ſe ſoutenir étant contretenues par les marches, &

de ſoutenir réciproquement les têtes de ces mêmes marches, qui s'y appuyent par des entailles.

PROBLEME XV.

Faire un eſcalier à vis quelconque.

PREMIEREMENT,

De la vis à noyau plein & à plomb.

La conſtruction des eſcaliers à vis & à noyau plein & à plomb eſt ſi facile que les moindres tailleurs de pierre l'exécutent, lorſque le parement du deſſous des marches fait un reſſaut à chaque recouvrement; mais lorſqu'il fait une ſurface continue en *coquille*, ils n'en viennent à bout qu'en tâtonnant. Les Auteurs qui ont écrit ſur la coupe des pierres n'ont point pourvu à ce trait; M. de la Rue qui en parle dans celui de la vis à jour, dit ſeulement qu'*on délardera le deſſous des marches en conduiſant la regle ſuivant les parties courbes & rampantes, enſorte qu'elle tende toujours autant que faire ſe pourra au centre de la vis*; mais il ne donne pas la maniere de tracer une courbe ſur laquelle on doit appuyer la regle par un bout, ni de faire enſorte que ſa direction par l'autre extrêmité tende au centre du noyau, ſoit qu'il ſoit plein ou vuide, quoique ce centre ou plutôt l'axe de la vis ſoit inviſible dans l'un & l'autre cas; cependant on ne peut former cette ſurface réguliérement ſi la regle n'eſt guidée par deux lignes courbes, ſur leſquelles elle doit couler dans une certaine poſition qui change de direction à chaque point de ces courbes; nous allons tâcher d'y ſuppléer.

Soit (fig. 180) une portion de tour creuſe HIK, dans laquelle eſt un eſcalier à vis, dont ABDE eſt le noyau circulaire, par le centre C duquel on imagine une ligne verticale que nous appellons l'*axe de la vis*, auquel toutes les lignes dirigées ſuivant la longueur des marches doivent tendre, comme les rayons du cercle à leur centre; telles ſont les lignes HA, IB, KD, qui expriment le plan horiſontal de deux marches. *Fig.* 180.

Il s'agit de faire le parement de deſſous de ces marches & des ſuivantes, enſorte qu'il ſoit continué ſans reſſaut d'une maniere uniforme en coquille de cette eſpece que nous pouvons

Fig. 180. appeller une surface planohélicoïde, qui differe de l'annulaire helicoïde, ou vis S. Giles, en ce que les lignes des sections de tous les plans passans par son axe sont des demi-cercles ou d'autres courbes, & qu'ici ce sont des lignes droites; cependant leurs sections par des plans ou des surfaces cylindriques, sont des lignes courbes.

La ligne de l'angle rentrant formé par la rencontre de la coquille avec la tour, est une hélice parfaite, laquelle étant une courbe à double courbure, ne peut être décrite sur une surface plane; donc on ne peut en faire la cerche sur une planche droite, mais seulement sur une portion de cylindre creuse, ou convexe: auquel cas il est bien aisé de la faire. Car si l'on développe en ligne droite l'arc de cercle HIK, qui est le plan horisontal de la portion de la tour qui porte les marches, comme en *q i*, fig. 180, & que l'on fasse en *q i* la hauteur de la marche *q h*; la ligne *h i* sera le développement de l'hélice. Si l'on coupe un morceau de madrier suivant le segment de cercle FH 2 IG convexe, & qu'on y applique le développement *q h i* tracé sur une surface flexible, comme du papier ou du carton; on y tracera la ligne *h i*, qui donnera sur la surface courbe du madrier, une ligne courbe qui sera l'hélice qu'on cherche, suivant laquelle le bois étant taillé, on aura la cerche du bout de la marche à la queue. On trouvera de même celle de la tête, qui sera beaucoup moins inclinée à l'horison, comme l'on voit en PM (fig. 183), où l'on a tracé l'une & l'autre hélice. Cette cerche ne sera pas nécessaire si l'on creuse dans la marche la portion de tour concave qu'elle occupe au-dessus du lit horisontal de sa queue, puisqu'on pourra y appliquer le triangle du développement sur une base de niveau; mais si la pierre se trouve défournie, elle sera nécessaire pour former exactement les deux extrêmités de la surface en coquille, sur lesquelles doit couler la regle qui dirige l'ouvrier pour abattre la pierre qui se trouve entre deux.

Il ne reste plus qu'à placer cette regle sur ces courbes, de maniere qu'elle tende toujours à l'axe de la vis sans tâtonner, non pas *à peu-près*, comme dit M. de la Rue, ce qui peut causer de grandes irrégularités, mais exactement, ce qui est très-facile. Car si l'on divise chacune de ces portions d'hélices extérieure & intérieure en un même nombre de parties égales, par exemple en quatre, & que l'on pose la regle de la seconde division de la grande

grande hélice à la ſeconde de la petite, de la 3ᵉ à la 3ᵉ, ainſi de ſuite; & qu'on abatte toute la pierre qui n'eſt pas en droite ligne d'un de ces points à l'autre, la regle tendra toujours à l'axe de la vis. *Fig.* 180.

Cette méthode de former la coquille eſt fort ſimple & très-exacte, cependant comme elle eſt méchanique, on peut trouver des cerches planes qui ſerviront à la former auſſi facilement entre les deux extrêmités des marches. Suppoſant qu'on veuille avoir une cerche qui paſſe par le point O, on fera du centre C un arc O*o*, qui donnera le point *o* ſur l'autre bord de la marche, par lequel on menera la droite O*o*, que l'on diviſera en tel nombre de parties qu'on voudra, comme ici en quatre aux points 2, *m*, 3, par leſquels on fera paſſer d'autres cercles concentriques *n n*, *p p*, dont on fera les développemens ſur une ligne droite, comme on voit par la répétition des mêmes lettres, à la fig. 183. Enſuite ayant porté ſur chacune la même hauteur, qui eſt celle de deux marches, on tirera l'hypoténuſe HO^d du développement, qu'on diviſera auſſi en quatre aux points *b*, M, *d*, par où on menera des petites paralleles à l'horiſontale O*k*; & par les points 2, *m*, 3 de la ligne droite de projection O*o*, qui eſt plus courte que la développée O^d, o^d on lui élevera des verticales 2 *c*, M *m*, 3 *y*, qui donneront par leur interſection avec les horiſontales *b c*, *d y* les points *c* & *y*; la ligne courbe menée par les points O *c* M *y h* ſera celle que l'on cherche. On pourra former deux cerches concaves de pareilles courbes pour chaque marche, l'une vers le collet, l'autre vers la queue, & les diviſer, comme on a dit de l'hélice, en parties égales qui donnent la poſition de la regle ſur des points correſpondans, comme de la moitié de l'une à la moitié de l'autre, &c. Cette eſpece de cerche peut être auſſi très-utile pour rectifier la coquille dans l'intervalle de deux marches qui pourroient chacune être bien faites, & cependant faire un pli ou un coude pour avoir été mal poſées.

Il y a une obſervation à faire à l'égard de la conſtruction, touchant l'épaiſſeur de la pierre qu'on deſtine pour chaque marche, c'eſt qu'elle doit être un peu plus épaiſſe qu'il n'eſt néceſſaire par la hauteur du *pas*, parce que la ſurface de la coquille faiſant des angles *a s 9*, *b s q* très-aigus avec celles des *girons a s*, *b s*, il eſt néceſſaire d'en abattre la vive-arête *Fig.* 184.

Fig. 184. par une coupe *c e* (fig. 184) qui lui donne plus de solidité, & parce que le point *q* eſt au-deſſous du niveau de *e*, il faut que la pierre ait pour épaiſſeur la hauteur *e q* de plus que celle du pas *a e*.

Il eſt viſible que cette coupe eſt plus néceſſaire vers la queue de la marche, où l'hélice eſt plus couchée, que vers le collet, où elle approche plus de la verticale, & que ſi l'on vouloit faire cette coupe dans toutes les regles, enſorte qu'elle fût toujours perpendiculaire à la ſurface gauche de la coquille, il faudroit qu'elle fût auſſi gauche; cette attention ſeroit néceſſaire ſi la coupe étoit grande, mais on la fait ordinairement ſi petite, qu'on peut négliger cette préciſion. Au reſte il y a ſi peu de difficulté à l'obſerver, qu'on peut la faire ſans contrainte; car ſi l'on trace une ligne du centre de la vis par
Fig. 180. le bord de la coupe, comme C *k* à la ſurface inférieure, ſon écartement du bord de la marche DK, qui ſe rétrecit vers le collet, donne naturellement le gauche de la coupe, il ne s'agit que d'abattre la pierre de l'une de ces lignes à l'autre, en droite ligne à la regle poſée d'équerre ſur les arêtes. Il eſt auſſi viſible que le reculement de cette coupe ſous la marche eſt arbitraire & dépendant du recouvrement que l'on veut donner à une marche ſur l'autre, lequel dans cette eſpece de vis peut être ſi petit que l'on voudra, parce que chaque marche étant portée par les deux bouts, eſt ſuffiſamment ſoutenue; il n'en eſt pas de même pour les vis à jour, comme nous le dirons ci-après.

Explication démonſtrative.

Fig. 182. Pour concevoir les raiſons des manieres de trouver les courbes de ces deux cerches, il faut ſe reſſouvenir de ce que nous avons dit au tome I, livre 3, page 400, que le développement d'une hélice étoit un triangle rectangle, dont la baſe étoit égale au développement de celle du cylindre autour duquel elle fait ſes révolutions, ſoit qu'on la conſidere en tout ou en partie. Il eſt donc évident qu'en appliquant ce triangle dans ſa ſituation naturelle ſur une ſurface cylindrique, cette hypoténuſe deviendra l'hélice même que l'on cherche. Il n'eſt pas moins évident que ſi l'on ſuppoſe la ſurface de la coquille coupée par pluſieurs autres cylindriques concentriques au noyau, & que ces ſurfaces courbes ſoient traver-

ſées par une plane parallele à l'axe de la vis, on aura pour leurs projections horiſontales les arcs de cercles *o* O, *n n*, *p p*; & la corde *o* O, qui les coupe aux points 2, *m*, 3, y donne les projections des ſections du plan qui coupe pluſieurs cylindres parallelement à leur axe, leſquelles ſont par conſéquent des lignes droites verticales qui ont chacune un point commun avec l'hélice à la ſurface de la coquille, dans chaque cylindre & dans le plan qui les coupe tous: *ce qu'il falloit démontrer.* *Fig.* 180.

A l'égard de la maniere de placer la regle ſur des diviſions de parties proportionnelles, il eſt clair qu'à chaque diviſion les deux hélices ſeront parvenues à même hauteur, par conſéquent que la regle qui y ſera poſée aura pris une ſituation de niveau à l'égard de la vis. Premiere condition pour la formation de la coquille. Secondement, qu'elle ſera dirigée à l'axe, puiſque les arcs horiſontaux de ſa projection ſont proportionnels. Seconde condition eſſentiellement requiſe à la vis circulaire. Si le noyau & la tour dans laquelle eſt la vis étoit elliptique, au lieu d'être circulaire, il arriveroit de grandes inégalités aux girons des marches, ſi on les dirigeoit à l'axe qui paſſeroit par le centre de l'ellipſe; c'eſt pourquoi leur direction doit être priſe par des parties égales en nombre dans chaque quart d'ellipſe de celle de la tour à celle du noyau: c'eſt le ſeul changement qu'il y ait à faire dans la conſtruction.

Seconde variation.

Faire une vis à noyau rampant.

Soit (fig. 182), le cercle A c^2 B, le plan horiſontal de la place qu'occuperoit un noyau plein, comme à la fig. 180; on fera un ſecond cercle CDE, dont le centre c^1 ſera à la circonférence du premier, & de tel diametre qu'on jugera à propos, car on peut le faire plus petit ſi l'on veut laiſſer un vuide, mais alors il ſe changeroit en *vis à jour*. Ayant tiré du centre C par le centre c^2, la ligne CR pour le milieu d'une marche, on en fera le *plan f* 3 2 *e* pour le giron, ajoutant ſur le derriere une partie GT 3 *f* pour le recouvrement de celle qui ſuit, & au devant une petite avance en H avec un dégagement d'un cavet, ſi l'on veut, & l'on fera un panneau de *Fig.* 182.

Fig. 182. la figure CDGT 2 H *e* E C, qu'on appliquera ſur la pierre pour en tracer le lit de deſſus, où l'on aura ſoin de laiſſer une avance de pierre qui l'excede en EF; enſuite on fera par deux retours d'équerre, au point C & au point 2, des lignes qui paſſent du lit de deſſus à celui de deſſous, pour y pouvoir appliquer le même panneau, mais dans une poſition différente; on poſera bien le point C de ce panneau ſous le point C du lit de deſſus, mais on poſera le point 3 ſous le point 2, de ſorte qu'il aura changé ſa 1re ſituation en celle de la marche inférieure C I *e* 2 *i h* FC. Dans cet état on tracera le contour IHFC, & l'on abattra la pierre d'un de ces cercles à l'autre, ce qui formeroit une portion de cylindre ſcalene, ſi on l'arondiſſoit à la regle ſur ſes côtés; mais parce que c'eſt une portion de cylindre hélicoïde ſemblable à une colonne torſe, il faut trouver une cerche qui puiſſe marquer la courbure de ſes côtés; nous choiſiſſons ici DE iſſu du point D, milieu du demi-cercle CM, comme le plus ſaillant & le plus propre à guider le tailleur de pierre.

On portera à part la longueur de l'arc DI, qu'on developpera ſur la droite *d i*; ſur le point *d* on lui élevera la perpendiculaire *d* D², & l'on tirera D² *i*, qui ſera l'hypoténuſe du triangle rectangle, & le développement de l'hélice qui ſe fait ſur le noyau en DI de la baſe ſupérieure à l'inférieure du cylindre hélicoïde; ainſi ayant arondi un morceau de planche, ſuivant l'arc DI, en portion de cylindre, on y appliquera le triangle *d* D² *i* tracé ſur une matiere flexible comme du carton, ſuivant lequel on tracera la courbe qu'on doit appliquer au milieu du noyau, de laquelle on fera deux cerches différentes, l'une convexe, que l'on poſera entre les points D repairés au lit de deſſus, & I au lit de deſſous qui ſera concave, & l'autre concave ou creuſe, que l'on poſera entre les points E & F repairés, l'un au lit de deſſus comme E, l'autre au lit de deſſous F, parce que ce côté eſt un peu convexe ſuivant la direction EF.

Comme les arcs DI & EF, qui ſont les baſes de la ſurface de cylindre dans laquelle ſe trouve l'hélice que décrit le côté du noyau en vis, ſont très-peu différens de la ligne droite, il arrive que l'hélice eſt auſſi très peu différente de la ligne droite de l'hypoténuſe D² *i*; de ſorte que les ouvriers mépriſent cette différence, parce qu'elle eſt peu ſenſible en œuvre : ils en ſont quittes pour quelques ragrémens. C'eſt apparemment

par cette raiſon que le P. Derand n'en a pas parlé, mais il fait paroître dans ſa maniere de trouver la courbe des ornemens de la vis à jour, qu'il n'a pas bien entendu cette matiere, puiſqu'il donne une fauſſe méthode pour trouver ces cerches, de même que M. de la Rue dans le quartier de vis ſuſpendu, qu'il exécute par la même fauſſe méthode. *Fig.* 182.

Ce n'eſt pas aſſez d'avoir fait une tête de marche pour bien conduire le noyau rampant, il faut être guidé par des cerches à plomb pour redreſſer les petites fautes qui peuvent ſe faire dans l'exécution d'une portion du noyau; c'eſt pourquoi il convient d'en faire un profil, & même deux pris ſur des baſes qui ſe croiſent à angle droit dans la projection horiſontale, comme en H *g* & LK. Soit, par exemple, la longueur LK du grand diametre du cercle de révolution tranſporté en F *m*, à la fig. 181 ; on décrira du milieu C le demi-cercle $r s c^a$, qu'on diviſera en autant de parties égales qu'il y aura de girons de marches dans ſon contour, par exemple en 8, & par ces points de diviſion 1, 2, 3, &c. on menera des paralleles à la ligne du milieu CX, qui repréſenteront les changemens de poſition de l'arc ou centre du noyau vis à-vis chaque marche.

On portera enſuite ſur cette verticale du milieu CX, les hauteurs des marches en montant aux points 1, 2, 3, &c. par leſquels on tirera des horiſontales *n m*, *n m*, qui couperont les verticales qu'on vient de tracer aux points 1^a, 2^a, 3^a, &c. qui ſeront les milieux du noyau; à côté deſquels ſi l'on porte de part & d'autre ſon demi-diametre $c^a\ m$, on aura d'un côté les points *m*, *m* aux collets des marches, & de l'autre les points *n*, *n*, par leſquels on tracera avec une regle pliante les courbes égales *m m m*, & C *n n n*, qui ſeront les projections verticales des courbes à double courbure en hélices qui paſſeroient par les attouchemens du noyau avec des perpendiculaires aux diametres *n m*, *n m*.

Ainſi faiſant une cerche concavo-convexe ſur ces courbes, on pourra la poſer à plomb ſur la ligne FC, dans la partie du vuide ſous le noyau, & dans la ſituation où la courbe doit être, par le moyen d'un à plomb *n r*; puis faiſant couler une équerre horiſontalement ſur les prolongations des lignes *m n* tracées ſur la cerche, on verra ſi le noyau penche trop ou ne penche pas aſſez. Il faut remarquer que cette cerche ne peut ſervir qu'à l'endroit pour lequel elle a été faite, parce que la courbe

C $6''$ eſt concave depuis C en n^4, où il faut que la cerche ſoit
Fig. 182. convexe, & au deſſus où cette courbe devient convexe, la cerche au contraire doit être concave.

Explication démonſtrative.

Si l'on ſuppoſe une hélice cylindrique d'un diametre égal à la ligne AB, dont l'axe eſt vertical, ſur le centre C, la projection horiſontale de cette hélice ſera le cercle ABN. Suppoſant encore un cercle horiſontal DMEC, d'un diametre égal à AB, & qui ſoit enfilé par ſon centre dans l'hélice, comme un morceau de carton dans un *tireboure*, ſi l'on fait mouvoir ce cercle en l'élevant au long de cette hélice, enſorte qu'il conſerve ſa ſituation horiſontale, il décrira par ce mouvement un corps hélicoïde que l'on appelle une *colonne torſe*, laquelle ſert de noyau à notre eſcalier à vis. Il eſt évident, par cette génération, que ce corps hélicoïde tournant autour du centre C de la projection, eſt traverſé du haut en bas par la ligne droite verticale qu'on peut ſuppoſer élevée ſur ce point C, ſans qu'elle entre dans ce corps. D'où il ſuit que ſi le rayon du cercle générateur DHC étoit plus court que celui de l'hélice CA ou CB, le corps hélicoïde laiſſeroit un vuide au milieu, dans lequel on pourroit introduire un corps cylindrique, qui auroit pour axe la verticale ſur le point C, & qui ſeroit plus ou moins gros, ſuivant la différence qu'il y auroit entre le rayon c^2 D du cercle & CA de l'hélice. Si au contraire le diametre ou le rayon du cercle générateur c D étoit plus grand que le rayon de l'hélice AC, le corps hélicoïde ſeroit fermé dans ſon milieu, c'eſt-à-dire qu'on n'y pourroit introduire aucune ligne droite.

D'où il ſuit que les noyaux tournans & rampans peuvent être variés d'une infinité de façons. 1°. Par l'hélice centrale, je veux dire dans laquelle paſſe le centre du cercle générateur, laquelle peut être plus ou moins ouverte, c'eſt-à-dire d'un plus grand ou d'un plus petit diametre AB dans ſa projection horiſontale. 2°. En ce qu'elle peut être en cylindre circulaire, ou cylindrique elliptique. 3°. En ce qu'elle peut changer d'ouverture du bas en haut, comme ſi elle étoit conique, c'eſt-à-dire deſcriptible ſur la ſurface d'un cône. 4°. Enfin en ce qu'elle peut s'ouvrir inégalement, comme ſi elle étoit ſphéroïde,

c'eſt-à-dire, qu'elle pût être décrite ſur la ſurface d'un ſphéroïde. Secondement, le corps hélicoïde peut varier par la grandeur du cercle générateur, en ce que la longueur de ſon rayon rend le corps hélicoïde plus ou moins délicat ou maſſif, plus ou moins ouvert ou fermé dans ſon milieu conſidéré verticalement. *Fig.* 182.

Préſentement, ſi au lieu du cercle générateur c^2 D, nous conſidérons que ſon diametre HC, qui ſe meut en s'élevant dans une ſituation horiſontale ſur l'hélice, en conſervant toujours ſa direction au centre, ou plutôt à l'axe vertical, on reconnoîtra (ſuivant ce qui a été dit au corol. II de la page 42 du ſecond tome) que tous les points de cette ligne génératrice forment (en tournant ſuivant ces conditions) autant d'hélices différentes, dont les plus éloignées du centre C ſont les plus inclinées à l'horiſon, & au contraire les points qui en approchent le plus décrivent les hélices plus droites; enſorte que celle qui eſt formée par le point C eſt infiniment peu courbe, c'eſt-à-dire qu'elle dégenere en une ligne droite verticale, qui eſt une tangente aux révolutions du corps hélicoïde. D'où il ſuit qu'on ne peut faire uſage des panneaux de développement pour ce noyau, comme on a fait pour la vis Saint-Giles, parce que dans celle-là il ne s'agit que de quelques hélices diſtinctes & ſéparées les unes des autres. Ici ce ſont celles qui ſe forment par les points du contour d'un lit circulaire, de ſorte que l'on ne peut faire que quelques cerches de projection verticale, comme nous avons fait, leſquelles ne ſont pas toujours immédiatement applicables à la ſurface du noyau, mais ſeulement propres à diriger les ſaillies des tambours par des perpendiculaires tirées ſur le contour de la cerche. Cependant lorſque le corps hélicoïde eſt fermé dans ſon milieu, comme le ſont ordinairement les colonnes torſes, on peut faire des cerches applicables dans le plan de l'axe vertical de la colonne, & cette précaution convient très-fort pour une exacte exécution.

On voit en Alſace beaucoup de ces ſortes d'eſcaliers à noyaux rampans dans les anciennes maiſons des particuliers, au milieu deſquels on fait pendre une corde pour s'y appuyer, parce que ce noyau eſt trop gros pour qu'on puiſſe l'empoigner; mais cette précaution, qui eſt bonne, devient inutile pour les gens un peu délicats ſur la propreté, qui ont de la

répugnance à porter la main ſur une corde graſſe & dégoûtante.

Corollaire.

Delà on peut tirer la méthode de *faire la colonne torſe*, qui n'eſt autre choſe qu'un noyau rampant & tournant, dont les révolutions ſont un peu plus ſerrées & fréquentes que dans les limons d'eſcaliers, qui ne font guere plus d'une révolution & demie à chaque étage, au lieu que la colonne torſe en fait au moins 6, ou 6 & demie dans la hauteur de 7 ou 8 des diametres de ſa projection. D'où il ſuit que les révolutions des vis d'eſcaliers étant fort écartées, le noyau devient une colonne fort peu torſe. Ce noyau differe auſſi de la colonne torſe, en ce que ſes ſections horiſontales ſont des cercles dont les projections ſe touchent, comme on voit les cercles C *g* & CH ſe toucher en C, au lieu que ceux des projections des ſections horiſontales de la colonne torſe ſe croiſent le plus ſouvent des trois quarts de leur diametre.

Ainſi on peut conſidérer les noyaux rampans des vis, à l'obliquité près, comme une pile de dames à jouer, tournant autour d'une ligne à plomb; mais la même comparaiſon ne convient pas toujours & à toutes ſortes de colonnes torſes, parce que lorſque les révolutions ſont inégales, leur diametre changeroit non-ſeulement dans la projection mais auſſi dans l'élevation. C'eſt pourquoi il faut les conſidérer comme une ſuite de boules, par exemple, des grains de chapelets enfilés dans un tireboure, que l'on couvriroit enſuite d'une ſurface courbe tangente à ces boules, ce que l'on verra plus clairement lorſque nous parlerons des colonnes torſes à révolutions inégales, dont nous donnerons un exemple ſingulier, plutôt pour la curioſité que pour en conſeiller l'uſage.

On peut encore conſidérer la colonne torſe comme la trace du mouvement d'un cercle enfilé dans une hélice par ſon centre, ſuppoſant le plan de ce cercle toujours perpendiculaire aux parties infiniment petites de cette hélice, au lieu que nous l'avons ſuppoſé de niveau, pour la génération de notre noyau de vis tournant & rampant. D'où il ſuit que les ſections horiſontales de la colonne torſe formée par cette génération, ne ſont plus des cercles comme dans notre noyau tournant, mais des ovales plus ou moins alongées, ſuivant l'obliquité de l'hélice

à

à l'égard de l'horiſon. C'eſt pourquoi lorſqu'on veut faire l'élevation d'une colonne torſe, après avoir tracé l'hélice centrale, il faut décrire pluſieurs cercles égaux au long de cette hélice; les courbes tangentes menées par les extrêmités de leurs diametres, donneront en projection verticale les contours de la colonne torſe, comme l'on voit à la fig. 207, plan. 108.

De la vis à preſſoir.

Nous joignons ici le trait de la vis ſimple avec celui de la colonne torſe, parce que c'eſt le même dans le fond, qui ne differe qu'en ce que les *pas* de la vis ſont des angles rentrans & ſaillans, dont les ſections par l'axe ſont rectilignes, & que les intervalles des révolutions de la colonne torſe coupée par ſon axe, ſont des courbes ondées rentrantes & ſaillantes, dont les points d'inflexion ſont rangés ſuivant une hélice, qui eſt la même que celle du ſommet des angles de la vis, ſoit dans le rentrant, ſoit dans le ſaillant. A l'égard du plus ou moins de révolutions, ce n'eſt qu'une différence accidentelle qu'on ne doit pas compter.

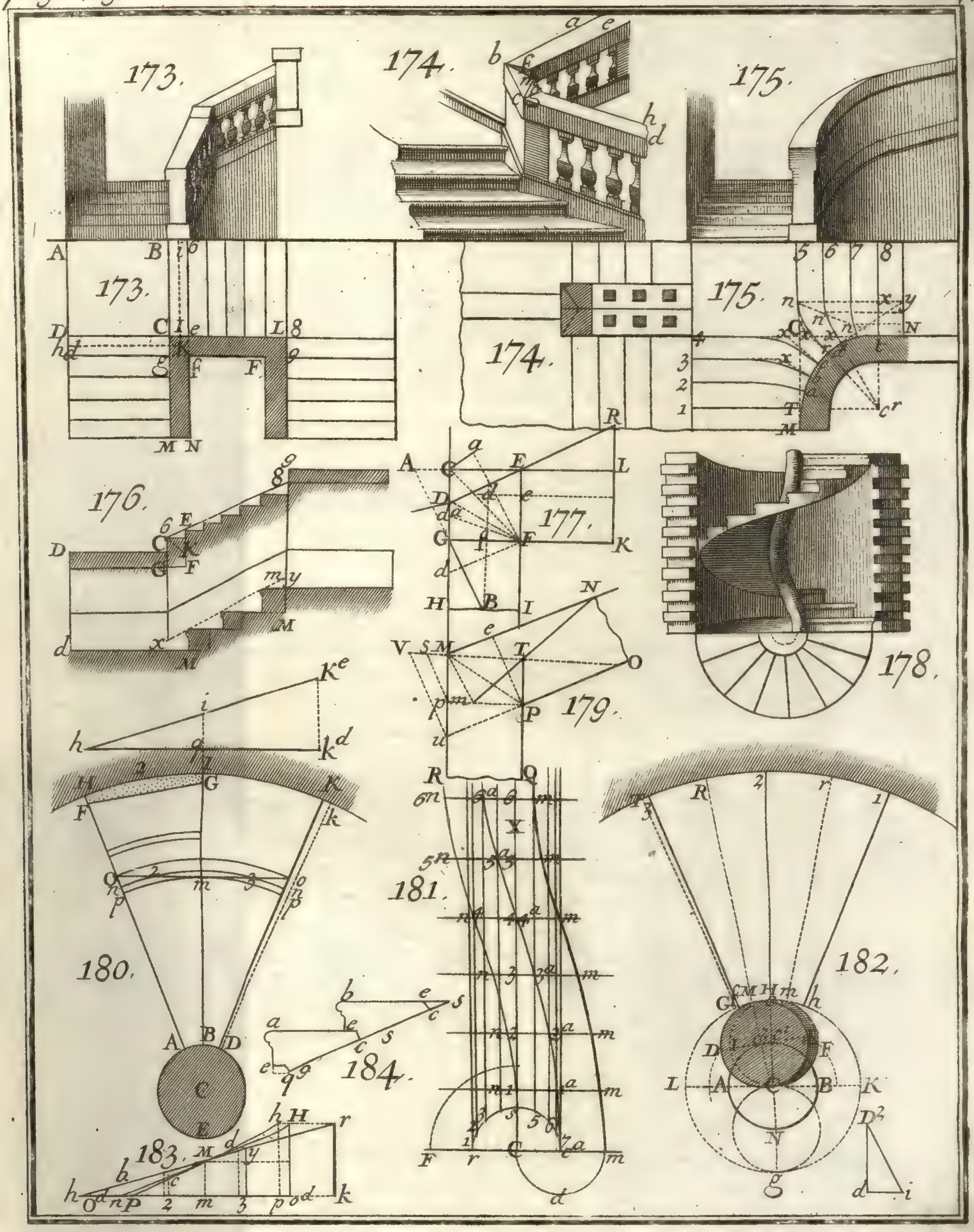
Pratique du trait pour toutes ſortes de vis.

On commencera par faire un corps cylindrique, s'il s'agit d'une vis ou d'une colonne ſans diminution, & pour une colonne torſe, on fera un corps conoïde tel que les Architectes le demandent pour les colonnes unies diminuées depuis le tiers de leur hauteur, ou renflées dès le bas juſqu'au tiers & diminuées au-deſſus, dont le diametre ſera réglé par la proportion qu'il doit avoir avec la hauteur de la colonne, comme d'un ſeptieme ou d'un huitieme de cette hauteur, & par la meſure que l'on veut donner à l'écartement de chaque révolution de la colonne, à l'égard de l'axe droit qu'on ſuppoſe dans ſon milieu.

Soit pour exemple, un cylindre *ab* I F (fig. 184, ✠ pl. 105) dont le plan horiſontal ou la ſection perpendiculaire à l'axe *x* X eſt le cercle ALBK, dont le diametre eſt AB & le centre C; on diviſera le rayon AC en trois ou en quatre parties, pour faire du centre C un cercle avec le rayon DC, quart du rayon AB, ou de ſon tiers, ſuivant que l'on voudra que la Plan. 105, *Fig.* 184.

Fig. 184 ✠. colonne ſoit plus ou moins torſe. On diviſera ces deux cercles concentriques en un certain nombre de parties à volonté, par exemple en huit, par quatre diametres AB, *n n*, LK, *m m*, & par les points A, *m*, L, *n*, B, &c. on menera ſur la ſurface cylindrique autant de paralleles à ſon axe (par le problême XXX du II livre, page 253 du tome I,) enſuite on diviſera la hauteur AF en ſix ou ſix & demi, pour former autant de révolutions, & parce que le contour de la baſe a été diviſé en huit parties égales, on diviſera auſſi l'intervalle *a* 1 en huit parties égales, & le tout par conſéquent en 48, & commençant à l'axe ſur la projection, & à une parallele ſur le relief, on portera ſucceſſivement ſur chacune de ſes paralleles à la circonférence du cylindre une de ces diviſions de plus qu'à l'autre, par exemple, une ſur la premiere, deux ſur la ſeconde, trois ſur la troiſieme, ainſi de ſuite; & l'on aura une hélice qui fera ſix révolutions dans quarante-huit parties de hauteur, ou ſix & demi en 52. On tracera par parties cette courbe avec une regle pliante de point en point ſur la ſurface cylindrique; & dans la projection verticale ou profil de l'épure, on tracera l'hélice, du milieu des points de laquelle, comme centre de chaque ſection circulaire, on tirera à droite & à gauche des lignes égales, qui repréſentent les demi-diametres de ces ſections, leſquelles donneront les points de la courbe extérieure des deux côtés, qu'on tracera à la main. Cette courbe du profil étant conſidérée comme le contour d'une ſection plane de la colonne torſe coupée ſuivant ſon axe, ſervira à former une cerche pour la tailler dans la pierre ou dans le bois.

Si la colonne étoit ſans diminution, la cerche d'une ſeule révolution ſuffiroit; mais ſi elle eſt diminuée ou renflée, cette cerche doit être taillée dans une planche de toute la hauteur de la colonne, parce que les contours de chaque révolution ſont inégaux entre eux, les uns plus écartés de leur axe, & les autres moins; de ſorte que la colonne torſe des Architectes n'eſt pas une ſurface hélicoïde proprement dite, qui eſt compoſée d'hélices, mais en limace double, dont les révolutions depuis le tiers de la hauteur en haut & en bas ſe reſſerrent de plus en plus, ſuivant une progreſſion qui eſt celle des ordonnées à l'axe de la conchoïde de Nicomede, comme l'a trouvé M. Blondel, ſuivant laquelle on formera le corps conoïde qui ſert


173.
174.
175.
176.
177.
178.
179.
180.
181.
182.
183.
184.

de préparation pour contourner & creuſer les ondulations des révolutions de la colonne torſe, comme on peut le voir dans les livres d'architecture, particulierement dans le cours d'architecture de d'Aviler.

L'application du trait ſur le bois ou ſur la pierre, dont on fait la colonne torſe, ne conſiſte qu'à tracer des lignes qui ne ſont pas paralleles à l'axe, puiſqu'elle eſt diminuée depuis ſon tiers en haut, & ſouvent encore depuis ſon tiers en bas, ſi elle eſt renflée, mais qui ſont dans une ſection par l'axe ; de ſorte qu'il faut que les diametres ou rayons qui aboutiſſent à ces lignes dans la baſe ſupérieure & dans l'inférieure, ſoient dans un même plan, ce qui ſe fait, comme nous l'avons dit au probl. I de ce livre, en bornoyant avec deux regles qu'on place l'une à l'égard de l'autre de maniere qu'elles ne ſe croiſent pas ; après quoi avec une regle pliante, on trace des lignes courbes d'une baſe à l'autre, ſuivant leſquelles ayant fait le tracé du contour de l'hélice, comme nous l'avons dit, on creuſe le bois ou la pierre, de maniere que la cerche du contour de la ſection par l'axe s'y puiſſe appliquer exactement, tenant toujours le plan de cette cerche dans une direction qui tend à l'axe, ce qui eſt facile à faire, puiſqu'il n'y a qu'à poſer ſur les baſes de deſſous & de deſſus de la colonne, des regles dégauchies paſſant par les centres de ces baſes, & ajuſtant la planche dans laquelle on a coupé la courbe de la cerche, ſuivant ces deux regles.

Par ce moyen on peut ſe diſpenſer de faire *un modele en grand* pour guider les appareilleurs, comme le demande d'Aviler ; car il leur eſt impoſſible de ſe tromper s'ils font autant de cerches que de ces paralleles, c'eſt-à-dire des courbes à la ſurface du noyau qui eſt un fuſt en cylindroïde, leſquelles ſont des ſections par l'axe, ce qui n'eſt pas fort difficile ni fort embarraſſant ; car ſi l'on en fait 8, ce ſont 8 planches à contourner ſur des profils différens. Le ſeul cas où les modeles en grand ſont néceſſaires, c'eſt lorſque la matiere eſt précieuſe comme du marbre, & que les creux de la colonne ſont remplis d'ornemens, comme de ſeps de vignes rampans avec leurs feuilles & fruits. L'exécution de ces ſortes de colonnes eſt aſſez fréquente en France, mais encore beaucoup plus en Eſpagne & en Portugal, où l'on voit dans toutes les Egliſes de ces colonnes ainſi ornées de vignes, mêlées

ſouvent avec des épis de bled, pour ſervir de ſymboles de l'Euchariſtie. Quoiqu'on ne puiſſe trop décorer la maiſon du Seigneur, on peut dire que la ſimplicité des égliſes des premiers ſiecles, n'admettant point toutes ces choſes qui amuſent les yeux, étoit ſelon moi beaucoup plus majeſtueuſe, & plus propre à inſpirer le recueillement ſi néceſſaire à la priere.

Troiſieme variation.

De la vis à jour, ou à noyau vuide.

Lorſqu'on veut ſupprimer le noyau d'un eſcalier à vis, il faut conſidérer quelle eſt la grandeur de l'ouverture horiſontale qui doit reſter à la place qu'il auroit occupé, & ſuivant la grandeur de cette ouverture, il faut opérer différemment pour ſuppléer à l'appui qu'il auroit donné aux têtes des marches.

Premiere eſpece de vis à jour.

Lorſque le vuide du noyau eſt d'un petit diametre, comme depuis 4 juſqu'à 8 ou 10 pouces, on peut ſuppléer à l'appui qu'il auroit donné aux têtes des marches par un petit élargiſſement de la tête qu'on orne d'une groſſe moulure pratiquée dans la même pierre en ſaillie, comme elle eſt repréſentée à la fig. 187 en perſpective; par ce moyen chaque marche eſt appuyée par les deux bouts; ſavoir, à la queue dans la muraille de la tour où elle eſt engagée, & du côté du vuide ſur la ſaillie de la moulure, qui forme un limon, dont les parties adhérentes à la marche ſont poſées les unes ſur les autres en *tas de charge* ſans coupe, parce que l'hélice que forment ces moulures étant fort rapide, je veux dire, approchant beaucoup de l'aplomb, ne forment pas des angles trop aigus avec les lits horiſontaux des têtes des marches, ce qui n'arrive pas de même lorſque le diametre du vuide eſt fort grand, parce qu'alors les hélices deviennent plus inclinées à l'horiſon, avec leſquelles elles font par conſéquent des angles plus aigus. *Fig. 187.*

Ainſi il faut conſidérer chaque marche comme compoſée de deux parties dans une ſeule piece de pierre; ſavoir, de la marche compoſée de *pas* vertical & de giron horiſontal, qui

doivent faire de continuels ressauts, & du limon tournant qui ne doit point faire de ressaut, mais une suite continuée au travers du vuide triangulaire du ressaut que fait le giron d'une marche avec le *pas*, ou contre-marche de l'autre; cela supposé. Soit (fig. 185,) le cercle ABN, la projection horisontale du vuide que l'on veut laisser au milieu de l'escalier à vis à la place que devoit occuper le noyau. On fera le panneau de la marche avec les ornemens de moulures qui doivent composer le limon, dans lesquelles il faut ménager un gros tore ou boudin rond, pour qu'on y puisse couler la main lorsqu'on veut s'appuyer en montant ou en descendant, & pour dégager ce boudin il convient qu'il y ait à côté un grand cavet qui marque le collet de la marche où doit se terminer la partie verticale du pas ou contre-marche, laquelle est aussi ornée d'un quart de rond sur son arête qui vient finir à ce cavet, comme l'on peut voir à la figure 187, en perspective. Planch. 105. *Fig.* 185.

Le panneau étant fait comme il convient à la grandeur de la cage & au nombre des marches de chaque révolution, & la pierre étant jaugée de l'épaisseur qu'exige la hauteur de chaque *pas*, on le posera sur le lit de dessus, c'est à dire sur le giron pour en tracer le contour, comme en POED; on fera en même tems, par un retour d'équerre, sur le point E, un repaire au lit de dessous, où il servira pour y poser le panneau après qu'on aura renversé la pierre; on en usera de même au point O. Dans cette seconde situation, on posera le panneau d'une maniere différente de la premiere, en plaçant le point P sous le point O, c'est-à-dire sur le repaire qu'on vient de faire par un retour d'équerre à ce point, & le point D sous le point E, ou ce qui est la même chose sur son repaire, & dans cette situation du panneau on tracera la tête EF plus avancée que la premiere DE de l'intervalle d'une marche à son collet, laquelle avance se prend dans l'espace triangulaire OFE que forme le rétrecissement de la marche OE. *Fig.* 185.

La pierre étant ainsi tracée, on abattra toute la partie comprise dans le triangle OH *n*, pour former à l'équerre sur le giron le pas de la marche & sa moulure, laissant la partie EF saillante au-delà, dans laquelle jointe à la précédente DE, on creusera à l'équerre sur les lits la partie concave DEF par le moyen d'un cercle formé sur le demi-cercle AEB. Ensuite ayant rectifié l'arc de cercle EF, on le portera à part

Fig. 185. en *e f*; puis ayant fait *e i* perpendiculaire ſur le point *e*, & égale à la hauteur donnée d'une marche, on tirera l'hypoténuſe *i f* qui ſera le développement de l'hélice que forme le limon depuis le lit de deſſus juſqu'au lit de deſſous : ainſi on tracera ce triangle ſur du carton pour être appliqué & plié dans le creux cylindrique de la tête, afin qu'on puiſſe tracer l'hélice qui s'y forme au filet de la moulure, & par ce moyen les autres hélices des moulures paralleles au-deſſus & au-deſſous de celle-ci, ou plutôt en avant & en arriere. Il eſt viſible que cette conſtruction changeroit un peu ſi la projection horiſontale du vuide du noyau étoit elliptique au lieu de la circulaire que nous avons ſuppoſé, en ce qu'il faudroit changer autant de fois la tête du panneau qu'il y auroit d'avance de limon, au lieu que dans le cas du vuide circulaire, il ſuffit de le renverſer & de l'avancer; c'eſt un avertiſſement que le P. Derand & M. de la Ruë ont obmis.

Il ſe préſente une difficulté dans la ſuite de ces têtes, lorſque l'on fait quelques paliers. La premiere eſt la difformité des jarrets qui s'y font, parce que l'intervalle horiſontal d'un giron au ſuivant étant plus grand que les autres, le limon qui paſſe d'une arête à l'autre n'eſt pas continué d'une maniere uniforme, mais il devient plus couché au palier, ſelon le plus ou le moins de largeur de ſon giron. D'où il réſulte un autre inconvénient, c'eſt que l'arête du lit inférieur devient trop aiguë, & par conſéquent ſujette à ſe caſſer. Pour remédier au jarret, on ſe prépare de loin à le corriger ; au lieu de n'avancer la tête qui fait ſaillie au-devant de la contre-marche que de la largeur du collet du giron, on la fait avancer un peu davantage, par exemple, d'une ſixieme partie de plus, ſi l'on veut racheter l'excès du collet du palier ſur ſix marches, tenant toujours cette tête à la circonférence du cercle du vuide de la vis, & pour cet effet on le guide par des diviſions ſur la queue, qui correſpondent à celles de la tête, pour avoir des rayons qui tendent également au centre. Il eſt cependant vrai que ces précautions ne font que pallier & diminuer un peu la difformité du jarret qu'on ne peut effacer totalement. D'où il ſuit que ſi l'on aime la perfection & l'uniformité, on ne doit pas faire de paliers à ces ſortes d'eſcaliers.

Remarque ſur l'uſage des eſcaliers à vis à jour, & des autres à noyaux pleins.

Lorſqu'on a peu d'eſpace pour pratiquer un eſcalier, on doit préférer la vis à jour à toutes les autres, parce que l'on gagne la place qu'occuperoit un noyau, laquelle donne une grande aiſance au paſſage des corps à la hauteur des coudes & des épaules; mais il ne convient pas que le diametre du vuide ſoit un peu grand, parce qu'il inſpire de la frayeur de tomber au travers, au cas que l'on vienne à faire un faux pas. Ce que j'ai vu de plus petit, mais de plus parfait en ce genre d'ouvrage, ſont les petits eſcaliers de marbre qui montent dans les piliers de la nef de S. Jean de Latran, à Rome, qui ont pour limons des moulures à peu-près comme celles de ce profil, ſur leſquelles on coule la main pour s'appuyer. Quoique dans les noyaux rampans il n'y ait aucun vuide à plomb, on y eſt encore moins exempt de la frayeur d'y tomber qu'aux vis à jour, parce qu'ils ne préſentent point de ces moulures pour appui, mais un corps rond & trop gros pour qu'on puiſſe l'empoigner: ainſi ils ont le défaut du noyau vuide ſans en avoir l'agrément, qui conſiſte à voir du haut en bas tout l'eſcalier, par le moyen de cette petite ouverture en forme de puits.

Seconde eſpece de vis à jour.

Où les têtes des marches forment un limon propre à porter une rampe de fer.

Lorſque les vis à jour ſont ouvertes au milieu de plus de 9 à 10 pouces de diametre de noyau vuide, & que les marches ſont plus longues que trois pieds, on ne peut ſe garantir de la peur & même du danger de tomber par cet intervalle vuide, ſans une rampe de fer, qui ſert d'appui & de garde-fou. Alors au lieu de faire le limon en boudin rond, comme au trait précédent, il faut le faire plat par-deſſus pour y aſſeoir la rampe ou baluſtrade, & une tête à plomb aſſez épaiſſe pour lui ſervir de baſe & de ſoutien au collet des marches, qui en ont plus beſoin qu'aux petites vis à jour, parce que

les hélices des limons ſont néceſſairement plus couchées, dans le rapport des diſtances des limons à l'axe vertical de l'hélice, les hauteurs des marches, qui ſont preſque toujours les mêmes, étant ſuppoſées égales dans l'une & dans l'autre grandeur de vis à jour. De cette différence d'inclinaiſon des limons, il ſuit auſſi que les angles de leurs ſections horiſontales, c'eſt-à-dire des lits avec le parement rampant, deviennent auſſi beaucoup plus aigus que dans les petites vis, où le limon eſt fort près de l'axe vertical ſuppoſé au milieu du vuide; de ſorte que ces angles n'auroient aucune force ſi on poſoit les têtes des marches en tas de charge par lits de niveau. Pour remédier à cette foibleſſe d'arête, on eſt obligé de les tailler en coupe perpendiculaire à la face ſupérieure du limon, ce qui en fortifie encore la conſtruction, en ce que cette portion de coupe empêche la tête de la marche de ſe dégager en gliſſant ſur le devant ou ſur le derriere de ſon lit.

Aux deux différences de conſtruction dont nous venons de parler, on en peut ajouter une troiſieme, qui conſiſte en ce que dans les petites vis à jour on donne peu de recouvrement aux girons des marches, parce qu'on laiſſe paroître les reſſauts qui ſe font d'une marche à l'autre au parement inférieur, qu'on appelle la coquille. Mais dans les grandes vis à jour ornées de baluſtrades, il convient de faire enſorte que la ſurface de la coquille ſoit ſans reſſauts, comme aux deux eſcaliers de la chapelle de Verſailles, ce qui occaſionne un grand recouvrement ſur les girons, qui s'élargit depuis le collet à la queue en raiſon de leur diſtance du milieu du vuide, comme on va le montrer dans le trait.

Fig. 188. Soit (fig. 188) le demi-cercle AFB, la projection horiſontale du vuide de la vis, dont la circonférence a été diviſée en un certain nombre de parties égales pour régler la largeur des marches, à commencer où l'on juge à propos, par exemple ici aux points 1, 2, 3, 4, 5, 6, par leſquels on tirera du centre C les lignes 3 Z, 4 Z, 5 Z, 6 *r^e*, &c. juſqu'au mur de la cage, qu'on peut ſuppoſer de telle figure qu'on voudra, ronde, quarrée, ou à pans; nous n'en mettons ici qu'une partie pour marquer ſeulement leurs directions, qu'il eſt aiſé de prolonger dans le rond ou dans le quarré, &c. On déterminera enſuite l'épaiſſeur qu'on veut donner au limon, comme 6 D, pour en marquer

marquer le côté intérieur par un arc de cercle DL 12, concentrique au cercle AFB, lesquels arcs comprendront sa partie supérieure, sur laquelle doit se poser la balustrade ou le garde-fou. Mais comme il convient de faire la partie inférieure de ce limon plus large, pour lui donner plus de solidité, on en déterminera la largeur par un arc concentrique plus éloigné du centre C, comme *d x* TV, sur lequel on réglera le recouvrement d'une marche sur l'autre tel qu'on le jugera convenable, observant qu'il contribuera d'autant plus à la solidité de l'escalier qu'il sera grand, parce qu'il élargira la queue de la marche qui porte dans le mur, & la largeur du limon à sa tête. Supposant le recouvrement déterminé environ de la moitié du giron 1, 2, au point *x*, on tirera du centre C la droite R *x g*, qui sera le bord supérieur du derriere de ce recouvrement. *Fig.* 188.

Il s'agit à présent de faire le panneau de la tête du limon, qui comprend deux girons, & le recouvrement d'une marche sur l'autre, c'est-à-dire les arcs FR & F4, qu'on suppose ici égaux, prenant le point F pour le milieu. Ayant pris à volonté le point H sur la ligne CF, on lui tirera une perpendiculaire indéfinie GHI, & ayant porté de H en O la hauteur d'une marche, on lui menera une parallele PM par le point O, ensuite on développera l'arc FR sur la droite HG qu'on lui fera égale, & qu'on portera aussi de O en M; de même l'arc F 5 de H en I & de O en P; le rhomboïde GPMI sera le développement de la surface concave de la tête de la marche qui porte son limon, depuis l'arête du pas inférieur 5 3*q* jusqu'à celle du pas supérieur 6 *d r*[c]. Mais parce que l'on veut, pour augmenter la solidité & la beauté, que ce limon excede les arêtes des marches, & fasse un socle dessus & un ressocle dessous, on y ajoute une longueur de coupe perpendiculaire au limon en IK pour le dessus, & en GS pour le dessous, par l'extrémité de laquelle longueur on mene des paralleles KN, SQ, qui donnent pour l'un & l'autre les rectangles MK, QG. Du point G, on abaissera une perpendiculaire sur S*f* ou sur GI sa parallele, qui coupera la ligne S *f* en *r*; l'on portera S *r* en R *s* & en *p q*, & même en 5 *k* & en 4 *n*, si l'on fait le socle supérieur égal en hauteur à l'inférieur, & par les points *s*, *q*, *k*, *n*, on menera la ligne *s* T parallele à R *g*, *q u* paral-

Fig. 188. lele à $p p^r$, $k k^l$ parallele à 5 3^q, & $n n^l$ parallele à 4 z, & l'on aura tous les points auxquels doit s'adapter le panneau de tête fait sur une matiere flexible & appliqué dans la surface concave du limon.

Il faut observer que parce que le ressocle SGPQ déborde le dessous de la surface des marches qui fait la coquille, d'une certaine quantité prise à volonté, comme T*t*, moitié de T*x*, on menera par le point *t* la ligne *tz* parallele à *g x*, qui marquera la largeur de la coupe qu'on doit faire au derriere de la marche pour abattre l'arête trop aiguë que formeroit la rencontre de la coquille & du lit de dessus de la marche. On en usera de même pour le ressaut que fait la coquille avec le lit de la marche suivante, qu'on a marqué ici en q^r p^r sur un profil de marche renversée en *t* X *h o* p^r q^r *t*, qui est mis là sans autre besoin que celui de marquer la destination des lignes de l'épure. Par un autre profil redressé à la queue de la marche en *a b c e f*, on voit le rapport & l'usage des lignes de la projection, que l'on peut comparer aux profils des figures de tête 192, & de queue 191, de deux marches posées l'une sur l'autre.

Il faut encore remarquer qu'on a fait toutes les lignes des arêtes de coupe paralleles entre elles, pour ne pas les faire gauches; par exemple, on a fait la ligne *s* T parallele à R*x*, & *t z* parallele à *x g*; quoique suivant les bonnes regles elles dussent être tirées toutes les deux, comme des rayons, du centre C, parce que les intervalles 10 *x* & *s* R étant inégaux, & servant de base à des hauteurs égales à G*r* de l'élévation de la coupe de la tête, la surface qui passeroit par ces lignes seroit gauche hélicoide, & non pas plane, par les raisons qui ont été données au commencement du second tome, page 41. Il en seroit de même de la petite coupe *x t*, qui s'élargiroit du côté de la queue, comme on voit en 11 *g*, & ainsi des autres *k*L, *n* 1[4], *qu*, & $p p^r$; rien n'empêche cependant qu'on ne les puisse faire gauches, les joints en seront plus réguliers, l'exécution en sera seulement un peu moins aisée; au reste on doit régler les bonnes coupes sur les joints de tête les plus apparens.

Application du trait sur la pierre.

Avant que de régler l'épaisseur de la pierre qui doit servir de

marche, il faut confidérer que puifqu'on veut que la tête qui porte le limon foit d'une même piece que le refte, on fera obligé de la faire plus épaiffe qu'il ne feroit néceffaire fi la tête étoit d'une piece féparée, parce que les parties du limon IK, SG, QP, MN, qui font en coupe, excedent les lits de deffus & de deffous de la marche, ce qui oblige l'appareilleur à en faire de fuppofés pour préparation, qui font élevés au-deffus des vrais lits de la hauteur K *e* pour le lit de deffus, & *p* Q pour celui de deffous, qu'il faudra abattre dans l'exécution, à ces petites parties de coupe près, c'eft-à-dire, en ne confervant feulement que le petit prifme triangulaire, dont le profil eft le triangle IK *e* au lit de deffus (fig. 188 & 192) & le triangle *d* Q *p* au lit de deffous. *Fig.* 188.

On commencera donc par faire un panneau d'un lit de toute la marche, qui comprenne la tête L n^l *n* F *s* T *t z*, avec la queue, qu'on n'a pas marqué ici, & le retour *z* L, & ayant tracé le contour de ce panneau fur les lits de deffus & de deffous en retour d'équerre, on abattra quarrément toute la pierre qui excede le trait, & l'on appliquera dans le parement creux de la tête du limon, le panneau SG IK NM PQ, tracé fur du carton pour l'appliquer à cette furface concave cylindrique en pefant deffus pour le faire joindre dans le creux; dans cet état on en tracera le contour, fuivant lequel on abattra la pierre quarrément, tenant toujours une des branches de l'équerre parallele au trait du milieu HO, & l'autre fuivant le biveau mixte de la coupe 3, 4 *z*. On pourroit, pour plus de fûreté, faire un panneau de l'intérieur du limon, en développant l'arc k^l n^l pour en faire la bafe d'un triangle rectangle, qui auroit pour hauteur celle de la marche, plus celle de la coupe prife en K *e*; l'hypoténufe de ce triangle fait de carton appliqué & plié dans la furface cylindrique du limon intérieur, formeroit l'hélice de fon arête. Les figures 189, 190, 191 & 192 ferviront de fupplément à ce qui manque à cette explication.

La figure 189 fait voir la tête d'une marche par dehors avec la partie du limon qu'elle porte, en perfpective, avec les petites coupes IK, SG au lit de deffus, & QP, MN au lit de deffous. La fig. 190, marquée des mêmes lettres, montre la même tête de marche, vue par dedans, auffi en perfpective,

La fig. 191 montre par un profil de quelle maniere les marches ſe recouvrent vers la queue, où l'on a diſtingué par une hachure la partie de la pierre qui doit être enlevée après la premiere ébauche des deux lits de préparation, & par une ponctuation le profil de ce qui reſte en œuvre. La fig. 192 montre par un profil le recouvrement d'une marche ſur l'autre au collet, qui eſt beaucoup plus petite qu'à la queue, & la ſaillie triangulaire KLN du limon au-devant de l'angle rentrant des marches, laquelle eſt marquée par une hachure croiſée; cette partie a auſſi été repréſentée à la fig. 190. Les parties en parallelogrames IN & GQ repréſentent le ſocle & le reſſocle, qui débordent le deſſus des arêtes des marches & le deſſous du parement inférieur de la coquille.

Obſervation ſur le trait de M. de la Rue.

Je crois devoir faire remarquer ici une erreur du trait de M. de la Ruë, laquelle peut ne pas être de grande conſéquence lorſque les marches ſont en grand nombre à chaque révolution de la vis, & que l'eſpace du vuide du milieu eſt d'un grand diametre, mais qu'il eſt encore meilleur de ne pas faire.

Cet Auteur trace le panneau de tête de la marche qui porte le limon par une projection verticale : or il eſt évident que le panneau flexible formé ſur une telle épure ſera trop court étant appliqué dans la ſurface concave cylindrique du vuide du noyau, ſuivant le rapport de la corde *s n* à l'arc *s* F *n*, qui eſt conſidérable dans cet exemple.

Secondement, il eſt clair que la projection qui ſe fait d'une ſurface plane ſur un arc, ou d'un arc ſur une ſurface plane, ne donne pas ſur cette ſurface des parties proportionnelles aux diviſions de l'arc, puiſque les parties de cet arc ſont toutes inégalement inclinées à celles de la ſurface ou de la ligne droite qui lui ſert de baſe, par conſéquent les unes ſe racourciront plus, & les autres moins par la projection; il eſt, par exemple, viſible que l'arc *s* 6 ſe racourcira plus que ſon égal 6 5 qui eſt preſque parallele à GI. Enfin ſi l'on ſuppoſe le creux cylindrique vertical *s* F *n* coupé par un plan incliné à l'horiſon, comme KN, qui ſoit perpendiculaire au plan vertical paſſant par AB, la ſection de ce plan ſera une ellipſe, & par la

nature de la vis, la courbe de l'arête du limon doit être une hélice; par conséquent *la pratique du trait de cet Auteur est fausse en tous points.* Quant à la justesse de celui que je viens de donner, elle est claire par la seule construction, & par l'exposition de ce que l'on doit faire, par laquelle nous avons commencé à rendre raison des développemens des lits horisontaux circulaires, des petits lits en coupe, & des hélices des arêtes du limon; il ne paroît pas nécessaire d'y ajouter d'autre démonstration.

Troisieme espece de vis à jour,

Où les limons sont détachés des marches, & s'étendent sur plusieurs têtes.

En termes de l'art,

DE LA COURBE RAMPANTE.

PREMIEREMENT.

De la circulaire d'une seule piece, à l'usage de la charpenterie & de la menuiserie.

Dans le trait précédent, chaque tête de marche portoit son limon d'une même piece; dans celui-ci le limon est un ouvrage à part, dans lequel on fait des entailles, ou si c'est en charpente, des mortoises, pour y loger plusieurs têtes des collets des marches tournantes, c'est-à-dire qu'il s'agit ici de faire d'une grande piece, les parties du limon qu'on faisoit de plusieurs assises de peu de hauteur, égale à celle des marches auxquelles elles étoient adhérentes, ce qui donne occasion à un changement de construction. Soit (fig. 193) la portion de couronne de cercle AGED 4 B le plan horisontal d'un mur d'échifre de vis à jour, portant de fond comme en *a b m* DE de la fig. 194, ou la projection horisontale d'un limon soutenu en l'air en saillie, comme le convexe AB de la fig. 195, qui est un *quartier de vis suspendu*; ou enfin la projection d'un limon concave, comme $A^2 B^2$, $D^2 E$ de la fig. 193. Planch. 106. *Fig.* 193. *Fig.* 194 & 195.

Par tous les points A, B, C, D, E du diametre AE, on lui élevera des perpendiculaires indéfinies, comme AI, CM,

Fig. 193. EL, &c. puis on divisera le demi-cercle B 4 D en autant de parties égales qu'il y aura de marches dans cette partie d'escalier. Nous supposerons dans cet exemple qu'il y en a sept; savoir six collets de marches entiers entre les points 1 & 7, & deux moitiés de collet entre les points B 1 & D 7, supposant leurs autres moitiés dans une rampe droite, ou en continuation de révolution dans un autre demi cercle. Par tous les points des divisions des marches 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, on tirera du centre C des lignes 1 1^x, 2 2^x, 7 7^x, 6 6^x, &c. qui couperont le côté convexe du limon AGE aux points 7^x, 6^x, &c par toutes les extrémités de ces lignes 1 1^x, 2 2^x, &c. on menera des verticales paralleles à la ligne AI. On prendra ensuite une base d'élévation sur une ligne A^2 O, parallele à la ligne AE, à telle distance qu'on voudra de cette ligne, laquelle ligne A^2 O coupera toutes les perpendiculaires provenant des points A, C, E, aux points o^1, o^2, o^3, m^c, &c.

On portera au-dessus du point o^1 successivement les hauteurs données des marches aux points 2, 3, 4, 5, 6, 7, & les demi-hauteurs des demi-collets B 1, D 7, l'une en dessous de o^1 en z^1, l'autre en dessus de la plus haute, de y^7 en E; & par tous ces points O, 1, 2, 3, &c. on tirera autant de paralleles à la ligne AE, qui couperont les verticales élevées sur tous les points A, 1^x, 2^x, &c, qui sont au contour convexe AGE, en des points y^1, y^2, y^3, y^4, &c. par lesquels on tracera à la main la ligne A^2 y m y E^2, qui représentera en projection verticale l'hélice qui se forme à l'arête convexe du dessous du limon, qui passe par les angles de dessous de chaque marche du côté de la vis. Les mêmes lignes horisontales passant par les points 1, 2, 3, 4, &c. de la verticale EL, couperont les verticales provenant des points 1, 2, 3, 4, &c. de l'arc B 4 D, en des points z^1, z^2, z^3, z^4, &c. par lesquels on tracera la courbe B^2 z m z D^2, qui sera la projection verticale de la courbe de l'arête concave du limon du côté du noyau vuide, laquelle courbe croisera la précédente A^2 m E^2 au point m, qui représente lui seul les deux points de la projection horisontale 4 & G du milieu du limon, entre les points A & E vers les marches, & B & D vers le vuide.

Ces deux courbes étant tracées, on prendra la hauteur que l'on veut donner au limon, qui doit excéder celle des marches

186.

185.

184.

187.

188.

189.

190.

191.

192.

par dessus & par dessous d'une certaine quantité, qui est arbitraire, comme de trois ou quatre pouces, par plusieurs raisons. 1°. Parce que ce limon sert d'échiffre pour y loger les têtes des collets des marches. 2°. Pour lui donner plus de solidité. 3°. Pour déborder les ressauts que les angles des marches font de l'une à l'autre; l'une de ces hauteurs en dessus s'appelle le socle du limon, l'autre en dessous le ressocle. La hauteur verticale du limon étant déterminée, par exemple A^2 *a*, on la portera sur toutes les verticales au-dessus des points *y* de suite, pour avoir la courbe d'arête convexe sur les marches *a* M *e*, & de même sur tous les points *z* pour avoir la courbe concave vers le vuide *b* M *d*, laquelle croisera la précédente en M, comme celle de dessous en *m*. *Fig.* 193.

Les quatre courbes des arêtes du limon étant tracées, comme on les voit dans la figure, on leur menera des tangentes, à la vue seulement en dessus & en dessous, par exemple, en dessus par l'angle *d* qui est le plus avancé, & à peu près vers T où la courbe s'éleve le plus; on tirera la ligne LI, à laquelle on menera par le point B^2 une parallele *i l* au-dessous. Par ce moyen toute la projection verticale du limon se trouvera comprise dans le rhomboïde IL *l i*, qui montre quelle doit être l'épaisseur & la longueur de la pierre ou de la piece de bois qu'on doit tailler pour en faire le limon, comme il est représenté à la figure 196, par les mêmes lettres IL *li*. Présentement il faut tracer les courbes b^2 4V*d*, & IgL, qui sont les sections planes du creux cylindrique du noyau vuide B 4 D, & du rond ou convexe du côté des marches AGE, lesquelles courbes, qui sont des ellipses, comprennent un espace I *g* L *d* 4V b^2, dont il faut lever un panneau. Il sera facile de tracer chacune de ces demi-ellipses, par le probl. VII du II liv. page 162, ou par le prob. IX, page 172 du même liv. (tome I) parce que les grands axes IL de la convexe, & b^2 *d* de la concave sont donnés, & la moitié de leurs petits axes C^2 4 V, & C^2 *g* sont aussi donnés au plan vertical en CG & C 4; ainsi on pourra tracer ces demi-ellipses par un mouvement continu, ou par plusieurs points, comme on a coutume de faire les cerches ralongées. *Fig.* 195. & 196.

Nous avons supposé que le limon faisoit une demi-révolution B 4 D à la fig. 193; mais s'il en faisoit moins, comme

Fig. 198. par exemple, moins d'un quart en A *n* B (fig. 198), la construction seroit encore la même. Ayant tiré du centre C de l'arc A *n* B les lignes CD, CE, CN, il s'agira de changer les arcs de cercles A *n* B & DNE en arcs d'ellipses de même profondeur, & sur des cordes données, qui seront celles que la hauteur des marches comprises dans l'intervalle DNE donneront; par exemple, dans cette figure ces cordes seront les lignes de rampes ab^2, dE^2, qui se croisent en M, avec lesquelles on fera des cerches ralongées (par le corol. III du probl. IX du 2e liv. page 175 du tome I); mais comme nous devons parler plus au long de cette construction, lorsque nous traiterons des limons tournans & rampans faits de plusieurs pieces, nous passons à la pratique de la taille du cas dont il s'agit, à la fig. 193.

Application du trait sur la pierre ou sur le bois.

Fig. 193 & 196. Pour trouver la longueur de la pierre ou de la piece de bois qu'on doit employer à faire le limon d'une piece, on tirera par le point L, qui est le plus éloigné, une perpendiculaire L *p* sur la ligne *i l*, prolongée en *p*; la distance *i p* sera la longueur qu'il convient de donner à la pierre ou à la piece de bois, quoique dans la rigueur elle puisse être plus courte de l'intervalle *e f* par le haut bout, & *i q* par le bas; mais alors la courbe convexe ne seroit pas toute tracée sur les lits de la pierre où le panneau doit être appliqué; savoir, à droite vers L au lit de dessus, & à gauche vers *i* au lit incliné de dessous; c'est pourquoi il convient, pour la commodité & l'exactitude de de l'exécution, que la pierre soit un peu plus longue qu'il ne faut absolument. L'épaisseur de la pierre ou du bois sera donnée par la ligne L *p*, & sa largeur par la ligne CG du plan horisontal; ainsi avec ces trois dimensions on formera en pierre ou en bois, selon la matiere dont on doit faire l'escalier, le parallelepipede P *r* de la fig. 196, laquelle n'est pas relative de grandeur à la fig. 193, faute de place.

On prendra ensuite la longueur L*d* de la fig. 193, qu'on portera en L *d* de la fig. 196; puis ouvrant la fausse équerre sur l'angle obtus L *d* D^2, on portera cet angle sur la pierre en L *d* V, de la fig. 196, pour y tracer la ligne *d* V, qui doit être en

en œuvre à plomb comme d D² de la fig. 193. On prendra ensuite l'intervalle db^2 qu'on portera en $d\,b$ sur l'arête IL de la fig. 196, pour tracer par ce point b une ligne $b\,u$, parallele à d V. Les quatre points b, d, V & u serviront à poser le panneau IGL d Vm B² sur les paremens de dessus & de dessous de la piece de bois, comme il est représenté à la fig. 196. Le contour de ce panneau étant tracé tant dessus que dessous, on abattra la pierre d'une courbe à l'autre avec la regle, qu'on tiendra toujours parallele à la ligne d V ou $b\,u$; par ce moyen on formera une surface cylindrique $b\,4\,d$ V$m\,u$, qui sera le parement creux vu du côté du vuide. Par la même maniere, on abattra la pierre qui excede le contour convexe IGL, pour former le parement rond du côté des marches, dans lequel on doit loger par des entailles les têtes de leurs collets. *Fig. 193 & 196.*

Voilà déja deux surfaces verticales du limon formées, desquelles il faut retrancher les parties qui excedent trop le dessus & le dessous des marches, dont les angles s'élevent les uns au-dessus des autres suivant les courbes en hélices, auxquelles les arêtes du socle & du ressocle du limon doivent être paralleles. Il faut donc tracer ces courbes sur les surfaces cylindriques concaves & convexes chacune en deux endroits parallelement entre elles, l'une en dessus pour l'arête du socle, l'autre en dessous pour l'arête du ressocle qui forme avec sa compagne le plafond, ou plutôt une portion de coquille égale à la surface de l'épaisseur supérieure, ce que l'on peut faire de trois manieres différentes. La premiere, par le moyen des panneaux flexibles, qui soient les développemens des portions de surfaces cylindriques, dont l'une est concave & l'autre convexe, suivant ce qui a été enseigné au trait de la vis Saint-Giles, page 447, & fig. 230 du tome précédent; ce que nous répeterons en deux mots pour n'y pas renvoyer le lecteur. On fera, par exemple, pour le creux du limon un triangle rectangle, qui aura 1°. pour base horisontale l'arc B 4 D développé, c'est-à-dire rectifié en ligne droite, 2°. pour hauteur à plomb la ligne $r\,d$ de la fig. 193, qui est celle du point d, sur une ligne de niveau $b\,r$; l'hypoténuse de ce triangle rectangle achevera le panneau qu'on tracera sur du carton.

Si l'on applique le côté $d\,r$ sur l'arête d V de la fig. 196, & qu'on appuye sur le carton pour le faire plier & joindre exacte-

Fig. 193, & 196. ment dans la surface concave b SV, le côté du panneau, qui en est l'hypoténuse, marquera exactement le contour de l'hélice concave qui est marquée en projection verticale à la fig. 193 en b M d. Il sera facile de tracer l'hélice parallele en dessus ou en dessous, en faisant le panneau en lozange, c'est-à-dire en parallelograme obliquangle, qui aura pour grands côtés l'hypoténuse trouvée, & pour les deux petits côtés la hauteur verticale du limon a A^2. Par la même méthode, on fera le panneau flexible pour tracer l'hélice convexe qui est du côté des marches, en rectifiant l'arc AGE du plan horisontal pour faire la base du triangle rectangle, & se servant de la même hauteur $d\,r$ qu'on a pris pour l'hélice concave, parce qu'elle est égale à e R pour la convexe; on a représenté deux pareils panneaux à la fig. 199, qui ne sont pas relatifs à la figure 193, mais qui suffisent pour l'intelligence de ce qu'on vient de dire.

La seconde maniere de tracer les hélices des arêtes supérieure & inférieure des limons sur leurs surfaces concaves & convexes est un peu moins simple, c'est de tracer dans la surface concave & sur la surface convexe cylindrique autant de lignes paralleles à l'axe, ou, ce qui est la même chose, aux arêtes dV, $b\,B^2$, (fig. 196) qu'on éleve de perpendiculaires à l'épure de la fig. 193 sur le plan horisontal, c'est-à-dire dans cet exemple, six en dedans & autant en dehors, suivant les distances prises quarrément égales à celles du plan horisontal B 1; 1, 2; 2, 3, &c. pour le creux, & A 1^x, $1^x\,2^x$, $2^x\,3^x$, &c. pour le rond convexe du côté des marches. Ensuite on prendra successivement toutes les hauteurs de ces lignes sur la base horisontale A^2 O, si le limon porte de fond, comme à la fig. 194; mais s'il est en l'air, comme à la fig. 193, on ne peut prendre ces hauteurs pour les porter dans la pierre ébauchée à la fig. 196, parce qu'elle est vuide au-dessous de l'arête B^2 V; alors il faut prendre la différence de chacune de ces hauteurs, & la porter successivement au-dessus de la ligne de niveau que donnoit la hauteur précédente, comme m^6, o^5, o^6, &c. sur lesquelles on portera les différences des hauteurs $m^6\,m$, $o^5\,z^5$, $o^6\,z^6$, &c. de la fig. 193, qui donneront à la fig. 96 les points s, 6, 5, d, &c. par lesquels on tracera à la main ou avec une regle pliante l'hélice concave que l'on cherche & sa paral-

lele au-deſſous, de même la convexe & ſa parallele en deſſous, pour le plafond du limon.

La troiſieme méthode, qui eſt celle dont ſe ſert M. de la Ruë, eſt encore plus compoſée, ordinairement peu correcte dans l'exécution, & demande une autre épure que celle de la fig. 193; c'eſt de faire deux cerches ralongées ſur les lignes droites *a e* & *b d*, qu'on n'y a pas tracé pour éviter la confuſion, mais qu'il eſt aiſé de faire; car ſi le limon fait une demi-révolution complette, ce ſont deux demi-ellipſes à décrire ſur des axes donnés; ſavoir, pour la concave le grand axe *b d*, & le demi petit axe C 4 du plan horiſontal, & pour la convexe on a le grand axe *a e*, & pour moitié du petit axe la ligne CG du plan horiſontal; & ſi le limon ne fait pas une demi-révolution complette, comme à la fig. 198, on pourra former ces cerches ſur des cordes données en *a e*, *d b*, (fig. 199) & avec les fleches données au plan horiſontal *m n*, MN, fig. 198, on changera les ſegmens des cercles donnés en ſegmens d'ellipſes, par le coroll. III du probl. IX du ſecond livre, page 175 du tome I. Cette maniere ne convient pas à de grandes portions de limons, qui ſont beaucoup convexes, parce que l'on n'a que deux points donnés aux extrémités des cerches pour régler leur poſition; ce qui n'eſt pas ſuffiſant, parce que pour peu qu'elles ſoient inclinées au plan vertical paſſant par ces deux points, elles donneront un faux contour, ce qui ne peut pas arriver en ſe ſervant d'un panneau pour former les ſurfaces cylindriques concaves & convexes, pour leſquelles on a beſoin de panneaux ou de cerches.

Plan. 107, *Fig.* 198, & 199.

L'uſage de ces cerches eſt de les poſer ſur les extrémités des lignes droites données, qui en ſont les cordes, & de faire des plumées creuſées en rigole concave vers le vuide & en rigole convexe du côté des marches; enſuite on abat la pierre entre les deux plumées, à la regle poſée de l'une à l'autre ſur des parties correſpondantes, & l'on formera ainſi le creux & le rond des paremens qui doivent être à plomb. S'il ne s'agit que d'une portion peu concave ou convexe, on pourra tracer les hélices des arêtes ſur ces ſurfaces, ſans autre inſtrument ni préparation de trait qu'avec une regle pliante qu'on poſera ſur les deux extrémités de l'arête, & qu'on fera joindre à la ſurface.

courbe : la trace formée le long de la regle ainsi pliée, donnera une hélice à chaque position ; celles qui seront tracées sur la même surface par des situations de regles paralleles, seront semblables ; mais pour peu qu'elles soient plus ou moins inclinées, elles ne le seront plus.

Lorsque les joints du limon sont à-plomb, comme on a coutume de les faire en charpente, on a à chaque parement creux deux hélices semblables & égales à tracer à l'intervalle de la hauteur du limon ; mais lorsque les limons sont faits de plusieurs pieces dont les lits sont en coupe, on a des hélices semblables à faire, mais non pas égales, parce que celles du dessous du limon sont plus courtes que celles du dessus. Supposant enfin que les hélices des arêtes soient tracées sur les paremens courbes cylindriques, concaves, & convexes, par une des trois manieres que nous venons de donner, il ne s'agit plus que d'abattre la pierre à la regle de l'une à l'autre du dedans au dehors, observant de tenir la regle dirigée à l'axe du cylindre, comme nous l'avons dit au commencement du second tome ; mais comme cet axe est imaginaire, parce qu'il est dans le vuide du noyau, il faut chercher quelque moyen qui puisse la guider dans cette position ; on le peut à peu près, en la tenant à vue quarrément aux surfaces courbes, c'est-à-dire, perpendiculairement à la tangente ; mais pour être plus sûr, il faut diviser les hélices compagnes en parties égales entre elles dans chacune, & poser la regle sur les parties correspondantes, comme du tiers de la convexe au tiers de la concave, du quart au quart, &c. ce qui fera que la regle se trouvera de niveau sur l'ouvrage posé en place. Par ce moyen, on formera exactement une espece de surface que j'appellerai *plano-hélicoïde*, parce qu'elle est composée d'une infinité d'hélices différentes, qui font cependant leurs révolutions en même tems autour de l'axe du cylindre, duquel elles sont toutes équidistantes, & de plus qu'elle est croisée par une infinité de lignes droites dirigées à cet axe commun, en quoi je la distingue de la *cylindrico-hélicoïde*, dont nous avons parlé en traitant de la vis S. Giles, & des noyaux & moulures tournantes & rampantes des escaliers précédens.

193.

194.

195.

196.

Quatrieme eſpece de vis à jour.

Lorſque le vuide eſt ſur une baſe horiſontale elliptique.

Nous avons démontré au théor. IV du Ir livre, que la ſection oblique d'un cylindre creux d'égale épaiſſeur, étoit une couronne elliptique, compriſe par deux ellipſes ſemblables, mais qui n'étoient pas équidiſtantes, ce que l'on vient de voir ſenſiblement, en jettant les yeux ſur la ſection l *g* L de la fig. 193. D'où, par l'inverſe, on doit tirer la conſéquence que ſi le vuide du noyau eſt elliptique, l'épaiſſeur du limon devroit être inégale horiſontalement, ſi le côté des marches étoit tracé par une ellipſe ſemblable à celle du vuide, parce que les diſtances des ellipſes aſymptotiques ne ſont égales que ſur des diametres égaux; elles ſont inégales d'un diametre à l'autre qui ne lui eſt pas égal. La démonſtration en eſt très-ſimple.

Soient (fig. 199) les lignes *ac*, *bc*, les moitiés de deux grands axes donnés, & *ce*, *cd*, les moitiés de deux petits axes conjugués aux grands des deux ellipſes ſemblables concentriques, qu'on appelle aſymptotiques, on aura par la ſuppoſition, & par la définition des aſymptotiques $ac, bc :: ec : dc$, & en diviſant $ac - bc = ab . ec - dc = ed :: ac . ec :: bc . dc$; or ac, moitié du grand axe, eſt plus grand que ec, donc ab eſt plus grand que ed; ce qu'il falloit démontrer.

Il en eſt de même des autres diametres conjugués qui ne ſont pas égaux, dont les ellipſes aſymptotiques ne peuvent avoir leurs circonférences équidiſtantes, car ſi ab eſt égal à ed, ac ſera égal à ce, & $bc = dc$: alors les courbes ſont des cercles & non des ellipſes. D'où il ſuit que ſi la circonférence du vuide du noyau eſt elliptique, l'arête du limon, qu'on veut faire d'égale épaiſſeur, ne peut être une ellipſe, mais une épicycloïde, qu'il faut décrire comme nous l'avons dit au 2d Livre, page 168, en prenant au contour de l'ellipſe donnée pluſieurs points à volonté, pour ſervir de centres à autant d'arcs que l'on fera avec la meſure de l'épaiſſeur du limon, donnée pour rayon; la ligne courbe tangente à tous ces petits arcs ſera l'épicycloïde demandée, laquelle n'étant pas ſemblable à l'el-

lipſe donnée, fera néceſſairement des jarrets aux extrémités du grand axe, comme le montre la fig. 117 du 2^d Livre, & ce jarret ſera d'autant plus ſenſible & choquant, que l'épaiſſeur du limon ſera grande à l'égard des diametres de l'ellipſe donnée, parce que les rayons des petits arcs de cercles qui forment l'épicycloïde, ſe croiſent vers le grand axe, où ils font un angle rentrant.

La ſeconde raiſon de l'impoſſibilité de faire un limon d'égale épaiſſeur, lorſqu'une de ſes arêtes eſt elliptique, même par imitation, comme lorſque l'eſpace elliptique eſt changée en ovale par un aſſemblage d'arcs de cercles, eſt démontrée au 2^d tome, page 418, & à la fig. 205 du même tome, où l'on fait voir que les arcs concentriques ſont impoſſibles, lorſque la diſtance de l'arc intérieur à l'extérieur eſt plus grande que celle du centre qui a été pris pour foyer ſur le grand axe : car alors la figure inſcrite n'ayant plus quatre centres, comme la grande ovale & les ſuivantes juſqu'au foyer, elle n'eſt plus une ovale, mais une figure de fuſeau compriſe par deux arcs de cercles égaux, qui ſe croiſent ſur le grand axe; ce que le graveur a mal exprimé à la fig. 205, où il a cru, malgré le
Fig. 205. modele de mon deſſein, qu'il devoit arondir les pointes F & *f*; c'eſt une faute à corriger à la planche 59, tome I. Les irrégularités ſont donc inévitables aux limons qu'on veut faire d'égale épaiſſeur ſur un contour elliptique ou ovale, à l'une de ſes arêtes du dedans ou du dehors. Ainſi il n'eſt pas étonnant que Maître Blanchard ſe ſoit apperçu de quelque jarret vers les extrémités des grands axes de la courbe rampante ſur une ovale; cette obſervation fait voir qu'il travaille avec ſoin, & qu'il a du goût dans ce qu'il fait, puiſqu'il a découvert, ſans le ſecours de la géométrie, une imperfection peu ſenſible, qui avoit échappé aux artiſtes qui l'ont précédé; mais le remede qu'il a voulu apporter fait voir qu'il auroit eu beſoin de cette ſcience; & ſon ſtile, qu'il avoit beſoin d'un peu d'étude pour écrire.

« J'ai remarqué, dit-il, (chap. 15) dans le traité de la » courbe rampante de quelques auteurs, qu'ils diſent qu'on peut » faire toutes ſortes de plans tant réguliers qu'irréguliers; ils » enſeignent par leurs principes que les lignes des courbes ou » échiffres qui croiſent, doivent partir du dedans de l'extré- » mité de la courbe rampante; mais ayant fait la preuve de leur

» opération, j'ai remarqué (sur plusieurs plans irréguliers, tel » qu'est celui-ci *, qui est demi-ovale) qu'ils se sont trompés, » & que la courbe se trouve estropiée dans son flanc : il faut que » les susdites lignes soient prolongées plus que de l'extrémité » du dedans & du dehors; ce qui cause cette difficulté, sont les » têtes de l'ovale, qui sont plus concaves que les flancs; ceux » qui en feront en grand ou petit, traceront leurs marches sur » la courbe débillardée seulement; ils en verront la vérité, & » l'expérience la leur fera mieux voir que la plume ne le peut » expliquer, ni le trait le faire connoître. »

** La fig. 197 est le même plan réduit en petit.*

Ce discours est d'un ouvrier sans théorie, qui ne conçoit d'autre moyen de s'instruire que celui de la pratique, ignorant que la plume (tout au contraire de ce qu'il dit) peut mieux exprimer les défauts que l'expérience, parce que les raisonnemens géométriques vont à un point de délicatesse où le dessein le plus parfait ne peut atteindre; c'est par ce raisonnement que nous condamnons la correction qu'il veut faire au défaut qu'il a remarqué; car quoiqu'elle soit si mal énoncée, & si peu relative à sa figure, qu'elle est à moitié indevinable, il y établit une regle de hauteur constante pour des cas variables de hauteur & de contour d'hélice : «Comme il est d'usage, » dit-il, (page 47 au verso) que l'on ne donne que six pou- » ces de hauteur de chaque marche; à la premiere, vous n'en » donnerez que quatre & demi; qu'elle soit plus haute ou plus » basse, vous suivrez toujours la même proportion.» Par cet exposé on peut juger de la justesse de sa correction; mais suivons notre examen. C'est le propre des hélices mal décrites de faire des jarrets; or celles qui sont tracées sur des plans ovales par des points provenans des divisions égales des girons & des hauteurs des marches sont mal décrites, donc elles doivent faire des jarrets.

Premierement, il est clair, par ce que nous avons dit ci-devant, que les projections des arêtes des limons ovales d'égale épaisseur n'étant pas des figures semblables ni semblablement divisées, ne produisent pas des hélices semblables; ainsi faisant l'hélice de l'arête du côté des marches relativement à leurs girons & hauteurs, celle du côté du vuide, faite par le même rapport, aura des parties différemment inclinées à l'horison, je veux dire d'une maniere qui ne sera pas uniforme, comme on le démontrera ci-après. Blanchard semble avoir senti

cette différence, lorſqu'il a dit, pages 52 & 54, *qu'il ne falloit pas s'arrêter aux hauteurs préciſes des marches.*

Comme la courbe du côté du vuide de la vis à jour eſt la plus apparente, il ſemble qu'on doit en faire l'hélice primitive & la plus réguliere, parce que la ſecondaire, qui eſt ſa compagne du côté des marches, ſera toujours moins réguliere dans les limons ſur une baſe ovale d'égale épaiſſeur. Pour le prouver nous ſuppoſerons, ſi l'on veut, que la projection de la vis eſt une ovale plus correctement tracée que celle de la planche 20 du livre du ſieur Blanchard, qui eſt compoſée d'arcs de cercles qui font des jarrets à leur jonction, ſur laquelle cependant réduite en petit, & marquée des mêmes lettres, nous allons faire notre raiſonnement.

Premierement, ſi l'on fait l'hélice primitive à l'arête du limon du côté des marches, il eſt clair, par la nature de l'ellipſe qui en eſt la projection, ou de l'ovale qui eſt l'imitation de l'ellipſe, que les largeurs des girons étant égales au collet contre le limon courbe, les cordes de ces diviſions égales n'auront pas, comme dans le cercle, le même rapport à leurs arcs, mais que ces arcs ſeront d'autant plus grands à l'égard de leurs cordes, qu'ils approcheront du grand axe, & d'autant plus petits qu'ils approcheront du petit axe. Or faiſant les girons des marches, ſuivant l'uſage ordinaire, d'égale largeur & hauteur, les arcs d'hélice qui répondent à des diviſions égales de leur baſe auprès du grand axe, auront une égale hauteur à parcourir en rampe que ceux qui ſeront près du petit axe, quoiqu'ils ſoient plus grands en contour : donc l'hélice ſera plus couchée vers le grand que vers le petit axe, ce qui eſt contraire à la correction de Maître Blanchard, & qui eſt cependant évident & ſans réplique.

Secondement, ſi l'on fait les diviſions des girons de marches égales ſur une ovale moyenne priſe au milieu de leur longueur, comme il le pratique à la fig. 22, & que l'on tire ces marches d'un ſeul & même centre à la projection, il eſt clair que ſi l'on prend ce point au centre D de l'ellipſe, le défaut de la diviſion augmentera au collet ou à la queue des marches, où elles ſeront inégales; & ſi l'on prend ce point en F dans le petit axe prolongé, comme il fait à la fig. 120, hors du centre de l'ovale, & qu'il diviſe en parties égales un contour de la baſe du limon en dedans ou en dehors; celui de l'ovale qui

répond

répond à l'autre arête ſera diviſé en parties d'autant plus inégales que ce point F ſera près ou loin du grand axe, & cependant ces arcs inégaux ſeront les baſes des hauteurs des marches égales ; donc l'inclinaiſon de l'hélice changera à chaque marche, & par conſéquent la progreſſion de ſon élévation en rampe, n'étant pas uniforme, elle fera des jarrets, *ce qu'il falloit ſecondement démontrer.* Ainſi ſuppoſant l'hélice primitive priſe à une des arêtes du limon, par exemple au-dedans ſans jarret, ſa compagne à l'arête extérieure en fera néceſſairement, ſi le limon eſt d'égale épaiſſeur. Et ſuppoſant la baſe de deux ellipſes ſemblables, il eſt encore vrai que les diviſions des arêtes des marches prolongées ne pourroient couper ces deux courbes en parties proportionnelles tant qu'elles ſeront droites ; une telle diviſion ne peut ſe faire que par une ligne courbe, comme nous l'avons fait voir au 2[d] tome, en parlant des voûtes en ſphéroïdes, page 420. Nous allons rendre plus ſenſible ce que nous venons d'avancer, par la fig. 197, qui eſt celle de Maître Blanchard réduite en petit.

Soit la ligne ND, la moitié du grand axe de la projection en ovale de la courbe rampante, DM celle du petit axe, ſoit E le centre des marches, F celui de l'arc YM ſur le petit axe, C celui de l'arc NY ſur le grand axe, & de ſon concentrique H *q*. Il eſt déja évident que la premiere marche tirée du centre E par le point H retranche du contour de l'ovale extérieure l'arc N 13 ; par conſéquent que l'arc d'ovale 13 M n'eſt plus ſemblable à l'arc HI intérieur, puiſque celui-ci eſt un quart complet, & que l'autre eſt tronqué de ſa partie 13 N, donc l'hélice extérieure de l'arête de la courbe rampante ne ſera plus compagne de celle du dedans, puiſqu'elle parcourt une moindre partie du contour de ſa baſe que l'intérieure ; ainſi dans ſon eſpece elle ſera plus roide. Ce n'eſt pas encore là toute la différence de ces hélices entre elles, car non-ſeulement leurs mouvemens d'élévation ſont inégaux de l'une à l'autre, mais encore dans chacune en particulier, de ſorte qu'elles font encore des jarrets reſpectivement. *Fig.* 197.

Suppoſant le point Y à la jonction des deux arcs de cercles tracés de différens centres pour former l'ovale ; ſavoir, NY du centre C, & MY du centre F ; il eſt clair que la ligne YE, qui ſera la direction d'une des marches, ou de ſon arête, ou de ſon milieu, ou du tiers de ſon giron, &c. ne paſſera par aucun

Fig. 197. de ces centres, ou tout au plus ne pourra paſſer que par un des deux, puiſque les trois points F, E, C, ne ſont pas en ligne droite; par conſéquent elle ne peut paſſer par les jonctions des deux arcs Y & *q*, qui doit être ſuivant la bonne conſtruction dans la ligne FY, qui paſſe par le centre C; donc la ligne EY ne peut diviſer proportionnellement les contours des ovales extérieure & intérieure. Car ſi la ligne de direction de la marche paſſe par le point Y à l'arc extérieur, elle paſſera par un point *y* à l'intérieur en deſſus du point *q* de la jonction; donc l'arc H *y* eſt d'un plus grand nombre de degrés que l'extérieur NY, lequel eſt déja tronqué par la direction E 13 de la premiere marche de la partie N 13, par conſéquent l'arc Y *z* 13 eſt conſidérablement plus petit en nombre de degrés que l'arc *y* RH, mais les hélices auxquelles ils ſervent de baſe doivent s'élever à même hauteur depuis leur départ H 13, qui eſt de niveau, juſqu'à leur arrivée à la hauteur donnée *y* Y, qui eſt auſſi égale en Y & *y*; donc l'hélice extérieure ſera conſidérablement plus inclinée que l'intérieure ſur H *y*, ce que nous avons déja prouvé ci-devant.

Mais on va voir que le contraire de ces différences d'inclinaiſon arrivera depuis les points *y* & Y vers le petit axe DM; car puiſque les arcs NM & HI ſont ſemblables, en ce qu'ils ſont chacun un quart d'ovale, & que l'arc *y* H eſt plus grand que l'arc YN, l'arc MY ſera plus grand que l'arc I *y*, & cependant les hélices qui les ont pour baſes s'élevent à même hauteur l'une & l'autre, depuis la ligne Y *y*, qui eſt eſſentiellement de niveau à la ligne MI, laquelle eſt auſſi de niveau à une hauteur donnée d'une marche & un tiers, par exemple, de huit pouces; donc la partie d'hélice extérieure YM ſera plus inclinée que celle de l'intérieure *y* I, quoique ſon autre partie Y 13 fût plus roide que l'intérieure *y* H; par conſéquent ces deux hélices ne s'élevent pas d'un mouvement uniforme, donc chacune d'elles fait un jarret reſpectivement en différent ſens, à la jonction des arcs de cercle de leur baſe, ſuivant la ligne Y *y*; *ce qu'il falloit en ſecond lieu démontrer.* Donc ſi l'intérieure eſt réguliere, l'extérieure fait néceſſairement des jarrets, & au contraire.

De cette connoiſſance des hélices ſur une baſe ovale, on conclura facilement que Maître Blanchard n'ayant pas connu d'où venoient les jarrets, n'a pu y apporter un bon remede;

on peut même dire que les irregularités, ou dans les girons des marches, ou dans les arêtes de la courbe rampante du limon, ſont inévitables. Car 1°. ſi l'on veut que l'hélice primitive en dedans ſoit réguliere, l'extérieure ne le ſera pas, ou la ſurface ſupérieure du limon, que j'appelle plano-hélicoïde, ne ſera pas réguliere à ſon tour, parce qu'elle ne ſera pas compriſe entre deux hélices compagnes, ſi l'on prend l'hélice extérieure primitive réguliere; il en ſera de même à l'égard de l'intérieure ſecondaire.

2°. Si l'on veut que les girons des marches au collet ou à la queue, ſelon que le limon eſt concave ou convexe, ſoient parfaitement égaux à la jonction de la courbe rampante, les jarrets de cette courbe ſont inévitables au dedans & au dehors, comme on vient de le démontrer.

3°. Si l'on fait la courbe de l'hélice réguliere, & qu'on veuille qu'elle paſſe par les arêtes des marches, ou parallelement à ces arêtes, il faut que les girons ſoient inégaux au collet, ou à la queue, ſi le limon y eſt, ou ce qui eſt tout-à-fait impraticable, que leurs hauteurs ſoient inégales: c'eſt cependant l'expédient que prend Maître Blanchard pour faire ſa correction du jarret, lorſqu'il dit qu'il ne faut donner que quatre pouces & demi de hauteur à la premiere marche, quoique les autres en ayent ſix, & qu'il faut diviſer le reſte en parties égales, ce qui ne peut en aucune façon ôter le jarret, comme nous venons de le démontrer. Il faudroit diminuer ſur les hauteurs de ſuite proportionnellement, ou élargir & reſſerrer les girons, comme le demanderoit l'hélice de la courbe rampante débillardée & faite ſur une hauteur totale donnée pour un certain nombre de marches, faiſant l'arête de l'hélice primitive du côté le plus apparent, lequel eſt quelquefois le convexe, comme aux rampes des chaires de prédicateurs, fig. 195, & au quartier de vis ſuſpendu, & le concave dans les eſcaliers de vis à jour, ſans s'embarraſſer du parallelisme de cette hélice avec les arêtes des marches, ſi on les veut abſolument égales à la queue ou au collet, ou leur donnant un peu plus & moins de largeur, ſi l'on veut conſerver ce parallelisme de l'arête de la courbe avec celles des angles des marches. Quant à cette correction, ſoit des hauteurs, ſoit des largeurs des girons, il eſt évident qu'elle dépend de l'inégalité des axes des ovales qui rendent les hélices plus ou moins rampantes vers le

grand & vers le petit axe, à quoi Maître Blanchard n'a eu aucun égard.

De ce que nous venons de dire des inégalités des hélices aux arêtes extérieure & intérieure des limons en courbe rampante, il est aisé de conclure que plus les intervalles de ces hélices seront grands, plus aussi les jarrets de la secondaire seront sensibles, si elle est formée sur le même trait provenant des marches égales tracées d'un même centre E; de sorte que si ces intervalles devenoient très grands, comme dans ces vis vûes des deux côtés, à doubles limons apparens vers le creux & vers le rond, comme on en voit souvent à des perrons, les jarrets deviendroient extrêmement sensibles, si on pouvoit les voir tous les deux ensemble; mais alors chacun des limons doit être fait à part relativement à la partie des marches qu'il termine au collet ou à la queue.

Seconde construction de la courbe rampante, lorsqu'elle est faite de pierre de plusieurs pieces.

La différence qu'il y a dans la construction des courbes rampantes de bois avec celles de pierre de plusieurs pieces, consiste en ce que pour les bois on fait les joints en lit à plomb, pour assembler les pieces suivant le fil du bois à tenons & à mortoises, ou à clef, & que pour la pierre il faut faire ces joints en coupe inclinée à l'horison, à peu près perpendiculairement à la direction rampante du limon, afin que les pieces puissent s'appuyer les unes sur les autres, ce qui occasionne une différence de construction. Soit (fig. 198) une portion de couronne de cercle DNEB *n* A, la projection horisontale du limon tournant & rampant, que nous appellons simplement avec les ouvriers, *courbe rampante*, laquelle projection est comprise par deux arcs de cercles semblables A *n* B, DNE, dont le centre commun est en C, & qui ont pour cordes les lignes AB, DE, qui sont traversées à leur milieu par une verticale CMC², prolongée indéfiniment, laquelle est par conséquent perpendiculaire à ces cordes.

Fig. 198.

On menera des paralleles à cette verticale par les points A, B, D, E, pour servir à former l'élevation de la courbe rampante, & on les traversera par une ligne horisontale OR, placée à volonté, pour lui servir de base. Par un point *a* pris

à volonté sur la verticale A a on menera $a\,d$ parallele à OR, *Fig. 198.*
qui donnera le point d sur la verticale D d; puis ayant prolongé l'horisontale $d\,a$ en o^r, où elle coupera la verticale E e, on portera au-dessus du point o^r la hauteur de toutes les marches & des parties des marches comprises entre les points A & B, qui est la même que celle qui est comprise entre les points D & E, qui sera par exemple, la hauteur o^r E^2; & parce que les points B & E sont de niveau, on tirera par le point E^2 l'horisontale $E^2\,b^2$, qui coupera la verticale B b^2 au point b^2, par lequel, & par le point d, on menera l'inclinée $d\,b^2$; & si l'arc AB ou DE est un peu grand, on prendra un point t un peu plus haut que d, pour tirer tT. On tirera aussi par les points d & E^2 la ligne $d\,E^2$, & par les points a & b^2, la ligne $a\,b^2$, qui croisera la verticale du milieu CM au point M; ces lignes sont les projections verticales des cordes AB & DE du plan horisontal, ralongées par la rampe, & ainsi croisées pour que leurs extrémités d & a, b^2 & E_2 soient à même hauteur.

Présentement il faut déterminer la position des joints de lit en coupe sur un plan vertical passant par la corde AB du parement creux de la portion de tour, dont l'arc A n B est la projection, ce que l'on peut faire en deux manieres. Premierement, si l'on veut se contenter, pour abréger l'opération, d'une coupe à peu près perpendiculaire, il suffira de tirer au point a une perpendiculaire aP à la ligne $a\,b^2$, sur laquelle ayant pris à volonté un point P, qui détermine la largeur a P de la courbe rampante, c'est-à-dire, du limon, on tirera par le point P une parallele à $a\,b^2$, qui coupera la verticale B b^2 au au point b, d'où l'on tirera une autre perpendiculaire à la ligne $a\,b^2$ qu'elle coupera au point K, le parallelograme a K b P sera le panneau de doële plate à faire au devant du parement creux & vertical du limon.

Comme cette opération ne fait pas le joint de lit exactement à angle droit sur les arêtes courbes du limon, parce qu'il faut qu'il soit un peu obtus dans la projection verticale pour être droit dans le creux, il faut opérer sur le développement de la surface concave du limon du côté du vuide, & sur celui de la surface convexe du côté des marches, ce qui rend l'opération plus longue & plus embarassante sans beaucoup de nécessité, si l'arc A n B est d'un petit nombre de degrés, comme lorsqu'il est au-dessous du quart de cercle; mais elle sera con-

Fig. 198. venable, si l'arc qu'une des pieces du limon peut comprendre, étoit beaucoup plus grand; nous la mettons ici pour qu'on puisse opérer avec toute la précision possible, quand on le jugera à propos. On rectifiera l'arc de cercle *n* A pour en porter la longueur sur la base OR de l'élevation, depuis son milieu m^o en a^d d'un côté, & en b^d de l'autre.

Par le point a^d on élevera la verticale a^d V, qui coupera l'horisontale *a d* en V, par où on tirera la droite VM, sur laquelle on fera un angle droit MV*u*; la ligne V *u* sera la position du joint de lit en coupe sur le développement, sur laquelle on prendra la largeur V *u* que l'on veut donner au limon dans son parement creux. Par le point *u*, on menera une horisontale *u x*, perpendiculaire à l'axe CM, qu'elle coupera en *x*; & prenant cette longueur *u x* par parties, on la repliera sur l'arc *n* A de *n* en *p*, par où on menera une parallele à l'axe CM, qui coupera la ligne *u x* en un point P, plus près de *x* que le point *u*, par lequel P on tirera au point *a* une ligne *a* P, qui sera la projection verticale du joint de lit en coupe que l'on cherche, ou plutôt ce sera la corde de sa projection qui devroit être une ligne courbe un peu elliptique.

On menera ensuite par le point *u* une parallele à la ligne VM, pour avoir l'arête inférieure du limon; mais comme le point *u* est ici & ordinairement très-près du point P, nous n'avons pas jugé à propos, pour éviter la confusion, de multiplier les lignes qui peuvent se confondre; cette ligne coupera la verticale provenant du développement en un point près de *b*, que je prends aussi pour *b*, à l'intersection de la ligne verticale Bb^2 & de l'inclinée P *b*. On menera par le point *b* une parallele à la ligne *a* P, qui coupera *a* M prolongée en K, où le développement ne peut donner aucune différence sensible, parce qu'il est trop près de l'axe CM; le parallelogramme *a* K *b* P sera la projection verticale du creux intérieur de la piece de limon en coupe.

Pour avoir la projection verticale de la partie convexe du côté des marches, il faudroit faire de même le développement de la surface cylindrique, si l'on vouloit opérer avec une grande précision; c'est ainsi qu'en use M. de la Rue, mais il en résulte un inconvénient qui doit faire rejetter son trait, c'est qu'il rend la surface du lit gauche, au lieu qu'elle doit être plane, parce que les joints montans, qu'on avoit fait paralleles entre eux au développement, ne le sont plus dans le

renveloppement à la projection verticale, d'où il suit que le lit est gauche. Il suffira pour la pratique de mener par le point *m*, où la ligne P *b* coupe celle du milieu MC, une parallele GL à la ligne *d* E², & par le point *d*, une parallele au joint *a* P, laquelle coupera GL au point G, duquel ayant tiré la ligne GP, on aura le trapeze *a* PG *d*, qui sera la projection verticale du lit inférieur de la piece de limon qui fait la courbe rampante. Pour la facilité de l'exécution, on prolongera le côté *a* P en F, où il coupera l'horisontale GF menée par le point G, & alors le panneau de lit se changera en un autre trapeze *a* FGD, dont on verra ci-après l'utilité. *Fig. 198.*

La projection verticale du lit de dessus se tracera de la même maniere; par le point K, on menera l'horisontale KI parallele à OR, qui coupera la ligne de rampe convexe *d* E² au point I, par lequel on menera une parallele au joint K*b*, qui coupera GL au point L; le trapeze KIL *b* sera la projection verticale du lit supérieur, qu'on changera, pour la commodité de l'exécution, en un plus grand KILQ, en prolongeant K *b* jusqu'à l'horisontale LQ. Par le moyen de ces projections verticales, on cherchera les projections horisontales. Premierement, en menant G *g* parallele à CM, on aura le point *g* d'intersection avec l'arc DNE; & menant à la même une parallele F *f*, on aura par son intersection avec la corde AB un quatrieme point *f* du trapeze D *g f* A, qui sera la projection horisontale du lit *d* GF *a*, & en même tems D *gp* A sera celle du vrai lit *d* GP *a*.

La projection du lit de dessus sera un peu différente; on menera par le point L la verticale L *l*, qui coupera l'arc DNE au point *l*, & par I la verticale I *i*, qui donnera sur le même arc le point *i*, on prolongera la corde AB vers *q*; la verticale abaissée du point Q donnera par son intersection le point *q*, & celle qui sera abaissée du point K sur l'arc A *n* B, donnera sur cet arc le point *h*; le pentagone mixte *i l q* B *h* sera la projection du lit de dessus; mais pour la commodité de l'exécution, il convient de prolonger le côté *i h* en *k* où il coupe la corde AB, & du point *k*, élever une verticale K *k*, qui coupera l'horisontale AB en *k*, ce qui change la projection verticale du lit de dessus *h i l q* en une plus grande *k i l q*. Les projections verticales & horisontales étant données, il sera aisé de former les panneaux de lit suivant nos regles générales expliquées au

Fig. 198, & 200. IIIe Livre, dans les probl. X & XI; nous prendrons la méthode du probl. XI, qui employe les diagonales. Par exemple, pour le lit de deſſus, ayant tiré à la projection horiſontale la diagonale *lk*, & à la verticale la diagonale KL, on en cherchera la valeur, parce que l'une & l'autre ſont racourcies par la projection.

Pour cet effet, on prolongera l'horiſontale LQ juſqu'à ce qu'elle rencontre en s^6 la verticale *k*K, ſur laquelle elle donnera la hauteur Ks^6 du point K ſur le point L; on portera enſuite la longueur de la diagonale K*l* de la projection horiſontale en s^6 l^0; puis ayant pris la longueur l^0 *k*, on la portera en en une figure à part, comme à celle cotée 200, pour ſervir de baſe à un triangle K *b l*, qu'on formera avec le côté K*b*, pris à la projection verticale, & la valeur du côté *b l*, qu'il faut trouver en portant la projection horiſontale ſur la ligne Ls^6 de W en s^6; la diſtance s^6 *b* ſera la valeur que l'on cherche, avec laquelle, comme rayon, & du point *b* de la fig. 200, pour centre, on fera un arc, qui coupera celui qui a été fait avec K*b* de la projection verticale au point *b* de la fig. 200; enſuite ſur la même baſe K*l*, on fera un ſecond triangle KI*l* avec la ligne KI, priſe à la projection horiſontale en *k i*, & la valeur de la corde *i l*, qu'on trouvera en portant cette corde du point A en *x*, qui eſt un peu au-delà de L; la diſtance *x* I ſera cette valeur avec laquelle pour rayon, & du point *l* de la fig. 200 pour centre, on fera un arc qui coupera au point I, celui qui aura été fait avec le rayon K*i*, & du point K de la fig. 200, pour centre; le trapeziode K *b l*I ſera le panneau ébauché du lit de deſſus que l'on cherche, lequel eſt un peu plus grand qu'il ne faut d'un triangle mixte K*h b*, c'eſt pourquoi on portera la longueur K*h* du plan horiſontal en *kh* de la fig. 200, & l'on tirera la corde *h b*.

Il reſte préſentement à tracer les côtés courbes de ce panneau *hnb* & I*e*L, qui ſont des arcs d'ellipſe, leſquels ſont ordinairement ſi peu courbes, qu'il ſuffit d'avoir les points de leur milieu pour les tracer avec une regle pliante. Ces points de milieu ſeront faciles à trouver en diviſant les cordes de la projection horiſontale *i l* & *h* B (fig. 198) en deux également aux points 9 & 8, ſur leſquels on élevera les perpendiculaires *e* 9, *n* 8, qui ſeront les fleches de ces arcs qu'on tranſportera à la fig. 200, aux endroits marqués des mêmes lettres *e* 9, *n* 8, &

le

le panneau du lit de dessus sera achevé. On tracera de même celui de dessous, tel qu'on le voit à la fig. 201, par le moyen de la valeur de la diagonale D *f*, qu'on trouvera en portant sa longueur sur l'horisontale *r*F de l'élevation en *rz*; la distance *z d* sera la valeur qu'on cherche, laquelle étant transportée à la fig. 201 en *df*, servira de base commune aux deux triangles *d*G*f*, & *daf*, qui servent à donner les points des angles du panneau; du point *d* pour centre, & de l'intervalle DA pris à la projection, pour rayon, on décrira un arc vers *a* à la fig. 201; & du point *f* pour centre, & de l'intervalle F*d* pour rayon, pris à l'élevation, on décrira un autre arc, qui coupera le précédent en *a* de la fig. 201 : ensuite du même point *f* pour centre, & de l'intervalle *fg* pris à la projection horisontale, on décrira un arc vers G de la fig. 201; & du point *d* pour centre, & de l'intervalle de la valeur de *d*G pour rayon, on en décrira un autre qui donnera le point G; cette valeur se trouvera en portant la corde D *g* de la projection horisontale en *r œ* sur l'horisontale *r*G prolongée, l'intervalle *d œ* sera la valeur demandée. Plan. 107, *Fig.* 198, & 201.

On aura donc le trapezoïde *daf*G (fig. 201) pour l'ébauche du panneau du lit de dessus, qui est trop grand de deux triangles G*f*P & *a* PY, qu'il en faut retrancher. Pour cet effet, on prendra la longueur PF de l'élevation, qu'on portera en P *f* de la fig. 201, & l'on tirera la ligne PG; ensuite on prendra la longueur *p f* de la projection horisontale, qu'on portera sur *f*G de la fig. 201 en *fp*, & l'on tirera la ligne *p a* qui coupera PG en Y; la figure *da* YG sera le panneau que l'on cherche, dont les côtés *de*G, *an*Y seront arrondis, comme ceux du lit de dessus dont nous venons de parler, par le moyen des fleches 5 *n*, 7 *e*, pour changer les arcs de cercles D *e g*, A *n p* en arcs d'ellipses, comme il a été dit au probl. IX du IIe livre.

Il reste présentement à tracer les panneaux de sections cylindriques inclinées, qui sont nécessaires pour former les portions de tour creuse du côté du vuide, & de tour ronde du côté des marches, qui sont les paremens verticaux du limon, c'est-à-dire qu'il faut faire des courbes ralongées de la même maniere que nous l'avons dit pour la courbe rampante d'une piece, page 301. La seule différence qu'il y a, c'est que les joints de lit n'étant pas à plomb, les panneaux du dessus &

Fig. 198. du deſſous ne ſont pas les mêmes; dans cet exemple, le panneau du deſſus eſt la portion de la couronne d'ellipſe d^r I^r H^r a^r, & pour celui de deſſous, c'eſt la portion de couronne g^r, l^r, b^2, p^r, qui ſera une portion de la même ellipſe ſi le vuide eſt circulaire, mais celle ci ſera une portion de couronne d'ellipſe différente de celle du panneau précédent, en ce qu'elle ſera plus ou moins concave, ſelon qu'elle s'approchera ou s'éloignera du grand axe.

La terminaiſon de ces deux panneaux de ſection oblique ſuivant la ligne *de*, ou ſi l'on veut *t* T priſe à volonté, eſt donnée par la prolongation des verticales juſqu'à cette ligne de *p* P en p^2, où faiſant en retour d'équerre p^2, p^r égale à *ζ p* de la projection, on aura le point p^r qu'on cherche; il en eſt de même du point H^r, & des points d^r, I^r, l^r, en dehors.

La maniere de tracer ces arcs d'ellipſes ralongés des arcs de cercles dont on a la projection horiſontale, a été donnée en pluſieurs endroits de cet ouvrage, & en dernier lieu en parlant des joints de tête de la porte en tour ronde ou en tour creuſe.

M. de la Ruë, au lieu des panneaux que j'emploie pour la formation des ſurfaces cylindriques concaves & convexes, ſe ſert des cerches formées ſur les cordes rampantes *a* b^2, *d* E^2, mais cette méthode me paroît plus embarraſſante, & même moins correcte dans l'exécution, parce que pour faire uſage de ces cerches, il faut prendre garde de ne les pas incliner plus ou moins qu'il ne faut à l'égard du plan vertical auquel elles doivent être perpendiculaires, ce qu'il eſt difficile d'obſerver, & qui peut occaſionner de fauſſes plumées dans leur contour.

Nous ne parlons point ici de panneaux de développement pour tracer les hélices ſur les ſurfaces courbes des paremens verticaux; comme les pieces de limon de pierre ſont rarement bien longues, on peut ſuppléer aux panneaux flexibles par l'application d'une regle pliante appuyée ſur les deux extrémités données aux angles de la pierre du côté convexe & du côté concave.

Application du trait sur la pierre.

Ayant dressé un parement pour servir d'une espece de doële plate au devant de la surface concave du limon, qui est en situation verticale, on y appliquera un panneau à cinq côtés pris à l'épure sur la figure $a^r\ b^2\ s\ F^r\ a\ a^r$, dont le côté $a^r\ a$ est à plomb; ce qu'il faut observer pour bien faire l'excavation du parement creux. On abattra la pierre suivant cette ligne $a^r\ a$ avec le biveau formé sur l'angle DAB de la projection horisontale, tenant ses deux branches d'équerre à la verticale $a^r\ a$; puis on fera couler le biveau dans la même situation toujours parallelement à lui-même le long du côté $a\ F^r$, abattant la pierre suivant cette ligne, à laquelle les branches du biveau seront obliques; mais il sera facile de les tenir dans cette situation, en observant que l'une soit parallele à l'arête $d\ a$, & l'autre à une ligne qu'on peut tracer sur le panneau perpendiculairement à l'aplomb $a^r\ a$. Ou plus simplement, ayant tiré une ligne $d\,a$ d'équerre sur $a^r\ a$, & sur le second parement qu'on vient de faire, on prendra dans cette ligne un point d à distance prise à volonté, & par les trois points donnés d, a, F, on fera passer une surface plane, suivant le probl. I du II tome, page 16. Fig. 198

On abattra ensuite à l'équerre toute la pierre qui excede les lignes $a^r\ b^2$ & F s, tant en dessus qu'en dessous, pour y former deux paremens, sur lesquels on appliquera les panneaux de la section oblique; savoir, premierement sur le parement supérieur, le panneau mixte $d^r\ a^r\ k\ I^r$ compris par les trois lignes droites $d^r\ a^r$, $a^r\ k$, $k\ I^r$, & l'arc $I^r\ d^r$; secondement sur le parement ou lit de dessous, on appliquera le panneau mixte $g^r\ F^r\ b^2\ l^r$, posant le point F^r sur le point F à l'angle du parement vertical, & la ligne $F^r\ b^2$ sur le côté F b^2 de ce parement; on abattra ensuite la pierre suivant les côtés droits donnés $I^r\ k$, $k\ b^2$ & $b^2\ l^r$ au lit de dessous, pour former la surface du lit en coupe de dessus. On appliquera ensuite sur les lits en coupe de dessus & de dessous, les panneaux qu'on a tracé aux figures 200 & 201, dans la situation où ils doivent être, posant la ligne droite K q de la fig. 200, sur le côté K b^2 de la figure 198: dans cette situation, on repairera le point h de la figure 200, sur le lit rampant supérieur, & l'on tracera

Fig. 198. le contour du côté courbe I *e* L; on posera de même le panneau de la fig. 201 sur le lit en coupe de dessous, plaçant la ligne *a f* sur le côté *a* F de la fig. 198, & traçant le contour courbe *d e* G.

On aura donc ainsi les quatre côtés de la surface cylindrique convexe, suivant lesquels il faut abattre la pierre pour la former à la regle, dont il faut observer exactement la bonne position en situation de supposition verticale, ce que l'on fera facilement par le moyen d'une seconde regle posée sur l'arête $a^r a$, à laquelle la regle qui sert à former la surface cylindrique doit toujours être parallele; c'est pourquoi il faudra bornoyer celle qui est mouvante par la fixe sur $a^r a$, pendant qu'on la fera couler en l'appuyant sur les lignes courbes, le long desquelles elle doit être appliquée; & la surface convexe cylindrique, qui est celle du côté des marches dans les vis à jour, dans une tour, sera exactement formée. Il faut former de même la surface concave, dont les quatre angles sont donnés par les panneaux de lit, desquels angles il n'y en a que deux dans la surface plane du premier parement qui a servi de doële plate, diagonalement opposés; les deux autres sont repairés en dedans de ce parement sur les lits, l'un au lit de dessus en *h* de la fig. 200, l'autre au lit de dessous en Y, & dans les sections planes rampantes, ils sont renvoyés l'un en arriere suivant la ligne p^r F^r, au lit de dessous, (fig. 198) suivant l'arête inférieure du lit, marquée au panneau *p f* de la fig. 201; l'autre en $H^r s$, au lit de dessus, suivant l'arête inférieure de ce lit au long de son arête, avec la section plane inclinée marquée *s i*, au panneau de la fig. 200.

Sur les points donnés dans chacune des sections planes inclinées, on posera les extrémités de la cerche ou du panneau concave $a^r p^r$ H^r pour celle de dessus, & l'arc p^r H^r b^2 pour la section inclinée du lit de dessous. Ces arcs étant tracés suivant le contour des panneaux, on aura les quatre côtés de la portion cylindrique concave qui reste à faire, laquelle sera creusée à la regle, comme il a été dit pour la convexe, en la faisant couler sur ces arcs, destinés pour lui servir d'appui, parallelement à la ligne verticale donnée sur le panneau vertical $a^r a$.

Il ne reste plus à présent qu'à former les deux surfaces du dessus & du dessous du limon, que nous avons appellé plano-

hélicoïdes, dont les arêtes sont des hélices qu'on pourra tracer avec un panneau flexible, comme nous l'avons dit pour les limons en courbe rampante d'une piece, ou simplement avec une regle pliante posée sur les angles des panneaux de lit correspondans dans chaque surface; savoir depuis le supérieur convexe à l'inférieur convexe de la même section du dessus au dessus, du dessous au dessous, & de même à la surface creuse, ce qui donnera quatre hélices, deux rondes & deux creuses, suivant lesquelles on abattra la pierre à la regle, qui doit être tenue toujours horisontale en s'élevant en tournant, & toujours dirigée à l'axe du cylindre, comme il a été dit au commencement du second tome, pages 41 & 42.

Explication démonstrative.

Puisque nous supposons que la courbe rampante a pour projection horisontale un cercle en dedans & en dehors, il est visible qu'elle doit être à la surface d'un cylindre qui a pour base ce cercle, & parce que le limon est d'une égale épaisseur, il sera terminé par deux surfaces cylindriques, l'une concave, l'autre convexe; la concave est du côté du vuide dans les vis à jour, & du côté du plein dans les escaliers tournans à vuide autour d'un noyau plein, comme sont souvent ceux des chaires de prédicateur. On pourroit donc ébaucher la pierre en portion de cylindre droit sur la base, & y tracer les hélices des arêtes du limon par le moyen de leur développement tracé sur du carton ou sur des lames de plomb, pour être appliqué dans la surface creuse, ou sur la surface ronde; mais comme il y auroit trop de perte de pierre en retranchant les deux triangles solides cylindriques tournés en sens contraire, l'un en dessus du limon à droite, par exemple, l'autre en dessous à gauche; nous avons seulement formé la tranche cylindrique qui comprend les hélices des arêtes les plus éloignées en dessus & en dessous, laquelle tranche est comprise par deux portions de couronne d'ellipses semblables, mais qui ne sont pas équidistantes, comme il est démontré au théor. IV, page 33 du Ier tome; cependant elles produisent des hélices équidistantes, parce que les sections rampantes cylindriques sont obliques à la surface du cylindre, & que les rayons des hélices lui sont toujours perpendiculaires.

Il n'eſt pas néceſſaire de démontrer ici la juſteſſe de l'opération par laquelle nous avons trouvé les ſections planes rampantes du cylindre ſur lequel eſt formé le limon ou la courbe rampante, parce qu'il eſt viſible qu'elle eſt la même que celle du probl. IX du IIe livre, tome I, page 172, qui enſeigne la maniere de trouver les ſections obliques d'un cylindre, d'autant plus que nous l'avons déja mis en œuvre, & démontré au ſecond tome, en parlant de la vis Saint-Giles ronde, tome II, depuis la page 447 juſqu'à la page 453, & démontré à la page 457. Quant à la formation des ſurfaces gauches plano-hélicoïdes, il eſt clair qu'elle eſt conforme à ce qui a été enſeigné de leurs générations au corol. I, page 42, tome II.

REMARQUE.

Il faut remarquer que dans la conſtruction de cette hélice nous n'avons aucun égard aux marches de l'eſcalier de la vis à jour, par les raiſons que nous avons dit touchant les vis de baſe elliptique, où les cordes égales, priſes pour les largeurs des girons, ſoutiennent des arcs inégaux; d'ailleurs cette courbe peut être indépendante de toute marche, comme peut être le couronnement ou l'appui d'une terraſſe rampante, ou celui d'une fenêtre en rampe dans une tour, qui ſont des courbes rampantes de même eſpece que celles des limons des vis à jour. Si l'on entre dans le détail de la conſtruction d'un limon, qui doit faire une eſpece de ſocle parallele à la tangente des arêtes des marches, il y a pluſieurs petites obſervations à faire; par exemple, que ſi le vuide de la vis, c'eſt-à-dire le mur d'échiffre, a pour baſe un demi-cercle, qui ſe joint à deux branches de rampes droites paralleles entre elles, il ne faut pas commencer la diviſion des marches à ſon diametre perpendiculaire à la direction de ces rampes, ou ſi on l'y commence, il faut alonger le limon, parce que dans la rampe deſcendante, il faut qu'il avance en deſcendant de la hauteur de la marche, pour gagner le niveau de la ſuivante; & dans la rampe montante, il faut qu'il s'éleve auſſi d'une partie que donne la hauteur de ce ſocle ſur la tangente de l'arête des marches.

Secondement, que cette partie de limon qui excéde la marche, doit être ſeulement obſervée dans les limons dont les

joints de tête sont à plomb, comme en charpente, où on les fait ainsi pour ne pas couper le fil du bois, & dans les limons où ces joints sont en lit, non pas à plomb mais fort inclinés, comme sont ceux du quartier de vis suspendu, dont nous parlerons ci-après. A l'égard des lits en joints de tête des limons, qui sont perpendiculaires aux arêtes tournantes, ou pour mieux dire à leur développement, comme sont ceux de la fig. 198, dont nous venons de donner le trait, il n'est pas nécessaire de pourvoir à ces excès de longueur sur les marches; ce sont de ces petites choses dont il suffit que l'appareilleur soit averti pour prendre ses précautions dans la destination de sa pierre, ou le charpentier dans la coupe de son bois, parce que l'habitude que l'un a du trait, l'autre de l'assemblage, lui fait d'abord concevoir ce qu'il doit faire, lorsqu'il est prévenu de ces petites remarques.

COROLLAIRE.

Du quartier de vis suspendu.

Si l'on faisoit une portion de limon ou une courbe rampante d'une seule piece, qui fût assez engagée par ses extrémités du haut & du bas dans un mur concave, ou plutôt en angle rentrant, cet ouvrage s'appelleroit *quartier de vis suspendu*, sans égard au nombre de degrés du cercle qui en seroit la projection horisontale. Mais il est visible que si le contour de cette projection étoit un demi-cercle, il faudroit qu'un tel limon fût bien fortement retenu par ses extrémités, pour soutenir un si grand *porte-à-faux*; de sorte que pour donner à cet ouvrage quelque solidité, il ne convient pas qu'il soit plus grand que le quart du cercle dans sa projection, d'où vient le nom de quartier de vis; encore faut-il que les sommiers, qui sont les premiers & les derniers voussoirs, ayent de longues queues bien engagées dans les murs. Il est aussi visible que ce quartier ne peut être fait de pieces dont la direction des lits & de leurs joints horisontaux concourent à l'axe de la vis, comme dans la courbe rampante dont nous venons de parler, parce que les voussoirs étant plus étroits par dedans que par dehors, ils pousseroient au vuide & ne pourroient subsister; c'est pourquoi il faut changer la direction horisontale des lits, en les faisant

paralleles entre eux, & à la perpendiculaire sur le milieu de la corde de l'arc de la projection horisontale du quartier, afin de déterminer leur poussée suivant la direction de cette corde, qui a des appuis à ses deux extrémités dans les murs qui concourent en angle droit ou à peu près, ou aux piédroits d'une tour creuse; car on ne peut solidement établir un quartier suspendu sur une ligne droite.

Il faut donc donner aux lits une direction semblable à celle qu'on donne aux voussoirs d'une porte en tour ronde, & c'est en quoi consiste toute la différence du limon en courbe rampante pour les vis à jour, avec le quartier de vis suspendu, supposant qu'il s'agisse de faire l'un & l'autre en pierre; car s'il s'agit de charpenterie ou de menuiserie, comme aux chaires de prédicateurs, qui sont des quartiers de vis suspendus, le trait peut changer suivant la nature de l'assemblage convenable au fil du bois, & à l'espece du bois qui peut être affermi par les têtes des marches, ou par d'autres moyens dont il n'est pas ici question, comme des barres de fer, sur lesquels on ne doit jamais compter dans l'appareil. Cela supposé, il sera facile de faire le quartier de vis suspendu par les même moyens qu'on a fait la courbe rampante de plusieurs pieces, en changeant seulement la direction des lits en coupe; mais pour ne pas embrouiller le trait de trop de lignes, nous allons en mettre un à part avec une petite différence pour la disposition des cerches ralongées, suivant l'idée du P. Derand, corrigée de l'erreur qu'il fait, & après lui M. de la Ruë, en les traçant en arcs de cercles au lieu d'arcs d'ellipses.

Fig. 202. Soit (fig. 202) le quart de cercle ACB, qui comprend un quartier d'escalier tournant CDE, dont les queues des marches doivent être portées & soutenues en l'air par le limon DABE, qui est une courbe rampante de la même espece que les précédentes, mais dont les pieces ou clavaux sont disposées différemment. On fera l'élévation, c'est-à-dire la projection verticale de ce quartier, comme au trait précédent, supposant qu'il comprenne quatre marches marquées au plan horisontal z, 2, 3, E, on portera sur la ligne de base $A^o B^o$ la hauteur de ces quatre marches de E^o en E^2, & l'on tirera les lignes $D^o E^2$ & $A^o B^2$, qui seront les cordes des sections planes qui coupent la surface creuse D 2 E, & la ronde ANB obliquement; de sorte que les arcs qu'elles soûtendent sont des

des arcs d'ellipſes, qu'il ſera facile de décrire par pluſieurs points, comme nous l'avons déja dit pluſieurs fois, pour changer un arc de cercle, qui eſt la baſe d'un cylindre, en arc d'ellipſe qui ſoit la ſection de ſa ſurface coupée par un plan, dont l'inclinaiſon à l'axe du cylindre eſt donnée. Il ne s'agit que de diviſer la corde *de* rampante proportionnellement à la corde DE de niveau, par le moyen des verticales *t r*, *m* M, *t r*, & de porter ſur ces diviſions d'abſciſſes, les ordonnées *r z*, M 2, *r* 3, quarrément ſur les diviſions correſpondantes *r* 1^n, M 2^n, *r* 3^n, pour avoir les points *d*, 1^n, 2^n, 3^n, *e*. On tracera de la même maniere la courbe extérieure ANB ſur la courbe donnée *a b* rampante correſpondante à la corde AB de niveau, & l'on aura les cerches ralongées néceſſaires pour former les paremens creux & rond, c'eſt-à-dire concave du côté de l'eſcalier, & convexe dans le parement extérieur, ce qui eſt le contraire des vis à jour dont nous avons parlé ci-devant. Fig. 202.

Il faut préſentement donner une coupe convenable aux lits des clavaux, de maniere qu'ils concourent tous à un même point de la ligne du milieu M *m*; ce point ou centre de coupe peut être pris à volonté, cependant il faut obſerver qu'il ne ſoit ni trop loin ni trop près, parce que s'il eſt pris fort près des clavaux, il rendra les arêtes des coupes fort aiguës vers *e*, & s'il eſt pris trop loin, la partie ſuſpendue en aura moins de force. Suppoſant ce point en *m*, on menera par les points G & *e* les lignes *e m*, G *m*, qui ſeront les coupes du ſommier ſupérieur en *e m*, & de l'inférieur en G *m*. Entre ces deux joints de lit on fera la diviſion de la quantité de clavaux qu'on ſe propoſe de faire, par exemple ici ſeulement de trois. M. de la Rue prend pour termes de cette diviſion l'intervalle IK de l'interſection des coupes avec la projection verticale D^o E^2 de la corde rampante de la partie creuſe au bas des clavaux; mais le P. Derand faiſant apparemment attention que ſi l'on prend les termes des diviſions au haut ou au bas du ſommier, & qu'on en diviſe l'intervalle en parties égales, l'arête oppoſée eſt diviſée par cette opération en parties inégales, ne fait ſa diviſion ni au haut ni au bas, mais ſur une ligne H *h*, moyenne entre les hauteurs des arêtes du dedans & du dehors, c'eſt-à-dire du creux & du rond, en partageant *e f* en H, & G D^o en *h*; ce qui me paroît plus convenable que la maniere de M. de la Ruë, qui n'a pas ſenti ou fait cas de cette raiſon. On

Fig. 202. divisera donc l'intervalle L *l* en trois également aux points 5, 6, par où l'on tirera du centre de division *m* les coupes *m* 1^v, *m* 2^v, *m* 3^v, qui couperont les cordes rampantes en des points marqués au-dessus x^1, x^2, x^3, & au-dessous y^1, y^2, y^3, & z^1, z^2, z^3.

Présentement on doit considérer ces lignes $x^1 z^1$, $x^2 z^2$ &c, comme les projections verticales des surfaces planes des lits des clavaux, qui sont perpendiculaires au plan vertical passant par la corde de la projection DE ou AB, ce qui revient au même, & la projection horisontale de ces même lits sera le quadriligne mixte $X^e z^e x^y z^1$, dont on prolongera les côtés droits en P & *k* pour l'appliquer à la corde DE, alors cette projection sera $X^e z^e$ P *k*. Ces deux projections étant données, il sera facile de tracer les panneaux du lit de chaque voussoir, prenant, par exemple, celui du lit de dessous du premier clavau, qui est celui du lit de dessus du sommier; on portera donc la ligne GK de l'élevation de la fig. 202 en *g k* de la fig. 203, avec ses divisions V, *q*, par lesquelles on lui menera des perpendiculaires indéfinies, dont on prendra les longueurs au plan horisontal; ainsi on portera la longueur P X^e de la fig. 202, en *g*X; *p* O en *r o*; *s t* en *q t*; *k* Z^e en KZ, & l'on aura la courbe X *o t* Z pour le côté convexe, qu'on tracera par ces quatre points avec une regle pliante.

Fig. 202. & 203.

Ensuite, pour le côté concave, on prendra P *x* qu'on portera de *g* en *x*; *p y* de *r* en *y*; *t u* de *q* en *u*; & *k z* de la fig. 202, en *k* z^n de la fig. 203; puis on tirera les lignes à peu près droites de *y* en X, & de z^n en *t*, & une courbe par les quatre points *x*, *y*, *u*, z^n, le quadriligne mixte *y* X *t* z^n sera le panneau que l'on cherche. On tracera de même les panneaux des coupes tirées par les points 1^n, 2^n, 3^n, en quoi l'on voit la conformité de ce trait avec le précédent.

Il faut observer que quoique nous ayons tiré des lignes droites de *y* en X, & de z^n en *t*, ces lignes considérées dans la rigueur doivent être courbes, parce que ce sont des sections d'une surface plano-hélicoïde par des directions qui ne tendent pas à l'axe vertical de l'hélice, mais elles sont si peu courbes que ce seroit s'amuser à la bagatelle que d'en vouloir chercher la coubure par plusieurs points, ce qui n'est pas difficile, mais qui rendroit l'opération inutilement plus longue & plus composée; aussi le P. Derand & M. de la Rue ont-ils pris toutes

ces lignes pour des droites, ne s'étant apperçu d'aucune courbure dans l'exécution, quoiqu'il s'en trouve en effet dans le raiſonnement, parce que par la génération des ſurfaces mixtilimes hélicoïdes, dont nous avons parlé au commencement du ſecond tome, page 41, il eſt clair qu'il n'y a de lignes droites que dans les ſections par l'axe de l'hélice. Pour ne pas faire les panneaux plus larges qu'il n'eſt néceſſaire, il n'y a qu'à retrancher la partie *x d* par une parallele à *g k* menée en *x d*, & de même au lit de deſſus une partie égale à celle qui a été retranchée au lit de deſſous, qui eſt le plus près du parement de ſuppoſition vertical pour l'application du trait. *Fig.* 202.

Application du trait ſur la pierre.

Ayant dreſſé un parement pour ſervir en quelque façon de doële plate, c'eſt-à-dire de ſurface plane verticale, par exemple, pour un premier clavau, on y appliquera le panneau du trapezoïde G 1e 1^n K pris à l'élévation de tout l'eſpace qu'occupe ce clavau; puis on abattra la pierre à l'équerre ſur les deux côtés des joints montans pour former deux nouveaux paremens, ſur leſquels on appliquera les panneaux de lit, poſant la ligne *g k* de la fig. 203, ou ſa parallele *x d*, ſur l'arête du lit & du premier parement, & traçant le reſte du contour ſur lequel on repairera les points o^a o^n pour tracer par ces deux points la ligne inſenſiblement courbe concave o^a o^n. On en fera de même au lit de deſſus, puis avec une cerche formée ſur l'arc concave *d* 2^n *e*, on fera une plumée au premier parement, obſervant de poſer les parties de cette cerche immédiatement ſur celles de l'arête rampante, à laquelle chacune convient ſuivant les aplombs pris dans l'épure, c'eſt-à-dire, par exemple, que le point N ſoit préciſément à l'équerre ſur le point 1^n, parce que cette cerche étant elliptique, ce point N ne doit être ni plus haut ni plus bas ſans donner un faux contour, en ce que l'ellipſe devient plus creuſe vers les bouts que vers le milieu, je veux dire du côté des extrémités des grands axes, ce qui eſt évident.

Par le moyen de ces plumées, & d'une ligne aplomb repairée de l'arête du deſſus à celle du deſſous, par exemple, l'aplomb 1^v K, on creuſera la ſurface verticale concave cylindrique à la regle tenue toujours parallelement à elle-même &

Fig. 202. à la premiere ligne, dont on a déterminé les extrémités suivant la verticale 1^v K. On formera de même la surface convexe du dehors, puis posant une regle pliante sur les angles du panneau de lit du dedans au dedans, aux arêtes du dessus & du dessous, on tracera dans le creux les deux courbes des hélices que doivent former ces arêtes, & on achevera, comme il a été dit au trait précédent, pour former les paremens gauches supérieurs & inférieurs des limons ou courbes rampantes.

Quatrieme espece de vis.

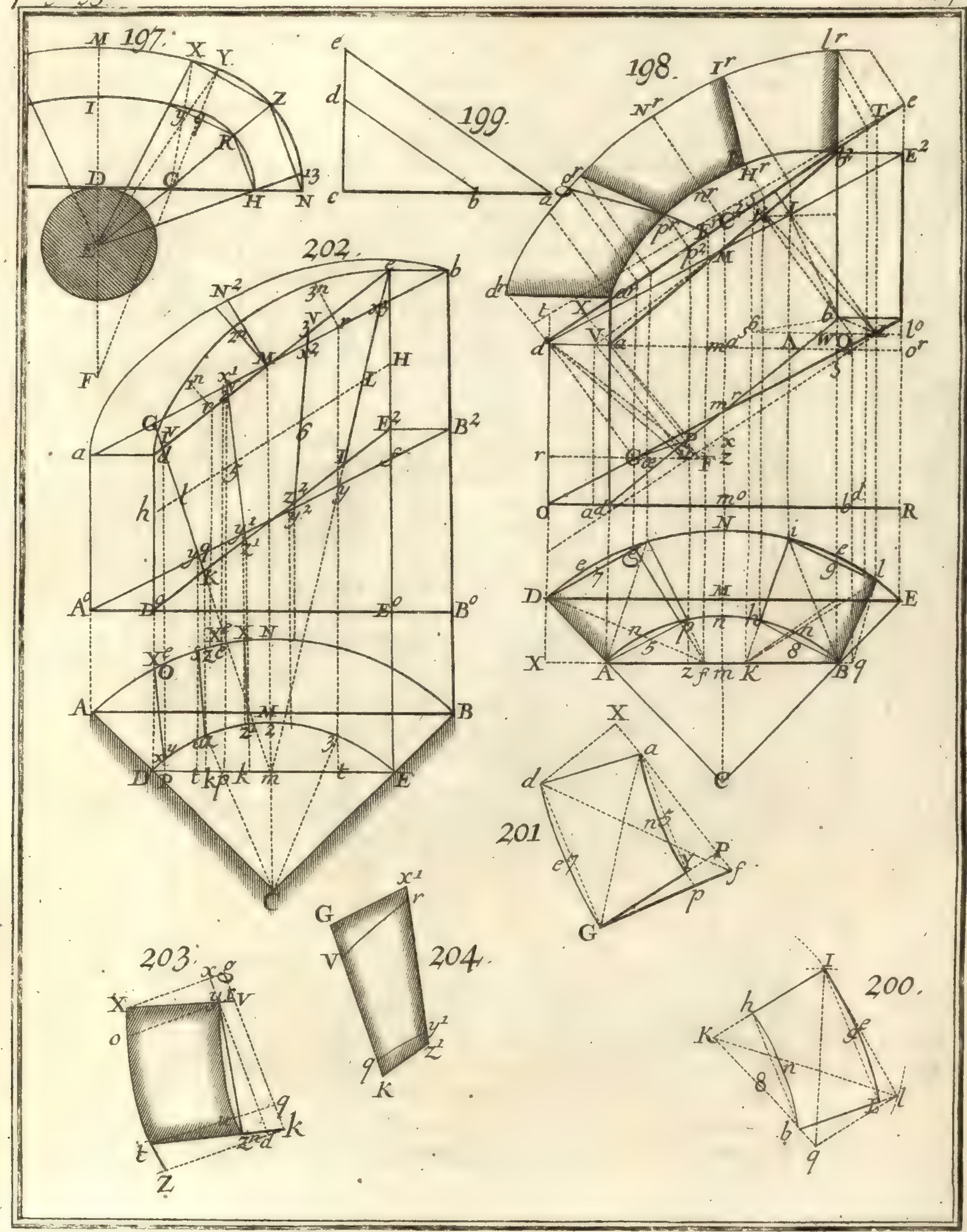
Lorsque la base est une spirale & l'hélice en limace.

En termes de l'art,

Des volutes, colimaçons & colonnes torses.

Toutes les hélices dont nous avons parlé jusqu'ici, font leurs révolutions sur des surfaces cylindriques de base circulaire ou elliptique; celles dont il s'agit présentement font leurs révolutions sur des surfaces coniques sphéroïdes, ou cylindroïdes, de base en spirale: telles sont les volutes en situation quelconque. Nous nous attachons ici particulierement à celles que les ouvriers appellent *colimaçons* d'échiffres, que l'on exécute ordinairement au bas des escaliers, tant pour en orner l'entrée que pour former une espece de colonne qui affermit les rampes de fer dont on forme les appuis dressés sur le limon.

Pl. 108, Fig. 207. Ayant choisi & tracé l'espece de spirale dont on veut faire la base du colimaçon, comme par exemple à la fig. 207, la spirale circulaire *b* 2 4 C, on lui tracera une compagne équidistante, à la distance qu'on voudra, suivant l'épaisseur que l'on donne au limon, & l'on en fera l'élévation suivant les regles ordinaires expliquées au II livre, page 313, & au livre III, page 356, (Tome I) en élevant des perpendiculaires sur la base, qu'on terminera suivant telle progression qu'on jugera à propos, observant d'accorder autant qu'il sera possible sans jarrets la pente du limon droit avec la naissance de celle du colimaçon, & de cette jonction on viendra en baissant toujours moins jusqu'à l'œil du colimaçon, afin qu'il ne s'enfonce


197.
198.
199.
200.
201
202.
203.
204.

pas en finiſſant tout d'un coup dans un trou. La ſerie que l'on doit obſerver dans cette diminution ou augmentation de hauteur des perpendiculaires élevées ſur la baſe, eſt aſſez arbitraire, & au choix de l'architecte, qui doit ſe régler ſur le nombre des révolutions de la ſpirale de ſon plan horiſontal: nous propoſerons ici la maniere la plus ſimple, & qui eſt d'un bel effet.

Soit (fig. 207) la ſpirale double ou volute b H 5 C 2^{i} a, le plan horiſontal du colimaçon, on diviſera le cercle de révolution GHEF en autant de parties égales qu'on voudra, par exemple en ſix, par leſquelles on tirera du centre C des rayons prolongés, qui couperont la ſpirale convexe aux points 1, 2, 3, 4, 5, &c. par leſquels on tirera, par le probl. XXVIII du IIe Livre, (Tome I, page 235) des perpendiculaires à la ſpirale 1 1^{i}, 2 2^{i}, 3 3^{i}, &c. qui donneront les directions des coupes des joints, ſi l'on fait le colimaçon de pluſieurs pieces, mais qui ſerviront particulierement à former l'élévation de la partie concave proportionnellement à la ſurface convexe. On fera enſuite l'élévation du colimaçon en prenant une ligne de baſe BA, ou celle d'un petit ſocle au-deſſus OR, à laquelle on menera des perpendiculaires indéfinies venant des points repairés au plan horiſontal, comme b F, g G^{e}, 7 K, 4 4e, &c, ſur leſquelles on portera les différentes hauteurs que doivent avoir les points du contour des arêtes du colimaçon, ſuivant la progreſſion de l'inclinaiſon qu'on ſe propoſe de donner au limon tournant & rampant. *Fig. 207.*

Cette progreſſion de pente eſt arbitraire, on peut la varier d'une infinité de façons, en faiſant plonger la volute dans ſon œil, ou en relevant l'œil au bas de la volute; nous propoſerons ici une maniere qui me paroît une des plus convenables. Suppoſant, par exemple, que le colimaçon termine trois marches, comme on l'a repréſenté en perſpective à la fig. 205, on prendra la ſomme de la hauteur de ces trois marches, que je ſuppoſe égale à FO de la fig. 206, pour en faire le rayon d'un quart de cercle CD 10, qu'on tracera à part (fig. 209) & qu'on inſcrira dans un quarré DC 10 P, dont on diviſera le côté P 10 en dix parties égales, ſur leſquelles on élevera des paralleles à DP, qui couperont le quart de cercle aux points 1^{h}, 2^{h}, 3^{h}, &c. les lignes 1^{h} 1, 2^{h} 2, 3^{h} 3, &c. feront les hauteurs décroiſſantes du colimaçon. Pour rapporter ces hauteurs

Fig. 205. & 206.

Fig. 209.

Fig. 206 & 207. à l'élévation 206, il faut diviſer le contour de la ſpirale de la baſe 207 en dix parties, non pas égales entre elles, mais inégales ſuivant la progreſſion de la ſpirale, qui ſe reſſerre à meſure qu'elle approche de ſon centre; ce qu'il eſt facile de faire, en diviſant le contour de ſon cercle de révolution GHEF en parties égales, comme ici en ſix, dont les diametres prolongés donneront les points 1, 2, 3, 4, 5, &c. au contour extérieur de la ſpirale.

A l'égard des diviſions du contour intérieur $gh5^i$, elles ſeront données par les perpendiculaires menées à la ſpirale extérieure, comme $1\,1^i$, $2\,2^i$, $3\,3^i$, &c. leſquelles pourront être tracées à vue d'œil, ou plus exactement par le problême XXVIII du IIe livre, cité ci-deſſus (Tome I, page 235): ces perpendiculaires donneront les points 1^i, 2^i, 3^i, &c. On tirera donc par tous les points de la ſpirale 1, 2, 3, 4, &c. 1^i, 2^i, 3^i, &c. des perpendiculaires à la ligne OR, ſur leſquelles on

Fig. 209. portera les hauteurs correſpondantes de la fig. 209: ſavoir, la hauteur $1^h\,1$ en $1^o\,1^x$ de la fig. 206, la hauteur $2^h\,2$ de la fig. 209 en $2^o\,2^x$ de la fig. 206: ainſi du reſte; & par tous les points trouvés, tant au contour extérieur F 1^x 2^x 4e, &c. on tracera à la main une courbe telle qu'on la voit ponctuée depuis F en h^x, parce qu'elle eſt cenſée derriere l'objet apparent, & continuée par une ligne ſuivie depuis h^x 4e juſqu'en K^n. On trouvera de même la courbe de l'arête intérieure G^e h^x N n, & l'on aura la projection verticale du colimaçon, de laquelle on peut faire uſage pour ébaucher la pierre.

Mais pour tracer ces arêtes avec plus de préciſion & de commodité, il convient de faire le développement des deux ſurfaces extérieure & intérieure du colimaçon. On rectifiera le contour de la baſe extérieure b H 4 7 5^i, qu'on portera par petites parties de ſuite ſur une horiſontale o 10 de la fig. 209, faiſant la longueur $o\,1^a$ égale à l'arc b 1 de la fig. 207; $1^a\,2^a$ égale à l'arc 1, 2 de la ſpirale 207: $2^a\,3^a$ égale à l'arc 2, 3, &c, & par tous les points 1^a, 2^a, 3^a, &c, ayant élevé des verticales indéfinies, on les terminera par des horiſontales menées par les points 1^h, 2^h, 3^h, &c. qui donneront par leurs interſections avec ces verticales les points 1^d, 2^d, 3^d, 4^d, &c: la courbe menée par tous ces points à la main, ou avec une regle pliante, ſera celle du développement de l'arête extérieure du limon tournant au colimaçon.

De la même maniere, ayant développé le contour intérieur de la ſpirale $g\ h\ 5^i$ du point o au point N, à la fig. 209, avec ſes diviſions 1^i, 2^i, 3^i, &c, on aura pour développement de l'arête intérieure la courbe D $1^n\ 2^n\ 3^n\ n$, dont tous les points $1^n\ 2^n$, &c, ſont ſur les mêmes horiſontales que les points $1^d\ 2^d$ du contour extérieur, afin que cette courbe ſoit toujours équidiſtante horiſontalement de ſa compagne, quoiqu'elle ſoit ſi différente dans le développement. Ces développemens ſerviront à faire des panneaux flexibles ſur du carton, du fer blanc, ou des lames de plomb, qu'on appliquera ſur les ſurfaces cylindroïdes, qui auront pour baſe les ſpirales de la fig. 207. *Fig. 207 & 209.*

Il eſt viſible que cette progreſſion de lignes croiſſantes ou décroiſſantes tirées du cercle ſuivant une progreſſion de ſinus verſes s^2 10, s^3 10 (fig. 209) peuvent être changées en un autre de ſinus droits $s^2\ 2^h$, $s^3\ 3^h$, &c. ce qui auroit donné une courbe d'inclinaiſon différente au limon du colimaçon. Il eſt encore viſible que ſi au lieu du quart de cercle D 10, on avoit pris un quart d'ellipſe ſur le grand ou ſur le petit axe, on auroit eu encore une courbe d'inclinaiſon différente, & que ſi l'on vouloit faire reſſortir l'œil de la volute, au lieu d'un quart de cercle on auroit dû prendre un plus grand arc, qui auroit remonté au-deſſus de la ligne PX, qui eſt le ſocle où nous voulons que ſe termine la volute.

Une des principales attentions que l'on doit avoir dans le choix de la courbe d'inclinaiſon du limon du colimaçon, eſt de faire enſorte que le limon droit qui termine les marches ſupérieures ne faſſe pas de jarret avec le limon tournant du colimaçon à la ligne horiſontale de leur jonction, c'eſt pourquoi il faut faire le profil du limon droit à la premiere marche au-deſſus du colimaçon, par exemple, en $a\ b$, fig. 208, à l'égard d'une horiſontale DC ; puis ayant porté la longueur b 1 du plan horiſontal, rectifiée en $o\ 1^a$ de la fig. 209, on élevera la verticale $1^a\ 1^d$, qu'on terminera par l'horiſontale $1^h\ 1^d$, & l'on tirera la ligne D 1^d dont on comparera l'inclinaiſon avec celle du profil du limon droit $a\ b$ de la fig. 208. Si ces lignes ſont paralleles, c'eſt une marque que le limon droit & ſa continuation au colimaçon en tournant ne feront pas de jarret ; ſi au contraire le profil du limon droit étoit plus couché, comme en $a\ d$ de la fig. 208, il faudroit lui tirer une parallele par le

point D, qui couperoit l'horiſontale menée par le point 2^h au point 2^d, ce qui marque que le changement d'inclinaiſon du limon ne doit commencer qu'au point 2 du colimaçon à la fig. 207, dont la ligne $o\,2^a$ de la fig. 209, eſt le développement.

Application du trait ſur la pierre.

Fig. 207 & 209. Ayant dreſſé un parement pour ſervir de lit horiſontal, on y appliquera le panneau de la partie du colimaçon que la grandeur & la hauteur de la pierre peut comprendre; par exemple 2 H 4, 7, 2, dont on tracera le contour & les repaires des diviſions 2, 3, 4, 5, 6, &c, puis on abattra la pierre ſuivant ce contour, à l'équerre au lit de deſſous, & on vuidera de même, autant qu'il ſera poſſible, l'intervalle qui reſte entre les circonvolutions, pour en former un cylindroïde ſemblable à un rouleau de carton de l'épaiſſeur du limon.

Ce corps ainſi formé, on élevera des perpendiculaires ſur le lit de deſſous par les points repairés à ſon contour 2, 3, 4, &c, qu'on fera égales à celles qui correſpondent à ces nombres dans le quart de cercle de la fig. 209, & par les points de leurs hauteurs, on tracera avec la main ou avec une baguette ronde, droite & flexible, le contour de l'arête extérieure, l'intérieure ſe tracera de même; puis avec la regle poſée de niveau ſur les points correſpondants de la ſurface concave à la ſurface convexe, on abattra la pierre, comme il a été dit pour la courbe rampante ſur une baſe elliptique, c'eſt-à-dire en tenant toujours la regle quarrément ſur la tangente de la ſurface; avec cette différence qu'au limon elliptique la regle doit être dirigée au centre ſur les axes de l'ellipſe, & qu'ici elle ne doit jamais être dirigée au centre de la ſpirale, mais toujours un peu à côté, comme on le voit à la fig. 207 par les directions $1\,1^i$, $2\,2^i$, $3\,3^i$, mais elle doit toujours être tenue de niveau.

Au lieu de ſe donner la peine de tracer les courbes par des points ſur les deux ſurfaces concave & convexe de l'ébauche du colimaçon, on peut tout d'un coup en tracer les arêtes par le moyen d'un panneau flexible tracé & contourné ſur l'épure du développement de la fig. 207; ſavoir D o 10 X pour le parement convexe extérieur, & D o N n 4^n D pour le parement creux, dans lequel on appliquera le panneau de carton ou de lame de plomb, qu'on fera plier enſorte qu'il joigne exactement

à la surface concave, & que son côté droit *o* N soit posé sur l'arête du lit de dessous; dans cette situation, on tracera nettement l'arête du limon; on en usera de même pour le côté convexe.

Seconde espece de limaces cylindroïdes.

En termes de l'art,

Des colonnes torses quelconques.

Vignole, à ce que dit d'Aviler, est le premier qui ait donné des regles pour tracer les colonnes torses, & tous les Architectes ont suivi son trait; cependant on peut dire qu'il ne vaut rien, si l'on a intention de faire un corps régulier dans son espece, parce qu'il lui a donné, sans s'en appercevoir, des épaisseurs inégales à chaque circonvolution, comme nous le démontrerons ci-après. Cette espece de colonne est un composé de trois hélices; savoir, 1°. d'une demi-circonvolution en limace, qui s'ouvre depuis le milieu de la base jusqu'à la douzieme partie de la hauteur; 2°. d'une hélice cylindrique en continuation, qui comprend cinq circonvolutions égales; & enfin 3°. d'une seconde limace égale à la premiere, mais tournée en sens contraire, qui va en se fermant depuis la onzieme partie de la colonne jusqu'à son sommet, où elle se termine à l'axe droit, que les Architectes appellent *Cathete*. Nous avons dit que la seconde hélice étoit cylindrique, parce que Vignole ne donne aucun renflement à la colonne torse dans sa formation.

Pour donner au trait de la colonne torse toute la généralité des variations dont elle est susceptible, nous la formerons de deux limaces inégales tournées en continuation en sens contraire, dont les intervalles des circonvolutions seront inégaux contre l'usage ordinaire, afin que le lecteur se rende maître de cette petite matiere, après quoi nous examinerons la colonne torse de Vignole, qui est la seule usitée depuis long-tems. Soit (fig. 211) le cercle A 30 B 18 la projection horisontale de la plus grande amplitude que l'on veut donner à l'axe tortueux hélicoïde de la colonne, qui doit être composé d'une double limace, dont la premiere s'éleve du milieu de sa base en s'ouvrant jusqu'à une certaine hauteur, & la seconde reprend en continuation à cette hauteur, & remonte au sommet, où elle *Fig. 211.*

Fig. 211. vient en se resserrant pour finir au milieu du couronnement, au même axe droit ou cathete au bas duquel la premiere limace avoit pris son origine. D'où il suit que si l'intervalle du diametre AB est plus grand que les deux demi-épaisseurs du corps cylindroïde plié en colonne torse, il restera au milieu un vuide, comme dans les vis à jour, avec cette différence qu'il ne sera pas cylindrique, ni continué du haut en bas, mais en forme de fuseau, comme HLK*l*, qui se ferme en H & en K, & dont la partie la plus renflée n'est pas au milieu, dans la supposition que les limaces soient d'inégale hauteur.

Comme ces deux limaces doivent se joindre par continuation, elles doivent avoir pour amplitude commune le diametre AB, & comme l'on veut qu'elles fassent chacune un même nombre de circonvolutions sur des hauteurs inégales, il faut déterminer les inégalités croissantes ou décroissantes de leurs intervalles, ce que l'on peut faire de différentes manieres & suivant différens rapports : nous nous arrêterons à la plus commode, qui est celle du rapport des tangentes. Sur la base de la colonne *b a* prolongée, on prendra un point R à distance arbitraire de la cathete 60^x Q, par exemple, de deux fois la longueur du diametre AB, plus ou moins, selon la hauteur de la colonne & suivant le plus ou le moins d'inégalité que l'on voudra donner aux circonvolutions; car il est clair qu'elles seront d'autant moins différentes que le point R sera loin, & au contraire d'autant plus inégales qu'il sera près. De ce point R, pour centre, & d'un rayon pris à volonté, on décrira un arc de cercle Q 60, qui sera déterminé au point 60 par la ligne R 60^x tirée au sommet de la cathete; on divisera cet arc en tel nombre de parties que l'on voudra, qui sont ici soixante, lesquelles ne sont pas des dégrés, en commençant par le diviser en 6, & chaque sixieme en dix. Par toutes ces divisions 10, 20, 30, &c, & par le point R, on tirera des lignes droites qui couperont la cathete 60^x Q en soixante parties inégales, par chacune desquelles on tirera des horisontales indéfinies paralleles à la base *a b*, & perpendiculaires à la cathete, que l'on cottera des mêmes nombres des divisions primitives, comme 10^x, 20^x, 30^x, &c.

Il faut présentement faire les projections des limaces supérieure & inférieure de la colonne, qui doivent être la même tournée en sens contraire, parce que l'inférieure s'élargit en

montant, & la ſupérieure ſe rétrecit. Ces projections doivent être des ſpirales qu'on peut décrire comme la ſpirale d'Archimede, dont nous avons parlé au II livre (tome I, page 195). Mais comme deux ſpirales de cette nature tournées en ſens contraire, quoique ſur un même centre, ne ſe touchent pas, mais ſe croiſent en angle ſaillant à leur interſection, on peut ſe relâcher de la régularité de la deſcription de cette courbe, & ſe contenter d'une imitation imparfaite par des arcs de cercles, afin que la jonction des limaces inférieure & ſupérieure ſe faſſe ſans jarret, ou du moins ſi l'on ſe ſert de la ſpirale d'Archimede retournée, il faut effacer l'angle de la projection par un arc de cercle tangent à l'une & à l'autre : nous opérerons avec moins de délicateſſe pour plus de facilité. *Fig. 211.*

Soit le rayon C 30 diviſé en deux également au point *6*, on décrira ſur C *6*, comme diametre, le demi-cercle C 3, *6*; puis ayant diviſé l'intervalle *6*, 18, qui eſt le reſte du diametre de la projection, en deux également, on décrira le demi-cercle *6*, 10, 18, qui touchera le précédent au point *6*, & le demi-cercle de projection 18 A 30 au point 18; la ſpirale C *6*, 18, A 30 ſera la projection de l'axe tortueux de la limace inférieure, qui s'étend juſqu'au point de hauteur 30^x au-deſſus de Q. La même ſpirale ſera répétée au ſommet de la colonne en ſens contraire, c'eſt-à-dire la partie de la droite poſée à la gauche pour ſervir de projection d'une maniere renverſée, du haut en bas, à l'axe de la limace ſupérieure qui ſe referme en montant.

Il faut préſentement rapporter les parties de ces ſpirales de projection aux diviſions de l'axe droit ou cathete, par leſquelles on a mené des horiſontales indéfinies; c'eſt pourquoi il faut que le contour de la ſpirale ſoit diviſé en un même nombre de parties inégales que l'axe l'a été par les ſécantes provenant du point R; ainſi puiſque nous avons diviſé cet axe en *60* parties, il faut auſſi que la ſpirale ſoit diviſée en *60* parties auſſi inégales. La progreſſion de cette inégalité devroit être la même que celle des tangentes, ſi la choſe valoit la peine d'être faite avec grande préciſion; mais dans une choſe de peu d'uſage, nous nous contenterons des à peu-près faits à vue d'œil.

Premierement, puiſque les tangentes, depuis la baſe juſqu'à la diviſion 10^x, ſe ſurpaſſent d'un excès à peu-près égal,

Fig. 211. on pourra diviſer également le petit demi-cercle C 3, 6 en ſix parties égales, & le ſecond demi-cercle 6, 10, 18 en douze parties; enſuite le troiſieme demi-cercle 18, A 30 en douze autres, non pas égales, mais un peu élargies à meſure qu'on s'éloigne du centre C, ſe réglant à vue ſur le rapport des intervalles de l'axe 10^x, 20^x, 30^x, &c. On en fera de même à la ſpirale ſupérieure en ſens contraire, c'eſt-à-dire, en s'élargiſſant vers le centre.

Si l'on vouloit opérer avec plus de préciſion, il faudroit rectifier le contour de la ſpirale, & le diviſer proportionnellement aux parties de l'axe auxquelles elles répond, ce qui eſt fort aiſé; obſervant, par exemple, que cette ſpirale coupe trois fois le diametre 30, 18; ſavoir, au point 6, au point 18 & au point 30. Ainſi puiſque la hauteur totale Q 30^x eſt diviſée en 30 parties, chaque demi-révolution complette en doit contenir 12, leſquelles font enſemble 24 parties, à quoi ajoutant le quart de révolution, qui doit en contenir ſix, on aura trente parties en circonférence de ſpirale, comme on en a trente en hauteur donnée ſur la baſe pour la premiere limace, qui monte en s'ouvrant. Par la même raiſon la ſupérieure, qui monte en ſe reſſerrant, doit être diviſée en même nombre de parties, parce que toute la hauteur a été diviſée arbitrairement en ſoixante.

Préſentement, puiſque les parties de la ſpirale ſont relatives à celles des hauteurs des lignes horiſontales menées par les diviſions de l'axe droit, il eſt clair qu'en menant des paralleles à cet axe par les diviſions de la ſpirale correſpondantes à celles de la hauteur, on aura par l'interſection de ces lignes les points de projection verticale de l'axe courbe de la colonne torſe; ainſi la verticale menée par le point 10 de la ſpirale, coupant l'horiſontale menée par le point 10^x de l'axe, donnera le point y de l'axe courbe; l'interſection de la verticale 10 z avec l'horiſontale z 20^x menée par le point 20^x de l'axe droit, donnera le point z de la projection verticale de l'axe courbe de la colonne torſe; ainſi des autres. De même la verticale abaiſſée de la ſpirale ſupérieure par le point 35 de ſa diviſion, qui eſt faite en continuation de celle de la ſpirale de la baſe, donnera par ſon interſection avec l'horiſontale 35^x Y, le point Y de l'axe courbe en projection verticale; celle qui vient de la diviſion 50, coupant l'horiſontale 50^x X, donnera

le point X de même axe; ainsi du reste. La projection verticale de l'axe étant tracée par plusieurs points, comme on la voit à la fig. 211, on la répétera à part, comme à la fig. 210, puis avec le rayon donné DA pour la demi-épaisseur de la colonne, & d'autant de points que l'on voudra prendre sur l'axe courbe, comme en *c*, *c*, *c* près & à volonté, on décrira des cercles, auxquels on menera une courbe à la main, qui les touche sans les couper, tant d'un côté que de l'autre, & l'on aura l'élévation de la colonne. *Fig.* 210 & 211.

Présentement si l'on veut faire une colonne torse réguliere un peu renflée vers le tiers de sa hauteur, il est visible qu'au lieu des intervalles inégaux des circonvolutions, on doit diviser la cathete en autant de parties égales qu'on veut de circonvolutions; ainsi l'opération devient plus simple, parce qu'on doit supprimer celle qui dépend du secteur de cercle Q 30 R: au reste on fera l'élévation de l'axe courbe de la même maniere, & les contours de la colonne comme nous venons de le dire, & non pas suivant le trait de Vignole, que voici. Il divise le cercle de la base de la colonne en huit parties égales, & la hauteur en quarante-huit, par chacune desquelles il mene des paralleles à la base, comme E*p*, *eq*, CP, (fig. 212) qui lui servent à trouver l'axe courbe de la colonne, de la même maniere que nous avons fait ci-devant; nous supposons ici la courbe P *anmcs*; puis ayant déterminé son épaisseur, il en porte la moitié de part & d'autre de l'axe courbe, comme en *m* E & *mp*, *ne* & *nq*, O*e* & OQ, &c; puis par les points trouvés E*e*, *e*, *p*, *q*, Q, il trace les contours de sa colonne, qui sont parfaitement semblables à celui de l'axe courbe, ce qui ne convient pas à l'uniformité de l'épaisseur de la colonne, comme on va le voir. *Fig.* 212.

Démonstration de l'irrégularité de l'ancien trait de la colonne torse de Vignole.

Il est sans doute de la régularité de la colonne torse qu'elle soit faite d'un corps rond d'épaisseur uniforme dans toutes ses parties; or la colonne tracée suivant la construction de Vignole change continuellement d'épaisseur d'une circonvolution à l'autre: donc elle n'est pas réguliere, ni formée par un corps exactement rond dans toutes ses sections perpendiculaires aux tan-

Fig. 213. gentes de l'axe courbe. Pour prouver la mineure, soit une portion d'axe courbe K *a b c d* considérée comme composée d'une infinité de petites lignes droites différemment inclinées à l'horison, comme le sont en effet toutes les petites cordes d'une hélice projettée sur un plan vertical; ainsi la partie *a b* peut être considérée comme verticale, la partie *b c* comme inclinée à l'horison, par exemple, de 30 degrés, & la partie *c d* de 60, plus ou moins.

Cela supposé, il est clair que la véritable épaisseur de la colonne à la partie de l'axe *a b* verticale sera l'épaisseur horisontale *e m*, & *m p*; sur l'inclinée *b c*, l'épaisseur doit être prise sur l'inclinée FG perpendiculaire à *b c*, & égale à *e p*; mais par la construction de Vignole cette épaisseur est prise en E *h* & *h* P parallelement à *e p*, donc le point E est au dedans de l'épaisseur uniforme de la colonne de la quantité FE. Or supposant l'angle E *h c* de 30 degrés, la longueur E *i* ne sera que la moitié de E *h*, laquelle hypoténuse E *h* est égale par la supposition à F *i*: donc dans ce cas la colonne se trouve rétrecie en EP d'une moitié de l'épaisseur qu'on lui a donnée en *e p*; par conséquent si le corps de la colonne est rond, c'est-à-dire si la section en *e p* est circulaire, la section en E *p* sera ovale, & si la section en *e p* n'est pas circulaire, la colonne ne sera pas exactement ronde, ce qu'il falloit démontrer.

Il est donc visible, à la seule inspection de la fig. 213, que l'ancien trait qui donne le contour *e* E *e* d'un côté & *p* P *p* de l'autre, s'écarte considérablement des vrais contours *e* F *x e*, & *p y* G, qui font la colonne torse d'épaisseur uniforme. D'où il suit que les courbes hélicoïdes, cylindriques, ou en limace des côtés opposés de la projection verticale de la colonne ne doivent pas être semblables à la courbe de son axe, contre la pratique du trait de Vignole, ce que nous avons déja démontré ailleurs en d'autres occasions, lorsque nous avons parlé de la vis Saint-Giles ronde, où nous avons montré que les hélices compagnes, quoiqu'équidistantes entre elles, ne sont pas pour cela semblables, parce que celle qui approche de l'axe droit vertical est plus roide que celle qui s'en éloigne davantage, laquelle est plus couchée; ainsi de suite. D'où il suit encore que l'axe courbe ne partage pas en deux également toutes les sections horisontales de la colonne; car supposant, ce qui est possible, les points *n* & *b* de la fig. 213 réunis en un seul, il est

clair que F n eſt plus grand que E h, qui eſt par la conſtruction égale à no ; donc F n eſt plus grande que no, par conſéquent le trait de Vignole, qui porte des parties égales de part & d'autre du point de l'axe n, ne peut donner qu'un faux contour, ce qu'il falloit démontrer. *Fig. 213.*

Donc pour corriger le trait de Vignole, l'axe courbe étant tracé, il en faut venir au nôtre, en traçant une grande quantité de cercles ou d'arcs à droite & à gauche de cet axe, pour mener par leurs extrémités une courbe tangente, qui eſt une épicycloïde différente de chaque côté. On pourroit auſſi, ce me ſemble, faire encore une petite réforme au trait de Vignole, qui ſeroit de faire les deux limaces du bas & du haut un peu plus hautes, en leur faiſant faire une circonvolution complette au lieu d'une moitié à chacune; ma raiſon eſt qu'étant ainſi plus alongées, elles ſe joindroient plus inſenſiblement à l'hélice cylindrique qui fait le corps de la colonne. Enfin, ſi l'on veut lui donner du renflement, il en faut venir à notre premier trait, ſans cependant rehauſſer ni rebaiſſer les intervalles des circonvolutions que d'une quantité peu ſenſible à la vue, ce que l'on peut faire en éloignant beaucoup le point R de l'axe droit Q 60x.

Application du trait ſur la pierre ou ſur le bois.

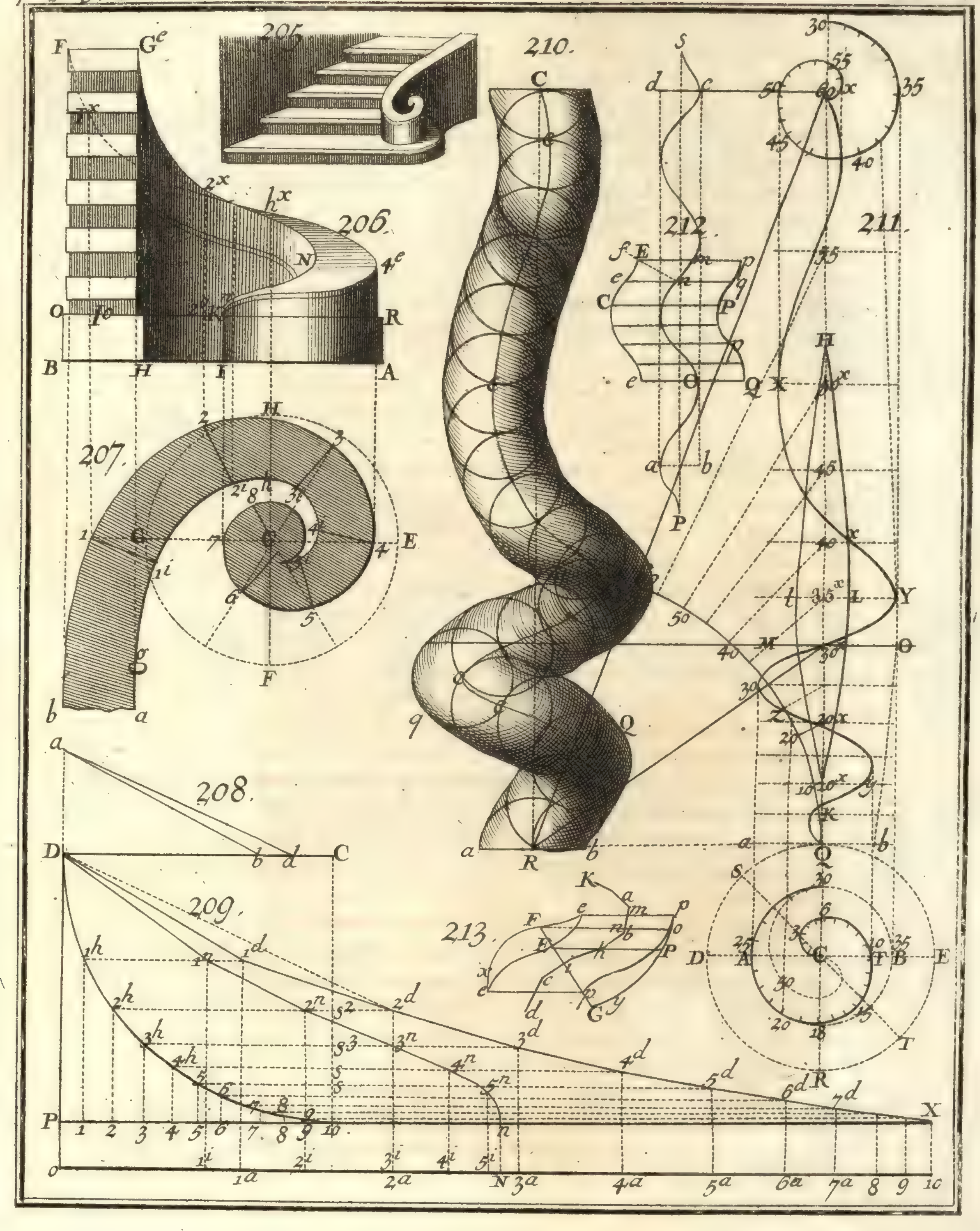
Si la colonne torſe eſt cylindrique, comme celle de Vignole, on commencera par former un rouleau du diametre & de la longueur de la colonne, ou de la hauteur que la pierre pourra porter, ſi elle eſt faite de tambours, & ayant diviſé le cercle de la baſe en huit parties égales par quatre diametres, on mettra une regle ſur un des diametres, où on la fera tenir par quelqu'un, puis on en poſera une autre à l'autre bout de la colonne ſur le centre de la baſe oppoſée, qui ſera celle du ſommet, ſi la premiere eſt le lit de deſſous, qu'on dégauchira en la bornoyant par la premiere regle, la faiſant tourner ſur le centre, enſorte que l'une couvre l'autre ſans la croiſer; à la vue on marquera les deux points où cette ſeconde regle coupe la circonférence du lit ſupérieur, & on la diviſera comme celle du lit de deſſous en huit parties, par leſquelles & par celles du lit de deſſous, on tirera des lignes droites ſur la ſurface du rouleau cylindrique, leſquelles ſeront des paralleles à l'axe droit ou cathete.

On divisera chacune de ces lignes en 48 parties égales, & l'on menera de l'une à l'autre, en montant d'une partie, la ligne courbe qui marquera la partie la plus saillante de chaque circonvolution de l'hélice. Ensuite, pour la creuser, on levera deux cerches opposées sur l'élévation que l'on a fait de la colonne torse, avec lesquelles on creusera des plumées qui donneront le contour ondé vertical des côtés opposés, ayant soin de tenir le plan, j'entends la surface plane de ces cerches par leur milieu, dirigé à l'axe droit de la colonne, sans quoi elles donneront de fausses plumées; les milieux de ces mêmes cerches un peu remontées ou rebaissées suivant les points donnés à la surface du rouleau, serviront à faire d'autres plumées sur les huit paralleles à l'axe droit, & par ce moyen on abattra la pierre de plumée en plumée assez près pour ne pas se tromper.

Quand je dis que les milieux de ces cerches serviront, étant posées un peu plus haut ou plus bas, pour faire de nouvelles plumées, j'entends seulement parler de la partie cylindrique qui est comprise entre les deux demi-circonvolutions qui sont en limaces, l'une à la base, l'autre au sommet, parce que les contours de ces deux extrémités sont differens de ceux du fust cylindrique entre elles.

Présentement, si au lieu de la colonne torse ordinaire, on en veut faire une à circonvolutions inégales & en limace, il faut commencer par faire un corps rond en fuseau émoussé par les deux bouts, semblable au fuseau du noyau vuide HLK*l*, ou pour en donner une idée plus nette, on fera une colonne renflée, sur laquelle on tirera, comme à la précédente cylindrique, des lignes courbes qui ne seront pas paralleles à l'axe droit, mais qui seront dans le même plan de la section par cet axe.

On divisera ensuite ces lignes en parties inégales, telles que les donne l'épure de la fig. 211, que nous prenons pour exemple, & on tirera d'une division à l'autre en montant, les lignes hélicoïdes des parties les plus saillantes de la colonne. On levera ensuite des cerches des contours opposés, suivant lesquelles on fera deux plumées; mais à cause de l'inégalité des circonvolutions, il faudra faire plusieurs élevations; par exemple, celle de la fig. 210, qui a été faite sur le diametre DE de la fig. 211, ne pourra servir que pour cette position, il en faudra


205.
206.
207.
208.
209.
210.
211.
212.
213.

faudra faire une autre ſur le diametre QR qui ſera différente : enſuite une autre ſur le diametre ST, ainſi de ſuite, autant qu'on le jugera à propos, pour faire de nouvelles plumées toujours dirigées à l'axe droit & de l'une à l'autre ; on abattra enſuite la pierre ou le bois comme les plumées l'indiqueront, ce qui demande de l'adreſſe & de l'attention pour bien évuider la colonne ſans jarrets.

CHAPITRE XII.

Appendice concernant le diſpoſitif à la conſtruction des voutes.

LES diſpoſitions à la conſtruction d'une voûte conſiſtent en deux choſes. L'une à régler l'épaiſſeur des piédroits, qui eſt néceſſaire pour leur donner une force capable de réſiſter à ſa pouſſée, c'eſt-à-dire à l'effort qu'elle fait pour les écarter, & s'ouvrir. L'autre à régler la force des ceintres de charpente qui doivent ſoutenir les vouſſoirs pendant qu'on la bâtit, juſqu'à ce que la clef y ſoit miſe, afin qu'ils puiſſent en ſoutenir toute la charge ſans en être écraſés.

I.

De la pouſſée des voûtes.

Quoique le détail de la conſtruction des voûtes ne ſoit pas du ſujet de cet ouvrage, les meſures que l'on doit prendre pour en établir ſolidement les ſupports y paroiſſent tellement annexés, que les auteurs qui ont traité de la coupe des pierres, ont cru devoir donner des regles pour déterminer l'épaiſſeur des piédroits, afin qu'ils ne ſoient pas renverſés par l'effort qu'elles font pour s'ouvrir ; mais malheureuſement ils n'en ont donné que de mauvaiſes, qui ont ſans doute eu beaucoup de part à ces fâcheux accidens de chûtes prématurées, qui ont couvert les architectes qui s'étoient fiés à cette regle, d'une honte qu'ils ne méritoient pas, car elle devoit leur ſervir d'excuſe avant que de ſavans mathématiciens en euſſent démontré la fauſſeté, & donné de meilleures.

Cette regle dont je parle eſt celle du P. Derand, que Blon-

del & le P. Dechalles, qui étoient cependant mathématiciens, ont ſuivi ſans examen, & en dernier lieu M. de la Rue, qui a ignoré apparemment que M. de la Hire en avoit donné une autre, démontrée 16 ans avant qu'il eût publié ſon livre. M. Gauthier, inſpecteur & directeur des ponts chauſſées, qui a eu connoiſſance de cette regle, l'a rejettée pour en chercher une meilleure, ſans en comprendre ni la conſtruction ni la démonſtration, comme il le confeſſe ingénuement dans ſa *Diſſertation ſur les piles des ponts* (page 4). *M. de la Hire*, dit-il, *ce ſavant du ſiecle, prétend avoir démontré la pouſſée des voûtes.* A ce début on s'attend qu'il va découvrir quelque erreur; point du tout, il y trouve ſeulement à redire (page 6) qu'il n'a pu l'entendre, & par conſéquent que cette regle étant au-deſſus de la portée des ouvriers, elle leur eſt inutile. *Tant que nos penſées*, ajoute-t-il, *ne ſeront pas aiſées à pénétrer aux moins ſavans, elles ne ſeront pas inſtructives, & par conſéquent elles deviennent inutiles à la poſtérité :* mais, avec ſa permiſſion, ne ſuffit-il pas que nous puiſſions en profiter par la médiation des plus ſavans, qui nous expliquent ce que nous n'entendons pas? Les ouvrages d'Euclide, d'Apollonius, d'Archimede, &c. ont-ils été inutiles à la poſtérité, parce que les moins ſavans n'entendent pas le grec, & qu'ils contiennent des choſes difficiles à concevoir aux ouvriers & à des plus ſavans; ce n'eſt pas une raiſon pour autoriſer les fauſſes regles qui peuvent être à leur portée, que de dire qu'ils ne ſont pas en état d'entendre celles qui ſont émanées du calcul algébrique; il ſuffit que ceux qui préſident à la conſtruction des voûtes, ſoient aſſez dociles pour demander l'explication de ce qu'ils n'entendent pas.

Notre auteur, qui n'eſt pas un artiſte ſans étude, & qui ſait que les mathématiciens n'avancent rien ſans preuve, auroit pu ſe faire expliquer ce que ſignifioient les expreſſions algébriques de M. de la Hire, & il auroit vu que la hauteur des piédroits, l'épaiſſeur, & la charge de la voûte étoient néceſſairement compliquées dans la recherche de l'effort de ſa pouſſée : d'où il auroit conclu que la nouvelle regle qu'il avoit imaginée, n'entrant pour rien dans l'une ni dans l'autre de ces conſidérations, elle ne devoit pas être meilleure que celle du P. Derand, qui a les mêmes défauts, & que ce qu'il prenoit pour une démonſtration de ſa prétendue regle n'étoit qu'une pure illuſion. Il pourra peut-être me dire que je demande plus de cir-

conſpection qu'il n'eſt néceſſaire, puiſque dans un extrait de l'aſſemblée de l'académie de Montpellier de l'année 1732, on trouve une nouvelle regle pour déterminer l'épaiſſeur des piédroits des voûtes, dans laquelle il eſt expreſſément dit qu'*on ne doit pas s'embarraſſer de la hauteur qu'ils doivent avoir.* Ce ſeroit faire tort à cette illuſtre académie, que de croire que ce diſcours y ait été inſéré ſans correctif. Le ſavant académicien qui donne cette regle s'eſt expliqué qu'il ne la *donnoit pas pour géométrique*, mais ſeulement pour la commodité des ouvriers, & qu'il ajoutoit beaucoup à l'épaiſſeur néceſſaire au ſeul équilibre; & parce que les différences des hauteurs ordinaires dans la pratique n'augmentent pas les épaiſſeurs au-delà de celle qu'il a jugé néceſſaire, on peut par cette précaution ſe diſpenſer de faire attention à la hauteur des piédroits, mais non pas à l'épaiſſeur & à la charge de la voûte, à laquelle le P. Derand, ſes ſectateurs, & M. Gautier n'ont eu aucun égard. On verra ci-après par un problême que M. Daniſy m'a fait l'honneur de m'envoyer, les différences d'augmentations d'épaiſſeur de piédroits que produiſent leurs différentes hauteurs : preuve qu'il ne compte pas ces différences pour rien.

Des différentes hypotheſes qui ont ſervi à la recherche de la pouſſée des voûtes.

I.

Le premier mathématicien qui ait travaillé à déterminer l'épaiſſeur que les piédroits des voûtes doivent avoir pour réſiſter à l'effort de leur pouſſée, a été M. de la Hire, de l'académie des ſciences, qui joignoit à une profonde théorie une grande connoiſſance des arts, particulierement de l'architecture. Ayant remarqué que la plupart des voûtes dont les piédroits avoient été trop foibles pour en ſoutenir la pouſſée, s'étoient fendues vers les milieux des reins, entre l'impoſte & la clef, il a conſidéré la partie du ſommet compriſe entre ces deux fentes comme un ſeul vouſſoir en forme de coin, & les piédroits joints au quart de la voûte compris entre l'impoſte & la fente de chaque côté, comme ne faiſant qu'un ſeul corps avec cette partie; deſorte qu'il conſidere dans une voûte en berceau circulaire trois ſolides différens, l'un au milieu qui eſt une moitié de la voûte, & les deux autres qui en ſont des quarts

comme étant joints aux piédroits, & sur cette hypothese il calcule l'effort que le coin du milieu fait pour écarter ses deux apuis latéraux.

I I.

Quoique cette premiere hypothese fournisse une solution très-sûre pour la pratique, M. Couplet, de la même académie, a jugé qu'on pouvoit trouver avec plus de précision l'effort de la poussée des voûtes, en considérant en particulier chaque voussoir, comme un coin qui faisoit effort pour écarter ses collatéraux; & parce que ces coins peuvent être considérés comme des corps polis, ou comme grenus & raboteux, il a examiné le résultat de chacune de ces supositions, pour déterminer l'épaisseur des piédroits.

I I I.

M. Danisy, de l'académie de Montpellier, pour se délivrer de la nécessité de toute hypothese, a consulté l'expérience, en faisant faire des modeles de voûtes de différens ceintres qu'il a chargé sur la clef, ou dont il a diminué la force des apuis de leurs piédroits au point où elles commencent à s'ouvrir, pour voir ce qui arrivoit au moment de leur destruction, & en tirer des conséquences propres à déterminer l'épaisseur des piédroits; mais quoiqu'il ait donné une regle pour les ouvriers, il n'a pas encore rendu publique celle qu'il a promise dans l'extrait de l'assemblée de l'académie de Montpellier, en 1732. Nous allons parler de chacune des solutions de ce problême.

PROBLEME I.

L'épaisseur d'une voute cylindrique, sa charge, & la hauteur de ses piédroits étant donnés, trouver l'épaisseur qu'ils doivent avoir pour en soutenir la poussée.

Ce problême peut être résolu de plusieurs manieres différentes, comme nous venons de le dire.

Premiere solution, pour la premiere hypothese d'un seul coin comprenant le quart de la voûte, vers la clef.

En suivant la même hypothese, on peut trouver l'épaisseur des piédroits demandée par deux manieres, ou par le calcul,

ou par une conſtruction géométrique. Quant à la premiere, je n'ai rien à ajouter à celle qu'a donné M. Belidor dans le livre intitulé *la Science des Ingénieurs*, où il a trouvé une équation, dont il a fait une application à la pratique par le calcul, d'une maniere très-claire & très-aiſée pour toutes les voûtes cylindriques ſimples, & pour les platebandes. Pour la ſeconde voie, qui eſt celle de la conſtruction ſans calcul, avec la regle & le compas, qui eſt plus commode & plus à la portée des ouvriers, nous donnerons celle de M. de la Hire, que M. Gautier a regardé (page 6) comme inintelligible, & l'on verra qu'elle n'eſt pas d'une exécution plus difficile qu'un grand nombre des traits de la coupe des pierres, qu'on trouve dans les livres du P. Derand & de M. de la Rue, dont les appareilleurs font uſage tous les jours.

Pour donner un exemple intéreſſant ſur ce ſujet, & appuyer ce que nous avons à dire par l'expérience, je propoſerai ici un magaſin à poudre d'une grandeur un peu au-deſſus de l'ordinaire, & des mêmes meſures que celui qui fut exécuté en 1732 dans une ville de la frontiere, lequel, par la foibleſſe de ſes piédroits, s'écroula avant que d'être totalement déceintré. Soit (fig. 214) la fig. AHED la moitié du profil d'un bâtiment voûté en berceau, dont la moitié du ceintre à la doële eſt le quart de cercle BM*h*, & dont l'extrados eſt un égout de comble en ligne droite HA, paſſant à la diſtance LM de la doële, où eſt ſa moindre épaiſſeur. Soit auſſi la hauteur donnée BP du point B de la naiſſance de la voûte, au-deſſus du rez-de-chauſſée PE; il faut trouver une ligne BX, qui détermine l'épaiſſeur du piédroit XBP*y*, de force ſuffiſante pour contre-balancer l'effort de la voûte qui tend à écarter le point B qu'elle pouſſe pour s'ouvrir & tomber. Plan. 109, *Fig.* 214.

Par le centre C du demi ceintre BM*h*, qu'on ſuppoſe ici circulaire, ayant élevé la verticale CH, parallele au piédroit BP, on diviſera l'arc B*h* en deux également en M, par où l'on menera une ſeconde verticale MV, & l'horiſontale indéfinie NW, qui coupera CH en F. On tirera du centre C par M la ligne CL, qui coupera AH en L. On meſurera enſuite la ſurface mixte quadrilatere LH*h*M, compriſe par l'arc M*h* de la doële, & les trois lignes droites LH, H*h*, LM, en prenant tout le triangle LHC, dont on retranchera le ſecteur de cercle M*h*C, ce que l'on peut faire ſans calcul avec la regle

Fig. 214. & le compas, comme nous allons l'enseigner, pour la commodité des ouvriers. Ayant divisé la ligne LC en deux également en *m*, on menera par le point *m* la ligne *m k* parallele au côté LH, & par le point H une autre H *k* parallele à LC, qui coupera la précédente au point *k*; le rectangle L *k* sera égal au triangle rectangle CLH, dont il faut retrancher un secteur de cercle CM *h*. On divisera l'arc M *h* en deux également au point 2, & l'on rectifiera l'arc *h* 2 qu'on portera en *h d* perpendiculairement sur CH, le rectangle C *d* sera égal au secteur CM *h*.

Il faut présentement retrancher ce rectangle C*d* du rectangle H*m*, ce qui se fera en réduisant C *d* à même hauteur ou largeur que le parallelograme H*m* (par la 44[e] du I[er] liv. d'Eucl.). Sur BC prolongée on prendra CO égale à C *m*, & l'on tirera par les points O & *h* la ligne O *x*, qui coupera *i d* prolongée en *x*; on portera la longueur *dx* en L *e* sur LH, & l'on tirera *e t* parallele à L *m*; le rectangle H *t* sera la valeur de la surface quadriligne mixte L *m h* H que l'on cherche. On prendra ensuite la racine quarrée de cette surface, en portant le côté *e t* en *e* K; puis ayant divisé KH en deux également en *c*, du point *c* pour centre, *c* K ou *c* H pour rayon, on fera un arc qui coupera *e t* en *y*; la ligne *e y* sera la racine quarrée que l'on cherche.

Présentement on portera cette racine quarrée du point M en *g* sur l'horisontale MF, & du même point M en G sur la verticale MV; par les points G & F, on menera GF, & par le point *g* la parallele *g* S, qui coupera MV en S. On tirera ensuite par le point V, où la verticale MV coupe la ligne horisontale du rez-de-chaussée, la ligne VF, & par le point S, on lui menera une parallele SY, qui coupera MF en Y. Par le point C, on tirera CT perpendiculaire à VF, qui coupera FMN au point T; on prendra ensuite la moitié de MY qu'on portera de T en N, puis en rétrogradant on portera la distance PV de N en *u*; la longueur F *u* sera portée de l'autre côté en FW pour avoir le point W.

Du point M pour centre & pour rayon MY, on décrira le demi-cercle Y *q* R, qui coupera MV en *q* & MN en R; du point W pour centre & de l'intervalle WR pour rayon, on décrira l'arc RZ, qui coupera MV en Z; la longueur Z *q* est celle que l'on cherche pour déterminer l'épaisseur du piédroit en BX ou P *y*, parce que nous le supposons à plomb sans talud.

Résultat suivant des mesures données.

Supposant des mesures à ce bâtiment telles qu'elles sont marquées par l'échelle au dessous de la fig. 214, on trouvera que le rayon ou demi-diametre BC de la voûte en berceau étant donné de 30 pieds, la moindre épaisseur LM aux reins de 3 pieds, celle à la clef H *h* de 10, & la hauteur du piédroit de 13 pieds & demi, l'épaisseur cherchée pour ce même piédroit a été trouvée par la construction de 11 pieds.

Observation sur l'expérience.

L'expérience a fait voir qu'un bâtiment construit sur les mesures qu'on vient de détailler pour la hauteur des piédroits, la largeur du ceintre, & la charge de son épaisseur aux différens endroits de la voûte, mais dont les piédroits n'avoient que 9 pieds d'épaisseur, n'a pu subsister, quoique appuyés par des contreforts de 4 pieds de queue, & de 6 pieds d'épaisseur, espacés de trois en trois toises, parce que la poussée de la voûte a fait écarter les piédroits à l'imposte en les couchant en talud, de sorte que la voûte s'est aussi ouverte & enfoncée. Il est certain que si ces piédroits avoient eu deux pieds d'épaisseur de plus, comme le demande l'opération fondée sur l'hypothese de M. de la Hire, l'accident ne seroit pas arrivé, parce que dans l'état où les choses étoient, il est visible que les puissances de la poussée de la voûte & de la résistance des piédroits approchoient déja beaucoup de l'équilibre, puisque les parties décceintrées dans la plus grande longueur de la voûte, ont subsisté quelques heures avant que de s'écrouler, de sorte que deux pieds d'épaisseur de plus auroient infailliblement fortifié les piédroits au-delà du nécessaire; cependant suivant cés mesures, ils n'auroient encore été que dans l'état d'équilibre, auquel il n'est pas de la prudence de l'architecte de se fixer; il convient d'y ajouter quelqu'épaisseur de plus, ou bien des contreforts.

On peut conclure de cette expérience, que les regles du calcul & de l'opération, fondées sur l'hypothese de M. de la Hire, sont très-sûres pour l'état d'équilibre entre la poussée de la voûte & la résistance des piédroits, & que si l'on y ajoute quelque renfort, on se met hors de soupçon de fracture de la

voûte. Je ne dis rien de l'épaisseur de la maçonnerie qu'on peut épargner par le moyen des contreforts, M. Belidor en a donné le calcul; cette construction expose le bâtiment à des fractures, si leurs queues ne sont un peu épaisses & assises sur un fond très-solide, & bâties d'une pierre de taille qui soit d'assez bonne consistance, comme il l'a lui-même fort judicieusement observé, parce que ce sont des appuis où se fait tout l'effort de la poussée, lesquels s'enfoncent d'autant plus facilement dans le sol, qu'ils sont étroits & avancés au-delà du mur.

De la poussée des voûtes en ceintres elliptiques.

Premierement,

Des surhaussés extradossés.

Dans l'exemple précédent, l'extrados étoit d'une nature différente de la doële, puisque la doële étoit circulaire, & l'extrados en ligne droite, ce qui formoit une épaisseur de voûte par-tout inégale; ici nous supposons, ce qui est de plus ordinaire dans les bâtimens, que l'extrados est un arc concentrique ou équidistant de la doële, & que cet arc est elliptique, d'une ellipse dont le grand demi axe est vertical. Pour ne pas multiplier les figures, nous prendrons pour moitié du profil, celle de l'arc rampant de la fig. 217, que nous supposerons être telle en ARM*he*, sur la hauteur du piédroit donné AR. Ayant divisé la moitié R*h* en deux également en M, on menera par ce point une tangente M*t* à l'arc elliptique, (par le prob. III du II livre) à laquelle on tirera une perpendiculaire MS^x^, qui coupera la verticale du milieu *eh* au point S^x^, duquel on fera usage comme du point C de la fig. 214.

Fig. 217.

Au reste l'opération sera en tout parfaitement égale, & même un peu plus simple, à cause de l'uniformité de l'épaisseur de la voûte; par exemple, pour trouver la racine quarrée de la surface de la partie LM*h*H, on divisera l'épaisseur de la voûte LM en deux également en *m*, par où l'on menera l'arc *mn* équidistant de l'arc M*h*, & l'on portera cet arc moyen *mn* dans un endroit à part, comme à la fig. 215, où on l'étendra en ligne droite *mh*, à laquelle on ajoutera la longueur *h*H, qui est l'épaisseur de la voûte de la fig. 217, pour faire sur la voûte *m*H, comme diametre, un demi-cercle *m*XH, qui

Fig. 215.

qui coupera hX, perpendiculaire sur mH, au point X; la ligne hX sera la racine quarrée de la surface du profil d'une partie de la voûte LMhH, qu'on portera de M en g & de M en G, pour continuer l'opération de la même maniere que la fig. 214, laquelle donnera la longueur qZ pour l'épaisseur du piédroit RX que l'on cherche. *Fig. 217.*

SECONDEMENT.

Pour les voûtes elliptiques surbaissées.

Soit (fig. 219) le ceintre surbaissé ponctué IEd, & son extrados iH7. Ayant divisé l'arc IE en deux également en 2, on menera par ce point 2 une tangente indéfinie 2, 3 (par le probl. III du II livre), à laquelle on tirera une perpendiculaire 2 S^x, qui coupera la verticale du milieu de la clef E S^x au point S^x, au-dessous de la ligne des impostes Id, duquel point on se servira, comme du point C de la fig. 214, pour tirer une ligne S^x Q^u, perpendiculaire à la ligne Ae, qui coupera l'horisontale 2 Q^u au point Q^u, qui se trouve par cette construction beaucoup plus éloigné que le point Q, provenu de la construction du plein ceintre Ihd de la même figure, d'où résulte une plus grande épaisseur de piédroit; au contraire de l'exemple précédent du ceintre surhaussé, où le point S^x de la fig. 217 se trouve au dessus de la ligne des naissances XRC : d'où il résulte que la perpendiculaire tirée de ce point S^x à la ligne FV, donne un point T de section avec l'horisontale MT beaucoup plus près de la ligne du milieu he, que ne seroit celui qui proviendroit du plein ceintre, parce que le point G^o, d'où partiroit la perpendiculaire sur VF, est au-dessous du point S^x. *Fig. 219.*

On voit à la fig. 218 l'extraction de la racine quarrée de la surface. On a rassemblé à la fig. 219 les deux constructions du plein ceintre & du surbaissé pour en faire la comparaison, où l'on voit que leurs différences proviennent des différentes inclinaisons des tangentes L 4 & 2, 3, qui ont été menées sur les milieux des arcs ILh & I 2 E, qui donnent les différentes hauteurs des points C & S^x. Nous ne parlons pas ici des piédroits en talud qui rendent l'opération beaucoup plus composée, parce qu'ils ne sont pas fort communs dans les bâtimens les

plus usuels, comme les magasins à poudre, &c, & que nous devons en parler sur une autre hypothese.

TROISIEMEMENT.

Pour les arcs rampans.

Fig. 217. Si le ceintre d'un arc rampant est un composé de deux arcs de cercles, comme à la fig. 217, l'arc R *h* qui est composé de l'arc RM *i*, dont le centre est sur la ligne de l'imposte basse en C, & de l'arc *i h m* N, dont le centre est en *c*, sur la ligne de niveau à l'imposte supérieure *c* N, il faudra chercher l'épaisseur du piédroit qui convient à chaque partie de la voute à droite & à gauche de la verticale H*e*, abaissée du sommet *h* de l'arc rampant. Ainsi on divisera le petit arc supérieur *h m* N en deux également en *m*, par où on menera au centre *c* la ligne *m c*, qui coupera la verticale H *e* au point *c*; de même on divisera l'arc composé RM *i h* en deux également en M, par où l'on tirera le rayon MC, qui coupera la verticale H *e* au point S^x qui tiendra lieu du point C de la fig. 214. On prendra aussi à part les moyennes proportionnelles entre les longueurs de l'arc de la moyenne épaisseur rectifiée *m k*, & de l'épaisseur H *h*, comme on voit à la fig. 215, & entre l'arc moyen *k n* rectifié, & la même épaisseur H *h*, comme on voit à la fig. 216, pour avoir les racines quarrées *h* X, *n x* de la surface de chacune de ces moitiés de voûte, & en faire usage comme l'on a fait à la fig. 214, ce qui ne souffre aucune difficulté.

Si l'arc rampant est une courbe simple de quelqu'une des sections coniques, ayant cherché le point de sommité *h*, qui sera celui de l'attouchement d'une horisontale parallele à RC, on divisera, comme dans tous les cas, le milieu de chaque arc entre l'imposte & ce point en deux également, & l'on tirera par ces point M & *m* des tangentes ausquelles on fera des perpendiculaires qui donneront les points *c* & S^x, comme l'on a fait pour les autres ceintres elliptiques, & l'on continuera l'opération comme à la fig. 214.

Comparaiſon & remarque importante ſur les regles des Auteurs qui ont traité de la pouſſée des voûtes.

Si au lieu de la conſtruction qui nous a donné les épaiſſeurs des piédroits, nous cherchions ces mêmes épaiſſeurs par les regles des Auteurs qui ont précédé M. de la Hire, nous trouverions qu'elles auroient été beaucoup moindres, & quelquefois de près de moitié de ce qui eſt néceſſaire, ſuivant le plus ou le moins d'épaiſſeur & de charge de la voûte & de hauteur des piédroits.

Par exemple, à la fig. 214, ſuivant la méthode du P. Derand, qu'ont ſuivi Blondel, Deſchalles & la Rue, ayant diviſé l'arc B *h* en trois également au point 3, ont doit tirer la droite 3 B 4, & faire B 4 égal à B 3 pour avoir le point 4, par lequel on tirera la verticale 4, 5, laquelle ſelon eux détermineroit l'épaiſſeur du piédroit 5 B. Or il eſt viſible que cette épaiſſeur étant moindre que XB d'une quantité conſidérable 5 X, qui eſt preſque un tiers du tout XB, la voûte n'auroit pu ſubſiſter, étant déja moindre de la quantité 6, 5 que l'épaiſſeur 6 B qui n'a pas ſuffi; d'où il ſuit que la voûte bâtie ſur de telle meſures auroit écraſé les ouvriers qui l'auroient déceintré.

La regle de M. Gautier dans cette circonſtance, approche de la bonne épaiſſeur par un pur haſard; car ſi l'on applique cette même regle à la voûte de la fig. 217, on trouvera qu'elle ſe réduit à prendre pour l'épaiſſeur du piédroit la moitié de la corde N *h*, laquelle étant portée en NG, tombe en dedans du point *x*, qui eſt celui de la bonne épaiſſeur, par conſéquent qu'elle eſt trop foible en cette rencontre, & que la voûte culbutera en la déceintrant. Au contraire elle ſera plus forte au piédroit inférieur RX, ce qui fait voir qu'elle peut varier en trop ou en trop peu, ſuivant la charge de la voûte & la hauteur des piédroits. Il eſt étonnant qu'aucun de ces faiſeurs de regles n'ait ſenti qu'il falloit plus d'effort pour ſoutenir une grande charge qu'une petite, le diametre du ceintre reſtant toujours le même, & qu'un piédroit fort élevé eſt plus facile à renverſer que celui qui eſt ſi court qu'il n'eſt preſque pas diſtingué de la naiſſance.

Démonſtration de la conſtruction.

Fig. 219. La démonſtration de la ſolution du problême ſe trouve dans les mémoires de l'Académie des Sciences, où M. de la Hire, n'ayant à parler qu'à des ſavans du premier ordre, n'eſt pas entré dans un détail tel qu'il convient à des gens d'une claſſe beaucoup inférieure: ainſi il eſt à propos de l'expliquer.

Soit (fig. 219), la portion de l'arc ſupérieur LMF $= ff$; la portion de l'arc inférieur ILM $= vv$; LE $= f$; CE $= e$; LA $= g$; IS $= b$; SA $= a$; TO $= h$; HS, largeur du piédroit, $= y$, & par conſéquent TS $= \frac{1}{2} y$. Dans la ſuppoſition que la hauteur du piédroit ſoit égale à LA, il trouve cette équation $ffeg = fffy - fffa = \frac{1}{2} yygf$, & poſant $ff = fm$, il la réduit à $meg - mfy + mfa = \frac{1}{2} yyg$; poſant encore $mf = ng$, & multipliant par 2 il trouve $yy + 2ny = 2me - 2na$, qui lui donne la conſtruction que nous venons de décrire, dont la démonſtration ne ſe préſente pas aſſez facilement du premier abord pour qu'on l'apperçoive ſans méditation, lorſqu'on n'eſt pas beaucoup verſé dans le calcul : c'eſt pourquoi j'ai cru devoir y ſuppléer en continuant la réduction de cette équation $yy + 2ny = 2me - 2na$. Si l'on ajoute à chaque terme nn, on aura $yy + 2ny + nn = nn + 2me - 2na$, & tirant la racine quarrée l'on a $y + n = \sqrt{nn + me - 2na}$; & retranchant n l'on aura $y = \sqrt{nn + 2me - 3na} - n$, dans laquelle on a la conſtruction qui donne $y =$ HS.

Fig. 220. Pour découvrir les raiſons pour leſquelles la grandeur 9, 8 $= y =$ H, il n'y a qu'à faire attention que les lignes de la conſtruction donnent les analogies ſuivantes. A cauſe de EZ parallele à X 4, on aura LE (f). LX ($\sqrt{ff}$) : : LZ ($\sqrt{ff}$) L 4 ($\frac{ff}{f} = \frac{fm}{f} = m$. A cauſe de AE parallele à 4 Y, on aura LA (g) L 5 (m) : : LE (f) LY ($\frac{fm}{g} = \frac{ng}{g} = n$; & à cauſe des triangles ſemblables ALE & QEC, on aura LE (f) LA (g) : : EC (c). EQ ($\frac{cg}{f}$); le reſte de la conſtruction eſt aſſez facile pour qu'on puiſſe la ſuivre ſans autre explication.

PROBLEME II.

La hauteur des clavaux d'une platebande & celle de leurs piédroits étant données, trouver sans calcul l'épaisseur des piédroits.

Soit le rectangle ABEF l'ouverture d'une baye fermée en platebande, dont la hauteur des clavaux est Ba, & celle des piédroits AB; il faut trouver la longueur d'une ligne Ax, qui détermine l'épaisseur des piédroits, pour qu'ils soient d'une force capable de résister à l'effort que la platebande fait pour les écarter. Par la construction de l'épure ordinaire dans la coupe des pierres, on détermine l'inclinaison des lits des sommiers dans l'alignement BG du côté BC d'un triangle équilatéral formé sur la platebande BE; en sorte que les trois lignes BE, BC & EC soient égales entre elles, & que les coupes GB, EK tendent au point commun C. *Fig. 220.*

Cela supposé, ayant divisé la ligne DH en deux également en Q, & ayant mené QO parallele à BD, on portera la longueur QO en DY; & sur HY pour diametre, ayant décrit le demi-cercle YmH qui coupera BD au point m, on portera Dm en BM, & on tirera AM du bas du piédroit par le point M, où on lui fera MP perpendiculaire, qui coupera le piédroit AB prolongé en P. Ensuite on portera la moitié de BD en DI, qui tombe ici tout près du point H; & sur CI, comme diametre, on décrira le demi-cercle CnI qui coupera BD en n, d'où l'on tirera la droite nC, à laquelle on fera mx parallele, qui coupera CI au point x.

On portera ensuite BP en DR pour tirer la ligne Rx, sur laquelle ayant pris Rd égale à RD ou BP, le reste xd sera la longueur de la ligne que l'on cherche, laquelle étant portée de B en X ou de A en x, donnera l'épaisseur du piédroit qui doit soutenir l'effort de la moitié de la platebande, de même que l'autre EF la moitié DK. On doit encore remarquer ici l'erreur de la méthode de M. Gautier, qui ne donne au piédroit que l'épaisseur Be, qu'il fait égale à BD, moitié de la platebande : cette méthode étoit très-facile pour se faire entendre aux ouvriers, c'est dommage qu'elle les expose à l'affront de voir leur ouvrage tomber en levant les étançons.

Remarque sur l'autorité de la théorie prouvée par des faits.

Quoique la théorie de la poussée des voûtes soit beaucoup mêlée de causes physiques, l'expérience confirme cependant la justesse des regles qu'on en a tiré, puisque les voûtes qui étoient appuyées sur des piédroits plus foibles que ceux qu'elles donnent, se sont écroulées; ainsi en suivant ces regles on ne court aucun risque de pareil accident, pourvu qu'on y ajoute encore un peu d'épaisseur, parce qu'elles ne donnent que celle qui est nécessaire pour mettre la force de la résistance des piédroits en équilibre avec celle de la poussée de la voûte. Or en cet état on s'expose de le voir rompu par le moindre accident; sur quoi je rapporterai un fait qui prouve la nécessité de cette précaution.

J'ai fait faire dans un ouvrage détaché une petite chapelle elliptique pour le détachement des soldats de garde, laquelle est inscrite dans un octogone alongé, couverte d'une simple voussure couronnée d'un plafond, & n'ayant donné d'épaisseur au mur que celle qui résulte du calcul de la premiere hypothese, je la fis déceintrer aussi-tôt qu'elle fut achevée, sans lui donner le tems de faire corps. Elle subsista sans aucune fracture; mais ayant eu trop de confiance à la belle saison, je ne me pressai pas de la faire couvrir, un orage avec une pluie abondante survint, laquelle remplissant d'eau les pores de la brique, y ajouta une nouvelle charge qui rompit l'équilibre; il se fit quatre lézardes, une à chaque axe de l'ellipse, qui n'ont pas eu d'autre suite depuis qu'elle a été couverte de son comble.

Sur quoi l'on doit faire trois réflexions utiles à la pratique; la premiere, que l'on doit augmenter la force des piédroits au-dessus de l'état de l'équilibre avec la poussée, comme je viens de le dire. La seconde, qu'on ne doit faire les voûtes qu'à couvert, de peur que la pluie ne les charge plus qu'elles ne doivent l'être. La troisieme, qu'on ne doit pas compter sur l'expérience des gens sans théorie, quelque versés qu'ils puissent être dans la pratique, pour donner les mesures des épaisseurs des piédroits des bâtimens voûtés, dont ils n'ont pas d'exemple à imiter précisément, car en cela un vieux praticien est toujours un vieux ignorant; c'est une connoissance du res-

ſort de la théorie, que la pratique ne peut jamais leur donner; ils n'en peuvent tirer que des raiſonnemens de comparaiſon des ouvrages qu'ils voient exécutés, dans leſquels ils ſont ſujets à ſe tromper pour peu que les cas varient; 46 ans de routine ſans principes n'avoient pu inſtruire l'architecte du magaſin dont on a parlé, du changement de meſure qui convenoit à ſa grandeur & à ſa charge, qui étoit un peu au-deſſus de l'ordinaire; il n'eſt pas ſeul à qui pareille choſe eſt arrivée par la même raiſon.

Ces événemens ont fait injuſtement ſoupçonner d'honnêtes gens de connivence ſur la mauvaiſe conſtruction, ou tout au moins de négligence à veiller à la ſolidité; & quoique l'examen de la qualité des matériaux les en ait juſtifié, le public & bien des gens de conſidération, qui ne ſavoient pas qu'il fallût être mathématicien pour donner de juſtes meſures des piédroits des voûtes, ont bien eu de la peine à revenir de ce faux jugement, & l'ont au moins rejetté ſur la mauvaiſe qualité du ſol de la fondation; mais les gens éclairés ont bien reconnu, par l'inexécution des regles fondées ſur la méchanique, que celui qui avoit dirigé le bâtiment en queſtion n'avoit péché que par un défaut de théorie, ſuite naturelle & légitime du peu de cas qu'il a toujours affecté d'en faire, *ſpernit ignarus quod nequit aſſequi.*

Ce ſont là, ce me ſemble, des argumens ſans réplique contre ceux qui mépriſent la théorie, & qui oſent ſans rougir avancer, comme Cartaud, dans ſon ſeptieme préjugé, que les mathématiques n'ont point contribué au progrès des arts. En ſavoit-on autant avant l'année 1712? & faute de cette découverte combien d'autres voûtes ſont tombées, en pure perte pour ceux qui les ont élevé ou fait élever: je ſais de mon tems que cet accident eſt arrivé à trois magaſins à poudre & à un grand édifice élevé & voûté à trois étages pour la chancellerie de Würtsbourg, après avoir été achevé totalement; cependant ceux qui s'en ſont mêlés étoient verſés dans la pratique de l'architecture; que répondre à cela? Il faut donc avouer que la théorie, en ces cas, eſt plus utile que la pratique dénuée des principes de géométrie & de méchanique.

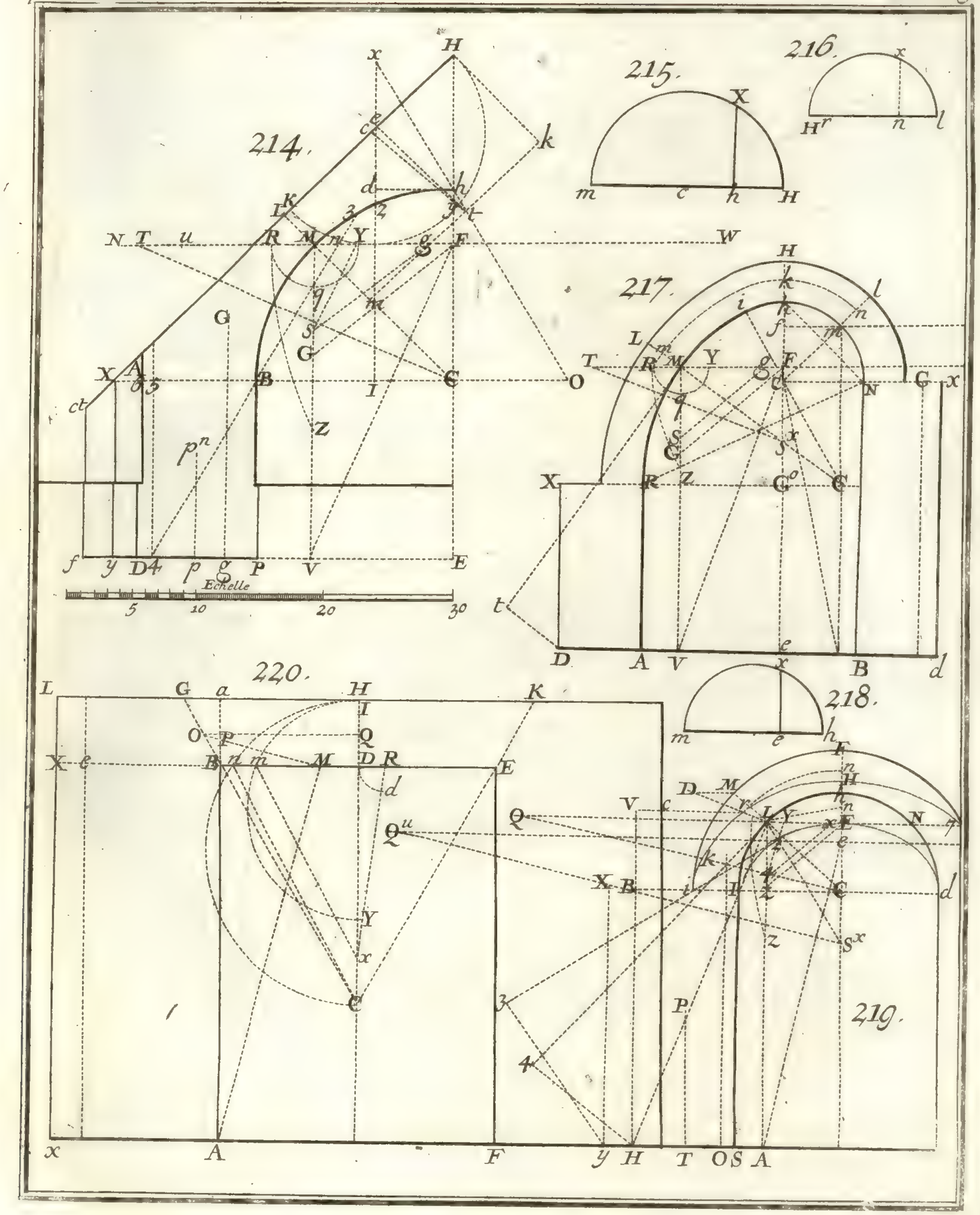
Ce ſont encore des raiſons pathétiques pour autoriſer la préférence que l'on doit donner dans le choix des directions aux ingénieurs qui poſſedent la théorie des arts, ſur ceux qui

n'ont uniquement que des ſervices de guerre, parce qu'il s'y agit du bon emploi des dépenſes du Roi, & non pas des fonctions militaires. On doit ſans doute récompenſer les bons Officiers qui ont utilement expoſé leur vie, par des graces & des honneurs, & les préférer à ceux qui ont moins de ſervice, lorſqu'ils ſont auſſi propres à la conſtruction qu'à la guerre; mais s'ils ne ſont recommandables que par cette derniere partie, ſans génie & ſans aucune ſcience, comme il s'en trouve, il eſt évident qu'ils n'ont que la moindre partie des qualités néceſſaires à un directeur, & qu'il importe au bien du ſervice qu'on leur préfere ceux qui en ont d'eſſentielles à la conſtruction. Si l'on avoit toujours fait cette attention, le Roi auroit épargné bien des ſommes mal employées.

Seconde Hypotheſe.

Pour la recherche de la pouſſée des voûtes.

Dans la précédente hypotheſe, on a conſidéré la voûte en berceau comme un maſſif de maçonnerie qui avoit fait corps, mais que la pouſſée avoit fait fendre le long des reins à la hauteur de 45 degrés; ici nous la conſidérerons comme un aſſemblage de vouſſoirs polis ſans liaiſon, qui ſe pouſſent mutuellement les uns les autres, en agiſſant par leur peſanteur, ſuivant les différentes inclinaiſons de leurs lits. C'eſt ainſi que M. Couplet les avoit conſidéré dans ſon mémoire inſeré dans ceux de l'Académie des Sciences, année 1729, ſur laquelle hypotheſe il a établi pluſieurs théorêmes & problêmes curieux & utiles pour la pouſſée des voûtes; mais comme le calcul en eſt long & fort compoſé, j'ai cru que je rendrois ſervice au public ſi je lui propoſois une ſolution plus ſimple & plus propre à la pratique. Dans cette idée, conſidérant avec raiſon M. Bernoulli comme un des géometres de l'Europe le plus capables de la trouver, je l'ai prié d'y donner quelques heures de ſon tems, qu'il a bien voulu m'accorder, quoiqu'il fût incommodé; en quoi il m'a donné une marque d'amitié dont je ſuis très-reconnoiſſant. Mais comme cette ſolution ſuppoſe une connoiſſance de ſa regle d'énergie par les vîteſſes virtuelles, il a eu la bonté de me faire part d'une lettre qu'il écrivit à M. Varignon en 1715, touchant cette regle, dont je vais faire un extrait avant que d'entrer en matiere


214.
215.
216.
217.
218.
219.
220.
Echelle
5
10
20
30

matiere ; il commence par établir ce principe, que *dans chaque équilibre il y a une égalité d'énergie de forces absolues par les vîtesses virtuelles.*

Pour concevoir ce principe, & en faire usage dans la statique, il faut se représenter plusieurs forces différentes, qui agissent suivant différentes tendances ou directions pour tenir en équilibre un point, une ligne, une surface, & un corps; si l'on imprime à tout le systême de ces forces un petit mouvement, soit parallele à soi-même suivant une direction quelconque, soit autour d'un point fixe quelconque, il sera facile de comprendre que par ce mouvement chacune de ces forces avancera ou reculera dans sa direction, à moins que quelqu'une ou plusieurs des forces n'ayent leurs tendances perpendiculaires à la direction du petit mouvement; auquel cas cette force ou ces forces n'avancent ni ne reculent de rien, car ces avancemens ou reculemens que M. Bernoulli appelle *vitesses virtuelles*, ne sont autre chose que ce dont chaque ligne de tendance augmente ou diminue par le petit mouvement. Ces augmentations ou diminutions se trouvent par le moyen d'une perpendiculaire que l'on doit tirer à l'extrêmité de la ligne de tendance de quelque force, pour retrancher de la même ligne de tendance mise dans la situation voisine par le petit mouvement, une partie qui sera la mesure de la vîtesse virtuelle de cette force.

Soit, par exemple, P un point quelconque dans le systême des forces qui se soutiennent en équilibre, F une de ces forces, qui pousse ou qui tire le point P suivant la direction FP ou PF; Pp une petite ligne droite que décrit le point P par un petit mouvement, par lequel la tendance FP prend la situation fp, qui sera ou exactement parallele à FP, si le petit mouvement du systême se fait en toutes ses parties parallelement à une droite donnée de position; ou elle fera avec FP, étant prolongée, un angle infiniment petit, si le petit mouvement du systême se fait autour d'un point fixe; si l'on tire donc Pc perpendiculaire sur fp, on aura cp pour la vîtesse virtuelle de la force F, ensorte que F × cp fait ce que M. Bernoulli appelle l'*énergie*. Il faut remarquer que cp est ou affirmatif ou négatif par rapport aux autres; il est affirmatif si le point P est poussé par la force F, & que l'angle FPp soit obtus ; il est négatif si l'angle FPp est aigu : mais au contraire si le point p est

Planch. 110. *Fig.* 221.

tiré, cp sera négatif lorsque l'angle FPp est obtus, & affirmatif lorsqu'il est aigu : tout cela étant bien entendu, M. Bernoulli forme cette proposition générale.

LEMME.

En tout équilibre les forces quelconques, en quelque maniere qu'elles soient appliquées, & suivant quelque direction qu'elles agissent les unes sur les autres, ou médiatement ou immédiatement, la somme des énergies affirmatives sera égale à la somme des énergies négatives prises affirmativement.

Cette proposition fournit une regle admirable pour déterminer, sans aucune peine, le rapport des forces absolues dans les équilibres, & des forces mouvantes dans les machines.

L'application en est intéressante dans l'examen des forces du levier, de la poulie, des poids suspendus sur des plans inclinés, ou tirés par plusieurs cordes; mais comme ces choses ne sont pas de notre sujet, il suffit de nous arrêter à ce qui est nécessaire pour venir à la solution du problême de la poussée des voûtes, pour laquelle je dois seulement faire précéder le suivant.

PROBLEME III.

Un poids sphérique, comme une boule B, *étant soutenu par deux plans* AC, DC, *trouver l'impression que chacun reçoit de la pesanteur de la boule.*

Fig. 222. Imaginons que toute la machine ou le systême BACD fasse un petit mouvement suivant la direction d'un plan AC, pour prendre la situation $bacd$. Si l'on tire Cn verticale, cn horisontale, & Ce perpendiculaire sur ed, la vîtesse virtuelle du point B sera exprimée par Cn, parce que la boule B étant parvenue en b, on aura Bb ou $Aa = Cc$, & par conséquent la verticale Cn marque de combien est descendu le poids B sur sa tendance naturelle, & la vîtesse virtuelle de la résistance que fait le plan CD en soutenant la boule B, est exprimée par Ce ou Df, parce que c'est dans cette direction que se fait cette résistance, & que c'est de la quantité de la même Df que recule le plan CD dans le tems que la boule B descend en b.

Appellant donc R la résistance, ou ce qui est la même chose, l'impression que reçoit le plan CD par le poids B,

& P le poids abſolu de la boule B, on aura $P \times Cn = R \times Cc$; donc $P. R :: Cc. Cn ::$ ſinus Cce (ACD). ſinus Ccn, c'eſt-à-dire que le poids abſolu de la boule eſt à l'impreſſion qu'il fait ſur l'un des plans, comme le ſinus de l'angle que font les deux plans enſemble, au ſinus de l'inclinaiſon de l'autre plan.

Si l'un des plans comme CD étoit vertical, pour trouver l'impreſſion qu'il ſouffre, il n'y auroit qu'à dire, comme le ſinus de l'angle des deux plans eſt au ſinus de ſon complément, ainſi le poids abſolu de la boule eſt à l'impreſſion cherchée. Si l'on vouloit déterminer immédiatement la proportion des deux impreſſions que reçoivent les deux plans, ſans chercher le rapport qu'elles ont avec le poids abſolu de la boule, il n'y auroit qu'à faire mouvoir le ſyſtême BACD ſuivant la direction horiſontale; alors on verra que le chemin que fait le plan AC en avançant perpendiculairement, eſt au chemin que fait en même tems le plan DC en reculant perpendiculairement, comme le ſinus de l'inclinaiſon du plan AC eſt au ſinus de l'inclinaiſon du plan DC. D'où il ſuit immédiatement que les deux impreſſions faites ſur les deux plans ſont en raiſon réciproque des ſinus de leurs inclinaiſons.

Seconde ſolution du premier problême.

Si l'on ſuppoſoit la voûte toute d'une piece, les parties ſeroient ſans doute en équilibre, & il n'y auroit point d'autre pouſſée que celle que la voûte cauſeroit ſur les piédroits en faiſant effort pour les renverſer, ſuppoſé que les lits des couſſinets fuſſent obliques à l'horiſon; & s'ils étoient horiſontaux il n'y auroit point de pouſſée du tout : mais comme les voûtes ſont compoſées de vouſſoirs détachés, les vouſſoirs n'ont pas une direction commune verticale pour deſcendre, chacun en a une particuliere & oblique. On doit conſidérer ces vouſſoirs comme des coins extrêmement polis, qui ſont empêchés de gliſſer le long des plans des lits entre leſquels ils ſe trouvent, par la preſſion mutuelle qu'ils exercent les uns ſur les autres, & qui doit par-tout être la même, comme nous verrons dans la ſuite.

Examinons préſentement la voûte ABCDEFG ſoutenue par les piédroits HS, JT compoſée de vouſſoirs en forme de coins *Fig. 213.*

Fig. 223. tronqués, desquels chacun, comme par exemple EFPO, étant empêché par ses voisins de descendre verticalement, conserve pourtant un effort oblique pour descendre le long de ses joints EO, FP, & pour repousser par conséquent ses deux voisins DEON, FGJP en sens contraire; & il descendroit effectivement, si ces deux mêmes voussoirs voisins ne le repoussoient aussi en contre-sens avec un pareil effort, en tâchant de glisser le long de leurs joints, car on fait abstraction du mortier & des inégalités ou des engrainemens des joints; & en effet pourquoi feroit-on attention à ces engrainemens, puisque pouvant être plus ou moins considérables, leur effet pour empêcher le voussoir de glisser, n'est point ni ne sauroit être déterminé. D'ailleurs le plus sûr est toujours de construire les voûtes de telle maniere qu'elles se soutiennent indépendamment du ciment & de ces engrainemens, quand même les voussoirs ne seroient que des boules parfaitement rondes, qui par conséquent ne se touchassent qu'en un seul point. Dès-lors donc que l'effort d'un voussoir, pour glisser en bas suivant la direction de ses joints, surpasse l'effort que ses voisins exercent pour le repousser en sens contraire, il n'y aura plus d'équilibre, le voussoir glissera effectivement, en faisant monter les plus foibles voisins, & puis les autres glisseront, & toute la voûte croulera & tombera en ruine, sans que les piédroits, quelque forts qu'ils soient, puissent l'en empêcher, parce que la poussée de toute la voûte n'est pas exercée sur les piédroits seuls.

Pour donc que les piédroits souffrent la poussée de toute la voûte, afin de pouvoir calculer la force de cette poussée, & lui en opposer une égale ou plus grande, en donnant aux piédroits la largeur requise, il faut absolument que les voussoirs de la voûte soient en équilibre; c'est-à-dire, que les efforts avec lesquels les voussoirs tendent à glisser le long de leurs joints soient contrebalancés mutuellement les uns par les autres. Or cela se peut toujours effectuer; car puisque cet effort dépend en partie de la direction plus ou moins verticale des joints, & en partie de la masse ou du poids des voussoirs, & que ce poids peut être augmenté ou diminué à volonté, on n'a qu'à donner au poids des voussoirs la juste proportion que demande l'obliquité de leurs joints, pour qu'ils demeurent tous dans un équilibre parfait.

Calculons donc d'abord généralement l'effort d'un vousfoir, ou d'un coin, ou bien d'un poids quelconque qui se trouve entre deux plans inclinés, & qui tend à glisser le long de ces plans; car il faut considérer les joints ou lits comme si ce devoit être des plans immobiles; d'où nous déterminerons ensuite aisément en quelle raison des obliquités des ces plans le poids de chaque voussoir doit être, pour que les voussoirs se soutiennent dans un mutuel équilibre entre eux.

Soit P le corps représentant un voussoir, & qu'il se trouve entre les plans AC, BC, qui représenteront les joints prolongés des voussoirs. Soient de plus le sinus de l'angle ACB $=m$, le sinus de l'angle ACD, (c'est-à-dire de l'inclinaison du plan supérieur à l'horisontale CD) $=r$; le sinus de l'angle BCD (ou de l'inclinaison du plan inférieur à l'horisontale CD) $=s$; le poids du corps P $=p$. D'abord il est visible que le poids P, serré entre les deux plans AC, BC, cherche à les écarter, en pressant chacun perpendiculairement à la direction; savoir, le supérieur AC de bas en haut, & l'inférieur BC de haut en bas; ainsi nous aurons, en vertu du principe de M. Bernoulli, expliqué dans sa lettre à M. Varignon, la pression du poids sur le plan supérieur $=\frac{sp}{m}$. Car en concevant que le point P ait glissé tant soit peu sur le plan inférieur considéré comme immobile, ensorte que le point C soit venu en V, & le plan AC reculé parallelement en aV, la petite ligne CI perpendiculaire sur aV marquera la vîtesse virtuelle de la pression sur le plan supérieur, & CG marquera la vîtesse virtuelle du poids suivant sa direction naturelle, qui est la verticale. Par conséquent CI est à CG (ou en prenant CV pour le sinus total) le sinus de l'angle des plans est au sinus de l'inclinaison du plan inférieur, c'est-à-dire $m . s : : p . \frac{ps}{m}$ qui sera $=$ à la pression que le poids exerce sur le plan supérieur. Pareillement nous trouverons la pression du poids sur le plan inférieur $=\frac{pr}{m}$, en supposant que le plan AC est immobile, & que l'autre BC recule un peu dans la situation parallele bK, & tirant ensuite la verticale CF sur l'horisontale KE, & la perpendiculaire CH sur bK. *Fig. 224.*

Considérons maintenant trois plans AD, BD, CD, renfermant deux poids ou voussoirs P π, & voyons quelle raison ces poids doivent avoir avec l'inclinaison des plans pour de- *Fig. 225.*

Fig. 225. meurer en équilibre. Soient nommés le ſinus de l'angle ADB que fait le plan ſupérieur avec celui du milieu $=m$; le ſinus de l'angle BDC que fait le plan du milieu avec l'inférieur $=n$; le ſinus de l'angle ADE (DE étant ſuppoſée horiſontale) $=r$; le ſinus de l'angle BDE $=s$; le ſinus de l'angle CDE $=t$; le poids du corps ſupérieur $=p$; le poids du corps inférieur $=\pi$.

La preſſion exercée par le poids ſupérieur p ſur le plan du milieu BD, ſera (ainſi que nous venons de voir) $\frac{pr}{m}$; & la preſſion exercée par le poids inférieur π ſur le même plan BD, de bas en haut, $=\frac{\pi t}{n}$: or il faut que les preſſions contraires exercées de part & d'autre ſur le plan du milieu BD, ſoient égales entre elles, c'eſt-à-dire que $\frac{rp}{m}=\frac{t\pi}{n}$; d'où l'on tire cette analogie qui exprime le rapport des poids $p\,.\,\pi :: mt\,.\,nr ::$ $mst\,.\,nrs :: \frac{m}{rs}\,.\,\frac{n}{st}$; d'où l'on voit qu'il faut que les poids des vouſſoirs ſoient entre eux directement comme les ſinus des angles des plans qui les renferment, & réciproquement comme les rectangles des ſinus de l'inclinaiſon de ces plans, ou des joints.

Si les poids p, π, &c. ſont conçus infiniment petits de même que les angles ADB, BDC, &c. il eſt clair que les trois angles conſécutifs ADE, BDE, CDE finis ne différeront entre eux que d'une quantité infiniment petite, & que par conſéquent le ſinus r de celui du milieu BDE comparé à CDE, doit être compté égal au ſinus de celui-ci; mais que le même angle du milieu BDE comparé à ADE, donnera le ſinus de celui-là égal au ſinus de celui-ci, c'eſt-à-dire que $\frac{m}{rs}$ paſſe pour $\frac{m}{rr}$, & $\frac{n}{st}$ pour $\frac{n}{tt}$. Donc en ce cas les poids des vouſſoirs ſeront ſimplement entre eux en raiſon directe des ſinus de l'angle de leurs joints, & en raiſon doublée inverſe des ſinus de l'inclinaiſon de ces mêmes joints. Or cela même eſt auſſi une propriété eſſentielle de la chaînette, ou de la courbure d'une chaîne parfaitement flexible, ſuſpendue par les deux bouts: ce qui fait voir que ſi l'on vouloit conſtruire une voûte compoſée de boules infiniment petites & parfaitement polies, qui ſe ſoutinſſent d'elles-mêmes en équilibre, il faudroit que la courbe qui paſſeroit par les centres de toutes ces boules eût la figure d'une chaînette renverſée.

Les poids des vouſſoirs ayant donc entre eux le rapport que nous venons de trouver, la voûte fera le même effet que ſi elle n'étoit que d'une piece ; il n'y aura plus d'autre pouſſée à conſidérer que celle qui s'exerce ſur les piédroits ; & de la même maniere que nous avons déterminé ci-deſſus la force de la preſſion que chaque vouſſoir exerce ſur le ſuivant dans la direction perpendiculaire au joint qui eſt entre deux, nous déterminerons auſſi la force de la preſſion de toute la voûte ſur chacun des piédroits, dans la direction perpendiculaire au premier joint : nous n'avons pour cela qu'à conſidérer toute la voûte comme un ſeul vouſſoir, ou bien, ce qui revient au même, nous n'avons qu'à chercher la force de la preſſion du couſſinet (en concevant le reſte de la voûte comme immobile, ce qu'il eſt permis de faire, puiſque tout eſt en équilibre, & par conſéquent comme immobile) ſur le piédroit, conſidéré comme un vouſſoir ſuivant.

Soit donc la voûte rampante ABCDE, (je la ſuppoſe rampante pour plus de généralité) ſur les piédroits ADGF, ECTH ; *Fig. 226.* le poids de tous les vouſſoirs enſemble $= P$; le ſinus de l'angle AKC que les deux joints extrêmes AD, CE prolongés font entre eux $= m$; le ſinus de l'angle que le joint AD fait avec l'horiſontale $= ſ$, & le ſinus de l'angle que le joint CE fait avec l'horiſontale $= r$: nous aurons, en vertu de ce que nous avons dit ci-deſſus, $\frac{rp}{m}$ pour la force de la preſſion de la voûte ſur le piédroit ADGF, ſuivant la perpendiculaire au joint AD ; mais cette preſſion n'eſt pas toute employée à faire effort pour renverſer ou pour faire tourner le piédroit autour du point F, conſidéré comme le point d'appui, parce qu'elle n'eſt pas perpendiculaire, mais oblique à la ligne AF. Pour connoître donc le moment de cette force pour renverſer le piédroit, il faut concevoir toute la force $\frac{rp}{m}$ comme appliqué au point L (où je ſuppoſe être le centre de gravité de la baſe du joint dont la ſection eſt la ligne AD) & agiſſant ſuivant la direction LO perpendiculaire à AD, tirant enſuite FO normale à LO, cette ligne FO repréſentera le bras du levier coudé OFu dont F eſt le point d'appui, & l'autre bras Fu ſous-centrique du piédroit. Il faut donc, ſuivant les premiers élémens de méchanique, multiplier la longueur du bras FO par la force $\frac{rp}{m}$ appliquée au

point L, & dirigée au point O; ce produit ſera le moment cherché.

Maintenant, pour que le piédroit ne ſoit pas renverſé en effet, il faut que le moment de la réſiſtance, c'eſt-à-dire, en nommant le poids du piédroit $= \pi$, multiplié par la ſous-centrique Fu, ſoit égal ou plus grand que $\frac{rp}{m}$ multiplié par la ſous-centrique OF : je raiſonne de la même maniere à l'égard de l'autre piédroit. D'où il ſuit que ſi la baſe FG du piédroit eſt aſſez large pour que le point O ſe confonde avec le point F, ou qu'il vienne de l'autre côté de ce point, la pouſſée ſera nulle ou même négative, & que dans ce cas-là le piédroit ſoutiendroit la voûte, quand même il n'auroit aucune peſanteur.

Pl. 109, *Fig.* 214. On a ſuppoſé ici que le point d'appui étoit donné, parce qu'on peut le trouver par un problême algébrique, qui eſt ſimple pour ceux qui ſont verſés dans ce calcul, & que nous joindrons ci-après à la ſuite d'une ſeconde ſolution ſur le même principe : mais auparavant nous croyons devoir faire une application de la regle précédente à la recherche de l'épaiſſeur des piédroits du magaſin propoſé ci-devant, à la fig. 214.

Suppoſant les joints extrêmes, ſuivant la premiere hypotheſe, à 45 degrés de hauteur, le profil de la partie de voûte compriſe entre ces deux joints, donne pour la ſurface mixte 296 pieds quarrés, & lui donnant un pied d'épaiſſeur on aura P $= 296$ pieds cubes. Le ſinus de l'angle que font entre eux ces joints extrêmes, appellé m, ſera le ſinus total; ainſi $m = 100000$. Le ſinus de chacun des joints extrêmes avec l'horiſon, appellé $\int$ ou r, ſera de 45 degrés, ainſi $\int = 70710$; donc $\frac{\int P}{m} = \frac{21071580}{100000} = 210 \frac{71580}{100000}$; négligeant la fraction, $\frac{\int P}{m} = 210 \times FO = 9$, donnera pour la preſſion ou pouſſée de la voûte 1890.

Conſidérant le piédroit comme compoſée de la partie de la voûte compriſe depuis l'impoſte juſqu'au joint de 45 degrés, & du piédroit proprement dit, il faut compter le profil de cette partie, qui donne 147 pieds cubes

Le profil du piédroit au-deſſous de 14 pieds de haut, multiplié par la largeur de ſa baſe 12, donne 168

total du piédroit, 315

lequel

lequel doit être multiplié par la demi-largeur de ſa baſe, donc $p = 315 \times Fu\, 6$, donne $\overline{1890}$ pieds cubes laquelle ſomme eſt égale à celle de la pouſſée trouvée ci-deſſus, par conſéquent il y auroit eu équilibre entre cette pouſſée & la réſiſtance du piédroit, dans l'hypotheſe que les vouſſoirs ſont des corps infiniment polis, ſi l'on avoit donné 12 pieds d'épaiſſeur à la baſe des piédroits, ce qui paroît très-conforme à l'expérience.

Je ne propoſe pas d'ajouter ici quelqu'épaiſſeur de plus aux piédroits, quoiqu'ils ne ſoient que dans un état d'équilibre. 1°. Parce les vouſſoirs n'étant pas des corps polis, comme on les a ſuppoſé pour le raiſonnement, le frottement de leurs lits doit empêcher une partie de leur effort pour gliſſer les uns ſur les autres. Secondement, parce que nous n'avons pris le centre de gravité du piédroit qu'au milieu de la partie compriſe au-deſſus de la fondation juſqu'à l'impoſte : or cette partie ne comprend pas tout le piédroit, puiſque celle de la voûte depuis l'impoſte juſqu'au lit du joint extrême lui doit être ajoutée, ſuivant notre hypotheſe; & comme celle-ci a ſon centre de gravité en G, qui répond au point *g* de la baſe, ſur lequel tombe la verticale venant du point G, elle peſe ſur un bras de levier D*g* ſous-centrique plus long que le premier D*p*, par conſéquent elle rompt l'équilibre en faveur du piédroit qu'elle fortifie, d'où il ſuit que la voûte n'aura plus aſſez de force pour l'écarter; donc elle ſubſiſtera ainſi qu'on ſe le propoſe.

Troiſieme Solution.

Autre maniere tirée du même principe.

Si l'on fait un berceau circulaire, on ſait que les directions de tous les lits tendent au même centre par lequel paſſe l'axe du cylindre, & ſi le berceau n'eſt pas circulaire, mais elliptique, on dirige encore tous les plans des lits à l'axe du cylindre, comme nous l'avons dit au tome précédent, en parlant des berceaux biais de face en plein ceintre qui ont pour arc droit un ceintre ſurhauſſé, au centre duquel tous les lits s'entrecoupent; enfin de quelque courbe que ſoit le ceintre d'un berceau, il eſt clair qu'on peut toujours diriger les lits à un

axe, & par conſéquent ſuppoſer les joints de tête convergens à un même point placé un peu au-deſſous des deux joints extrêmes qui ſont au-deſſus du couſſinet, enſorte que ces joints prolongés faſſent entre eux un angle qui ſera plus ou moins ouvert, ſelon que les joints extrêmes ſeront plus ou moins élevés au-deſſus du cntere. On diviſera cet angle en autant de parties égales qu'on voudra avoir de vouſſoirs ſur les couſſinets, & alors tous les joints ſont déterminés.

Fig. 227. Soit maintenant (fig. 227) l'arc ADF, qui paſſe par les centres de gravité de tous les vouſſoirs ; conſidérons deux de ces vouſſoirs contigus FH, HD, dont les charges ſoient m & n, & que leurs joints prolongés aboutiſſent au centre C ſuivant le rayon HC, ainſi que tous les autres joints ſuivans FC, DC, &c, de ſorte que les angles FCH, HCD, &c. ſoient tous égaux, & chacun de leur ſinus $= r$. Soit le point A le centre de gravité de la clef poſée à plomb, ou verticalement, au-deſſus du centre C du cercle ADF ; tirons l'horiſontale CG & les perpendiculaires FG, DE, que je nomme p, q : elles ſeront le ſinus des angles FCG, DCE, en prenant l'unité pour le rayon AC.

On a vu, par le lemme de l'article précédent, que la preſſion du vouſſoir m ſur le joint HC eſt à celle du vouſſoir n ſur le même joint, comme mp eſt à nq, car $\frac{mp}{r}$ & $\frac{nq}{r}$ ſont les preſſions elles-mêmes ; or ces deux preſſions oppoſées doivent être égales, à cauſe de leur équilibre ; donc $mp = nq$, & partant $m . n = q . p = \frac{1}{p} . \frac{1}{q}$; (en prolongeant CF, CH, CD juſqu'à la tangente AT) $\frac{CT}{CA} . \frac{CR}{CA}$: : CT . CR. Mais parce que l'angle TCR eſt coupé également par la ligne Cu, on aura (en vertu d'un théorême démontré en pluſieurs livres, particulierement dans la méchanique de M. de la Hire, prop. 125) TC . CR : : Tu . uR ; donc $m . n$: : Tu . uR, c'eſt-à-dire que les charges des vouſſoirs m, n, &c. ſont partout proportionnelles aux différences des tangentes des arcs AF, AH, AD, &c. Ainſi, par exemple, ſi chacun des angles FCH, HCD, &c, eſt de 10 degrés, & que la charge ou le poids du plus haut des vouſſoirs SL, nommé la clef, ſoit de 50 livres, on trouvera le poids de tel autre vouſſoir que l'on voudra, par exemple celui de FH, qui fait le cinquieme après la clef SL. Les arcs SF, SH, SD,

feront de 50, 40, 30 degrés, & les arcs AF, AH, AD, de 55, 45, 35 degrés.

Il faut donc faire cette analogie, comme SL, le double de la tangente de l'arc AS, ou de 5 degrés, eſt à Tu, ou à la différence des tangentes de 55 & de 45 degrés; ainſi le poids de la clef, ou de 50 livres, eſt à un quatrieme nombre, qui donnera en livres les poids du cinquieme vouſſoir après la clef. Si l'on ſuppoſe maintenant que le vouſſoir FH eſt celui qui eſt contigu au piédroit, & que l'on veuille trouver la preſſion avec laquelle il le pouſſe ſuivant la tangente en F, qui eſt donnée de poſition, il n'y a qu'à tirer la perpendiculaire HN que je nomme $ſ$, & qui ſera ici le ſinus de 45 degrés, on aura la preſſion ſur FG & ſur le piédroit $= \frac{mſ}{r}$, c'eſt-à-dire $r . ſ :: m$. à la preſſion, ou ici comme le ſinus de 10 degrés eſt au ſinus de 45; ainſi le poids trouvé de m eſt la preſſion cherchée; *ce qu'il falloit trouver.*

Conſtruction du ceintre en courbe de chaînette, pour trouver la pouſſée d'une voûte formée ſur cette courbe.

On vient de voir dans le diſcours précédent, que ſi l'on vouloit compoſer une voûte de vouſſoirs égaux, même parfaitement polis, il faudroit que la courbure du ceintre ſur lequel on les arrangeroit fût celle de la chaînette renverſée, afin qu'ils ſe ſoutinſſent en équilibre; auquel cas la voûte ſubſiſteroit, quand même les vouſſoirs ſeroient ſans coupe, & ne ſe toucheroient qu'en un point, comme des boules. Une propriété ſi ſinguliere & ſi avantageuſe de cette courbe mérite bien qu'on en donne la conſtruction, & le moyen de trouver la direction des coupes qui conviennent aux diviſions de ce ceintre en vouſſoirs.

Lorſqu'on a une chaîne bien faite, ou une corde d'égale épaiſſeur & également flexible, rien n'eſt plus aiſé que de tracer la courbe en queſtion; car les points de ſuſpenſion, qui ſeront ceux des impoſtes de la voûte, & le ſommet S pour le milieu de la clef, étant donnés, il n'y a qu'à les placer dans leur diſtance ſur un mur à plomb, & y ſuſpendre une chaîne qu'on tendra ou qu'on lâchera juſqu'à ce que ſon milieu s'applique au point S, renverſé autant au-deſſous des points A & B qu'il doit être au-deſſus en voûte, & ſuivre avec un crayon *Fig.* 250.

Fig. 230. le contour de la courbure de la chaîne, qu'il ne s'agit plus que de renverser. Mais ſuppoſant qu'on n'ait pas à ſa diſpoſition une chaîne de longueur convenable, ni une corde des conditions requiſes pour ſe plier également, il eſt bon de ſavoir comment on pourroit trouver autant de points que l'on voudra de cette courbe.

Soit donnée (fig. 230) la ligne des impoſtes ou naiſſances de la voûte AB, & le milieu de ſa clef en S. Ayant diviſé cette ligne AB en deux également en *m*, on y élevera la verticale indéfinie *m* P, qui paſſera par le point S, par où on menera SD parallele à BA. On portera la longueur *m* B de *m* en C, d'où, comme centre, avec C *m* pour rayon, on décrira un arc qui coupera DS au point E; la ligne SE ſera le parametre de la courbe qu'on portera en SP. Par le point P on menera HI parallele à AB, & l'on tirera par les points A & B des paralleles indéfinies à la verticale P *m*, qui couperont HI aux points H & I. Du point P pour centre, & P *m* pour rayon, on décrira un arc qui coupera l'horiſontale DS au point D, d'où l'on portera l'intervalle DS ſur DP en D *s*, qui donnera leur différence *s* P, qu'on portera ſur IB en IL. Par le moyen des deux lignes données IL & PS, on décrira la courbe logarithmique LOS *g* R, qui ſervira à trouver autant de points que l'on voudra de la courbe de la chaînette, comme on le dira ci-après.

Pour décrire cette logarithmique, on cherchera une moyenne proportionnelle entre les lignes données IL & PS qu'on placera en KO ſur le milieu K de la diſtance PI. On cherchera enſuite une troiſieme proportionnelle G *g* aux lignes KO & PS, qu'on placera en G, faiſant PG égal à PK. On continuera de même en cherchant des moyennes & des troiſiemes proportionnelles aux lignes trouvées, & l'on aura autant de points que l'on voudra de la courbe logarithmique LOS *g* R, laquelle étant tracée, il n'eſt rien de ſi aiſé que de trouver auſſi autant de points que l'on voudra de la chaînette.

On ajoutera, par exemple, les lignes KO, & G *g* qui ſont équidiſtantes du parametre PS, & l'on prendra la moitié de leur ſomme, qu'on portera ſur les mêmes lignes en K *x* & G *y*; les points *x* & *y* ſeront ceux que l'on cherche à la circonférence de la chaînette. De même pour trouver les points A

& B, s'ils n'étoient pas donnés, on ajouteroit HR & IL, & l'on porteroit la moitié de leur ſomme ſur les mêmes lignes prolongées, s'il le faut, en HA & IB; ainſi de tous les autres points qu'on peut chercher entre A & *y* & S & *y*, ou entre B & *x* & S & *x*; & par tous les points trouvés, on tracera à la main ou avec une regle pliante la courbe A *y* S *x* B, qui eſt celle de la chaînette que l'on cherche. *Fig. 230.*

Préſentement il faut trouver la maniere de *tracer les coupes des joints de lit des vouſſoirs de la voûte formée ſur le centre de la chaînette.* Ce moyen ſe réduit, comme nous l'avons dit, au II livre, à en trouver les tangentes aux points des diviſions des joints, parce qu'ils leur doivent être perpendiculaires; par ce moyen on trouvera les joints extrêmes néceſſaires pour le calcul de la pouſſée de la voûte.

Par un point donné à la circonférence de la chaînette, lui mener une tangente.

Si l'on ſuppoſe que la courbe de la chaînette a été décrite méchaniquement, & qu'on veuille lui mener une tangente par un point donné, par exemple B, pour avoir la coupe du joint extrême, il faudroit prendre la moitié S *x* B de la chaîne qui auroit ſervi à décrire cette courbe, & l'étendre en ligne droite ſur la ligne SD du point S en D où tombera le bout; puis ayant tiré la droite *m* D, on fera l'angle *m* DP égal à l'angle P *m* D, qui donnera le côté DP, lequel forme avec la ligne DS l'angle PDS; ſi l'on fait ſur la ligne *m* B l'angle *m* BT égal à l'angle PDS, la ligne BT ſera la tangente que l'on cherche. Si la chaînette a été décrite géométriquement, comme nous l'avons enſeigné, on aura ſon parametre SP, auquel, étant prolongé, on menera par le point donné B une perpendiculaire B *m*, qui donnera le point *m*: ſi de l'intervalle P *m* pour rayon on décrit un arc *m* D, il coupera la ligne SD perpendiculaire au même parametre, au point D, & l'on achevera, comme on vient de le dire, en faiſant l'angle *m* BT égal à l'angle PDS; la ligne BT ſera la tangente demandée.

Il ne reſte plus qu'à lui mener une perpendiculaire QZ par le point B donné, laquelle donnera la coupe QZ du joint de tête des vouſſoirs qui ſe termineront à ce point, & ſi c'eſt le lit de deſſous du premier, QZ ſera ce joint extrême dont

il faut avoir la position pour chercher la poussée de la voûte & l'épaisseur de ses piédroits, comme il a été dit aux solutions & constructions précédentes.

PROBLEME IV.

La direction de la poussée d'une voûte, sa pression ou poussée, & la hauteur du piédroit étant donnés, trouver son épaisseur.

Fig. 228. Soit (fig. 228) ADGFC le piédroit, la tangente LT perpendiculaire au milieu du premier joint AD $= b$, la verticale LK abaissée du milieu du joint AD $= a$; la distance horisontale TK $= c$, la ligne DJ $=$ KG $= d$, on trouvera KG par cette analogie, LT. (b) LK (a) : : LD (qui est connue, parce que c'est la demi-épaisseur de la voûte). JD $=$ KG $= \frac{a}{b}$. Soit aussi FG $= x$, FO perpendiculaire sur LT $= y$, FK sera $= x - d$: cela supposé, on aura LT (b). LK (a) : : TF ($c + d - x$). FO ($y = \frac{ac + ad - ax}{b}$) Or nommant, comme ci-devant, la poussée P, & la pesanteur du piédroit p, on doit avoir (par le problême précédent) $Py = \frac{1}{2} px$, c'est-à-dire, $\frac{ac + ad - ax}{b} P = \frac{1}{2} xp$, d'où l'on tire $x = \frac{2ac + 2ad}{2aP + bp} P$, ce qu'il falloit trouver.

Dans cette équation il se trouve une quantité p qui n'est pas directement connue, mais qui peut l'être, parce qu'elle est une fonction de x, c'est-à-dire que sa valeur sera exprimée en x, & en quantités purement connues, car le poids du piédroit dépend de la pesanteur spécifique de la matiere dont il est construit & de ses trois dimensions; or trois de ces choses sont données, & la quatrieme est notre x, qui est la largeur du piédroit; l'équation ne renferme donc que des x, & des quantités connues, elle devient seulement quarrée, ce qui n'empêche pas qu'on n'en puisse tirer la valeur de x, ce que l'on va montrer par un exemple.

Soit la hauteur du piédroit, & la partie de voûte au-dessus jusqu'au milieu du joint extrême (a) $= 16$ pieds, $b = 20$, $c = 12$, $d = 1$ pied. Soit la force de la poussée P représentée par un poids de 288000 livres. Supposons qu'un piédroit de pareille matiere que le nôtre, par exemple, de marbre, & qui

ait la même hauteur & la même épaiſſeur, mais qui n'ait qu'un pied de largeur, peſe 3200 livres, le nôtre en peſera $3200x$, c'eſt-à-dire que p ſera $= 3200\,x$ livres. Subſtituant toutes ces valeurs dans notre équation, elle ſe changera en celle-ci $x = \frac{384 + 8\overline{2}}{9216000 + 64000x} \times 288000 = \frac{572}{144 + x}$, par conſéquent $xx + 144x = 572$, & $x = -72 + 84 = 12$, c'eſt à-dire que dans notre ſuppoſition le piédroit devra être large de 12 pieds.

Autre ſolution du même problême.

Le défaut d'explication de ce qu'on avoit avancé dans l'extrait de l'aſſemblée de l'académie de Montpellier de 1732, *qu'il ne falloit pas s'embarraſſer de la hauteur des piédroits pour trouver leur épaiſſeur par la regle* de M. Daniſy, m'ayant donné occaſion d'en marquer ma ſurpriſe, le ſavant académicien m'a fait l'honneur de m'écrire dans quel ſens il l'avoit entendu, & pour me faire voir qu'il étoit en quelque façon fondé à négliger les différences d'épaiſſeurs qui réſultoient des différences de hauteurs, il m'a fait connoître que par l'augmentation de celle qu'il donnoit à ſon piédroit, il comprenoit celles que le calcul pouvoit donner, & afin de m'en convaincre, il m'a envoyé le problême ſuivant, dont il ne ſera pas fâché que je faſſe part au public. Je crois même en cela lui rendre un ſervice, pour détourner la mauvaiſe idée que cette circonſtance pourroit donner de ſa regle de pratique.

Soit (fig. 243) la hauteur du piédroit DF $= 6$, ſoit la valeur de la pouſſée $= P$, ſa direction PF, ED l'épaiſſeur du piédroit $= 2\,x$, FP la ligne de direction de la puiſſance compriſe entre l'extrêmité F du piédroit & la rencontre de la baſe ED prolongée vers P $= a$; ſoit DP $= b$, donc PE $= b - 2x$, & à cauſe des triangles ſemblables PGE, PFD, on aura PF, FD : : PE, EG, c'eſt-à-dire $a \,.\, c :: b - 2\,x$. EG $= \frac{cb - 2cx}{a}$. La peſanteur du piédroit étant repréſentée par le rectangle EF, cette péſanteur égalera $2\,xc$, & la moitié EH de la baſe ſera x. Maintenant dans l'état d'équilibre, on aura cette équation $2\,xxc = \frac{Pbc - 2Pxc}{a}$; donc $x = \sqrt{\frac{Pb}{2a} + \frac{Pp}{4aa}} - \frac{P}{2a} =$ E H, moitié de l'épaiſſeur ED. Plan. 111, *Fig.* 243.

Si l'on double les côtés du triangle PFD, la hauteur c de-

Fig. 243. viendra double ; si on triple les côtés du même triangle, la hauteur c deviendra triple, &c, à l'infini, ou la hauteur c deviendra infinie de même que les autres côtés ; donc, dans la formule $x = \sqrt{\frac{Pb}{2a} + \frac{Pp}{4aa}} - \frac{P}{2a}$, à la place de a & de b on pourra substituer $2a$, $2b$; $3a$, $3b$, &c. ∞a, ∞b, donc à une hauteur infinie la formule sera $x = \sqrt{\frac{\infty Pb}{2\infty a} + \frac{Pp}{4\infty 2aa}} - \frac{P}{2\infty a}$, & négligeant l'infiniment petit du premier ordre $\frac{P}{2\infty a}$, & l'infiniment petit du second ordre $\frac{Pp}{4\infty 2aa}$, on aura $x = \sqrt{\frac{Pb}{2a}}$.

En appliquant des nombres à ces deux formules, si P = 100, $c = 16$ pieds, $b = 12$, $a = 20$, on aura par la formule dans l'état d'équilibre, une base eD de 7 pieds. Mais si la direction de la poussée avoit toujours été 100, & que la hauteur c eût été supposée infinie, on auroit trouvé pour la valeur de la base 10 pieds 10 pouces ; ainsi avec une augmentation de 3 pieds 10 pouces, on est assuré que quelque grande que fût la hauteur du piédroit, il ne seroit point renversé par la poussée. Si la base ED avoit été donnée, & qu'elle fût $2\sqrt{\frac{Pb}{2a}}$, & qu'on eût cherché la hauteur du piédroit, on auroit trouvé pour la valeur de la hauteur $c = \frac{by - by}{2\sqrt{\frac{Pb}{2a}}}$, donc $c = \frac{0}{\sqrt{\frac{Pb}{2a}}}$, d'où $c = \infty\ 2$.

Si l'on cherche le rapport entre l'épaisseur ED, qui convient à une hauteur infinie, & l'épaisseur eD, qui convient à une hauteur déterminée DF, on trouvera que $\overline{ED}^2 . \overline{eD}^2 :: EK . EJ$, partie de la hauteur comprise entre le point d'appui E du piédroit élevé à l'infini, & la section en J de la direction FP de de la puissance P. D'où il suit que connoissant l'épaisseur du piédroit supposé élevé à une hauteur infinie, on trouvera aisément toutes les épaisseurs qui conviennent à des hauteurs déterminées dans l'état d'équilibre, en cette maniere.

Décrivez une parabole $\varepsilon\mu\beta\theta$E, dont l'axe soit la ligne PE, & le sommet soit E ; soit pris ensuite l'ordonnée $\delta\varepsilon$ = DE ; du point K, extrêmité de la hauteur EK déterminée, soit menée la ligne δK ; du point J, où la direction de la poussée rencontre la ligne EK, soit menée Jξ, parallele à δK ; & du point ξ, menant l'ordonnée $\xi\beta$, on fera De = $\xi\beta$; pour lors De sera

» ſera l'épaiſſeur qu'il falloit donner au piédroit dans l'état
» d'équilibre ; toutes les ordonnées qui ſeront compriſes
» entre β & ε, ſeront les épaiſſeurs qui conviendront depuis la
» hauteur EK juſqu'à la hauteur infinie ; * & toutes les ordon-
» nées θ ω, compriſes entre β & E, ſeront celles qui convien-
» dront à une hauteur moindre que EK.

Troiſieme hypotheſe.

Que les vouſſoirs ſont des coins grenus qui ne peuvent gliſſer les uns ſur les autres, mais qui tendent ſeulement à rouler.

L'hypotheſe que les vouſſoirs ſont des corps polis n'étant pas exactement vraie, M. Couplet, qui avoit examiné ce qui devoit arriver ſuivant cette ſuppoſition, dans ſon premier mémoire, en établit une autre dans le ſecond de l'année 1730, que les ſurfaces des vouſſoirs ſont tellement grenues & raboteuſes, qu'elles ne peuvent gliſſer les unes ſur les autres, mais ſeulement rouler autour de leur appui, ce qui n'eſt pas non plus conforme à la réalité, car elles peuvent auſſi gliſſer; mais on ne peut ſe paſſer de quelque ſuppoſition pour établir un raiſonnement, il faut qu'il y ait quelque choſe de connu ou de donné pour en tirer des conſéquences. Suppoſant donc que les vouſſoirs ſupérieurs font ſeulement effort pour renverſer les inférieurs & pouſſer les piédroit en dehors, M. Couplet réſout deux problêmes, l'un touchant la pouſſée horiſontale d'une voûte donnée, l'autre touchant la direction de l'effort total des vouſſoirs à un point de la baſe de chaque piédroit.

Comme ces deux problêmes ſervent à trouver l'épaiſſeur néceſſaire aux piédroits pour réſiſter à la pouſſée des voûtes, je crois devoir en faire mention, & pour ne pas copier le mémoire de M. Couplet qui eſt un peu long, & dont l'application à l'uſage eſt aſſez difficile, par le calcul des chiffres qui réſulte de celui du calcul algébrique, à cauſe qu'il eſt chargé

* Puiſqu'il eſt conſtant que le rapport de EK à EJ varie ſuivant les différentes hauteurs, & que la parabole qui exprime ce rapport devient infinie, lorſqu'on ſuppoſe la hauteur du piédroit telle : il n'eſt pas clair ni facile à connoître pourquoi M. Daniſy en a fixé les limites entre β & ε, pour toutes les épaiſſeurs qui conviennent depuis EK juſqu'à celles qui ſeront infinies, étant certain que ſuppoſant la pouſſée de la voûte conſtante, l'interſection EJ, qui donne ſa direction, varie & augmente toujours.

d'une grande quantité de signes radicaux, qui laissent ordinairement beaucoup de restes & de fractions, lorsqu'on en exprime la valeur en chiffres : j'en donnerai la construction par le seul moyen de la regle & du compas, qui est à la portée de tout le monde, & exempte de tous ces embarras de calcul.

Quatrieme solution.

PROBLEME V.

Déterminer la poussée horisontale d'une vote dont l'intrados & l'extrados sont circulaires & concentriques, sans calcul, avec la regle & le compas, dans la supposition que les voussoirs sont trop grenus pour glisser les uns sur les autres.

Plan. 110, *Fig.* 229.

Soit (fig. 229) la portion de couronne de cercle BA*bn* MN, le profil d'une voûte en berceau en plein ceintre, dont le centre est en C, par où soit élevée la verticale CA par le milieu de la clef; soient les lignes tirées de ce même centre NB & *n b*, les coupes des coussinets, & l'horisontale N*n* menée par les points de ces coupes à la doële, qui coupera la verticale CA au point O. Par le point S, milieu de l'épaisseur de de la voûte à la clef, on tracera un arc SX, concentrique à celui de la doële, qui coupera le joint de lit NB au point X. Par le point M, milieu de la clef à la doële, on menera l'horisontale M*u*, qu'on fera égale à l'arc S X rectifié, & l'on tirera O *u*; par le même point S, on tirera l'horisontale indéfinie SZ.

Soit le centre de gravité de la demie voute AMNB en P, on menera par ce point la verticale LR, qui coupera l'horisontale SZ prolongée au point L, par lequel on menera au point X la ligne LX : la même verticale LR coupera l'horisontale menée par le point X au point R. 1°. On portera donc RX de O en *d*, par où on tirera *dt* parallele à M *u*. 2°. On prendra l'épaisseur AM de la voûte, avec laquelle pour rayon, & du point B pour centre, on décrira un arc qui coupera l'arc XS au point *i* par où on tirera *i*C, & par le point X on menera une parallele à B*i*, qui coupera *i*C au point *y*. 3°. On portera sur la base horisontale E*e* la longueur de l'arc MN rectifié de Y en *k*, & l'on tirera *k*X; ensuite on portera la ligne X*y*

de Y en d, & l'on tirera dz parallele à kX, qui coupera XY *Fig.* 229.
en z, la ligne zY ſera une quatrieme proportionnelle à la hauteur du piédroit, à l'arc MN, & à la ligne Y d. 4°. On portera dans une figure à part la ligne zY en l, & l'épaiſſeur de la voûte AM en m, & l'on décrira le demi-cercle, dans lequel on aura la moyenne proportionnelle t. 5°. On trouvera de même une moyenne proportionnelle q entre la ligne dt, & le double de l'épaiſſeur m. On fera dans une figure auſſi à part un triangle rectangle, dont un des côtés ſera la ligne q, & l'autre la ligne t; on tirera l'hypothenuſe ſur laquelle on fera un ſecond triangle rectangle, qui aura pour côté la ligne trouvée l; l'hypoténuſe x ſera l'épaiſſeur du piédroit que l'on cherche. 6°. Enfin on tirera la racine de la ſomme des quarrés l^2, t^2, q^2, en faiſant deux triangles rectangles, comme l'on voit à la fig. 235, de laquelle en ôtant la ligne l, on aura l'épaiſſeur du piédroit qu'il falloit trouver.

Démonſtration.

Soit l'arc NM de l'intrados $= a$, ſa hauteur MO $= d$, le rayon MC $= r$, l'épaiſſeur AM $= m$, on aura AC $= r + m$: ſoit auſſi P le centre de gravité de la demi-voûte ANM. On menera LX au milieu du couſſinet, & par le point X la ligne XR parallele à LT, & enfin RT parallele à LX. Cette préparation étant faite, M. Couplet termine ſa recherche par cette propoſition : *La peſanteur de la demi-voûte eſt à l'effort horiſontal, comme* LR eſt à RX, par le moyen de laquelle il trouve en termes analitiques l'effort horiſontal qui ſe fait ſuivant RX $= \frac{2arm + am^2}{2dr} \times \sqrt{2dr - d^2} - \frac{6mr^2 - 6m^2 - 2mr}{6r - 3m}$ dont je cherche une expreſſion abregée pour la conſtruire. Pour cet effet, ſoit fait $r . \frac{r + m}{2} :: \sqrt{2dr - d^2} . \frac{2r + m}{2r} \times \sqrt{2dr - d^2}$, c'eſt-à-dire NC . CX :: NO . QX, parce que NO eſt moyen proportionnel entre le rayon prolongé plus OC, & la fléche MO, c'eſt-à-dire entre $2r - d$ & d; ainſi QX $= \frac{2r + m}{2r} \times \sqrt{2dr - d^2}$, & ſi de QX on retranche RQ $=$ Pp $= \frac{6dr^2 + 6drm + 2dm^2}{6ar + 3am}$, on aura RX $= \frac{2r + m}{2r} \times \sqrt{2dr - d} - \frac{6dr^2 - 6drm + 2dm^2}{2ar + 3am}$, que j'appelle h, pour abré-

ger, & multipliant h & sa valeur par $\frac{am}{d}$, on aura $\frac{amh}{d} = \frac{2arm + am^2}{2dr} \times \sqrt{2dr - d^2} - \frac{6nr^2 - 6rm^2 - 2m^3}{6r + 3m}$, qui est la poussée horisontale cherchée.

Il faut donc exprimer $\frac{amh}{d}$, pour cela il faut faire le triangle MOu, dans lequel MO $= d$, M$u =$ l'arc, AN $= a$. On portera de O en d la grandeur RX $= h$, & par le point d on tirera dt parallele à Mu; la ligne dt sera $= \frac{ah}{d}$: car MO . Mu : : pO, ou RX . pt; & $d . a : : h . \frac{ah}{d}$, que je nomme s; cette valeur de S $\times m$ suffit pour la construction du problême suivant.

PROBLEME VI.

Dans l'hypothese des voussoirs grenus, trouver sans calcul la base EF *du piédroit, telle que l'effort composé de la pesanteur de la voûte, de la poussée horisontale, & de la pesanteur du même piédroit, soit dirigé vers un point quelconque donné* H *de ladite base* EF.

M. Couplet regarde le trapeze BIFN comme un parallelogramme dont la hauteur est GV, moyenne entre BI & NF, non-seulement pour abréger le calcul, mais encore pour d'autres raisons. Soit dont la hauteur moyenne VG du piédroit $= p$, la base IF du trapeze $= q$, le trapeze étant regardé comme un parallelogramme, sera $= pq$; soit la base entiere EF du piédroit $= x$, la base EI de son talud sera $= x - q$. Si l'on fait la hauteur BI $=$ VG $= p$, on aura la surface du talud BIE $= \frac{px - pq}{2}$; ces deux surfaces, celle du parallelogramme & celle du talud, exprimeront la pesanteur du piédroit.

Maintenant soit le point d'appui H placé de maniere que l'on ait EF . EH : : $f . g$, l'on aura EH $= \frac{gx}{f}$; comme la pésanteur du parallelogramme est réunie à son centre de gravité ou son milieu K, elle est appliquée au bras du levier GH $= x - \frac{q}{2} - \frac{gx}{f}$; ainsi $pq \times x - \frac{q}{2} - \frac{gx}{f}$ sera l'énergie de cette partie du piédroit. De même, si l'on multiplie la pésanteur $\frac{px - pq}{2}$ par son bras de levier HZ $=$ EZ $-$ EH $= \frac{2x - 2q}{3} - \frac{gx}{f}$, le produit sera

l'énergie de l'autre partie ; & ſi l'on ajoute enſemble l'énergie de l'une & de l'autre partie, leur ſomme abregée & réduite $\frac{2px^2 + 2pqx - pq^2}{6} - \frac{pqgx - pgx^2}{f}$, ſera l'énergie du piédroit entier ſur le point d'appui H.

L'énergie de l'effort vertical de la voûte eſt égale au produit de la peſanteur de la voûte par ſon bras de levier HY = HF — YF ; mais HF = EF — EH = $x - \frac{gx}{f}$, & l'on peut pour abréger faire YF = $\frac{m}{2}$, donc le levier HY = $x - \frac{gf}{f} - \frac{m}{2}$, & la peſanteur de la voûte = $\frac{2amr + am^2}{2r}$. Pour en abréger l'expreſſion, on peut faire $r . r + \frac{m}{2} :: m . \frac{2rm + m^2}{2r}$ que je nomme c, par conſéquent $ac = \frac{2amr + am^2}{2r}$ lequel multiplié par $x - \frac{gx}{f} - \frac{m}{2}$ donne $acx - \frac{acgx}{f} - \frac{acm}{2}$ pour l'énergie de l'effort ver-vertical.

Si l'on multiplie l'effort horiſontal de la voûte, que nous avons trouvé dans le problême précédent = ms, par ſon bras de levier p, mps exprimera l'énergie de l'effort horiſontal ; & comme l'effort vertical ſert à affermir le piédroit, & que l'effort horiſontal tend à le renverſer, ſi l'on retranche l'énergie de l'effort vertical de la voûte de celle de ſon effort horiſontal, le reſte ſera la véritable énergie que la voûte employe pour renverſer le piédroit ſur ſon point d'apui H ; ce reſte eſt $mps - acx + \frac{acgx}{f} + \frac{acm}{2}$, qui doit être égale à l'énergie du piédroit ſur ce point d'appui pour faire équilibre. On a donc cette équation $\frac{2px^2 \quad 2pqx - pq^2}{6} - \frac{pqgx - pgx^2}{2f} = mps - acx + \frac{acgx}{f} + \frac{acm}{2}$, dans laquelle ſi l'on ſubſtituoit à la place de s & de a leur valeur, on auroit la même équation que celle de M. Couplet, qui ne paroît pas ſi commode à conſtruire que celle-ci.

Prenant donc l'équation $2px^2 + 2pqx - pq^2 - \frac{pqgx - pgx^2}{2f} = mps - acx + \frac{acgx}{f} + \frac{acm}{2}$, multipliant l'un & l'autre membre par $6f$, elle devient $2fpx^2 + 2fpqx - fpq^2 - 3pqgx - 3pgx^2 = 6fmps - 6acfx + 6acgx + \frac{3afcm}{2}$ ſuppoſant $g = o$, & alors le point d'apui eſt à l'extrê-

mité E; elle se réduit à $2px^2 + 2pqx - pq^2 = 6mps - 6acx + 3acm$. Ordonnant l'équation, on a $2px^2 + 2pqx - pq^2 + 6acx - 6mps = 0 - 3acm$. Divisant par $2p$, elle est $x^2 + qx - \frac{q^2}{2} + \frac{3acx}{p} - \frac{3acm}{2p} = 0 - 3ms$. Faisant $\frac{1}{3}pc = a$, $\frac{3ac}{p} = l$ (fig. 235), elle devient $x^2 + qx - \frac{q^2}{2} + lx - 3ms = 0$; ce qui donne, en faisant $q + l = n - \frac{3lm}{2}$; $x^2 + nx - \frac{q^2}{2} = 0 - 3ms - \frac{3lm}{2}$. Ajoutant de part & d'autre le quarré de la moitié du coefficient du second terme, & transposant $x^2 + nx + \frac{n^2}{4} = \frac{n^2}{4} + \frac{q^2}{2} + 3ms + \frac{3lm}{2}$. Extrayant la racine quarrée de part & d'autre, $x + \frac{n}{2} = \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{q^2}{2} + 3ms + \frac{3lm}{2}}$, & enfin $x = \sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{q^2}{2} + 3ms + \frac{3lm}{2}} - \frac{n^2}{2}$, dont la construction se fait en cherchant entre $3m$ & s, une moyenne proportionnelle AC (fig. 232), & une autre moyenne proportionnelle AB entre $3m$ & $\frac{l}{2}$ (même fig.). Si l'on porte la ligne AB de A en D, la ligne CD sera $= \sqrt{3ms + \frac{3lm}{2}}$; ensuite si l'on éleve de D en H la perpendiculaire DH $= \sqrt{\frac{q^2}{2}}$, on tirera CH qui sera $= \sqrt{\frac{q^2}{2} + 3ms + \frac{3lm}{2}}$; on tirera de plus sur le point H la perpendiculaire HI $= \frac{n}{2} = l + \frac{q}{2}$, la ligne CI sera égale à $\sqrt{\frac{n^2}{4} + \frac{q^2}{2} + 3ms + \frac{3lm}{2}}$; si l'on retranche IH de CI, le reste CK sera $= x$, que l'on cherche.

Fig. 229. Pour suivre le problême, & diriger l'effort composé de la voûte vers le point H de la base, reprenons l'équation $2fpx^2 + 2fpqx - fpq^2 - 3pqgx - 3pgx^2 = 6fmps - 6acfx + 6acgx + 3acfm$; ordonnant l'équation par rapport à $2fpx^2$, parce que je suppose $f > g$, par exemple, $f = 3$. $g = 1$; elle est $2fpx^2 + 2fpqx - fpq^2 - 3pgx^2 - 3pqgx - 6fmps = 0 + 6acfx - 3acfm - 6acgx$. Mettant à la place de f & g leur valeur, elle devient $3px^2 + 3pqx - 3pq^2 + 12acx - 18mps = 0 - 9acm$. Divisant par $3p$, elle est $x^2 + qx - q^2 + \frac{4acx}{p} - 6ms = 0 - \frac{3acm}{p}$, qui ne differe que très-peu de la précédente, & dont la construction est presque la même; c'est pourquoi il suffit d'en indiquer la maniere.

Faiſant donc $p \,.\, a :: c \,.\, \frac{ac}{p} = l$, on aura $x^2 + qx - q^2 + 4lx - 6ms = 0 - 3lm$. Faiſant encore $q + 4l = n$, elle ſe réduit à $x^2 + nx - q^2 - 6ms = 0 - 3lm$. Ajoutant de part & d'autre $\frac{n^2}{4}$, & tranſportant $x^2 + nx + \frac{n^2}{4} = q^2 + 6ms + 3lm + \frac{n^2}{4}$, tirant la racine quarrée $x + \frac{n}{2} = \sqrt{q^2 + 6ms + 3lm + n^2}$, tranſpoſant $x = \sqrt{q^2 - 6ms + 3lm + \frac{n^2}{4}} - \frac{n}{2}$.

Pour exprimer cette racine, il faut chercher une moyenne proportionnelle entre $6m$ & s, une autre entre $3m$ & l, & tirer la racine de la ſomme de ces quarrés en retranchant $\frac{n}{2}$, le reſte ſera la valeur de x que l'on cherche.

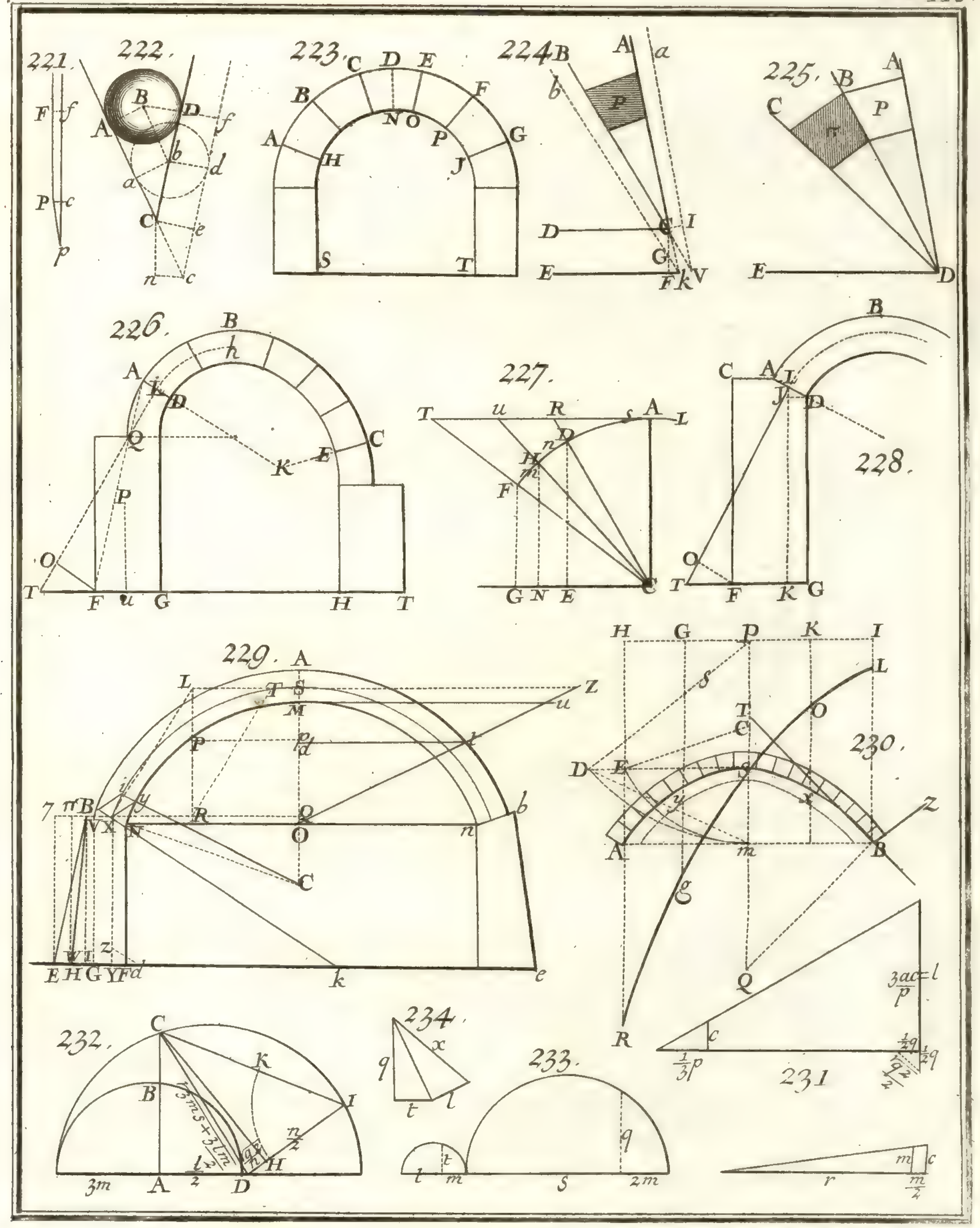
Si l'on vouloit conſerver les grandeurs f & g données, il faudroit ſuivre la même voie, ce qui eſt très facile. Enfin ſi l'on vouloit que le piédroit fût ſans talud, & que l'effort de la voûte fût dirigé vers l'extrémité E, alors la péſanteur du piédroit exprimée par ſon profil, c'eſt-à-dire par la ſurface de ſa coupe, ſeroit le trapeze E 7 NF, égal à ſa hauteur multipliée par ſa baſe $= px$, & l'énergie du piédroit, pour réſiſter à l'effort de la voûte, ſeroit px multipliée par la moitié de la baſe E $= \frac{1}{2}px^2$.

L'énergie de l'effort horiſontal ſeroit toujours $= mps$; l'énergie de l'effort vertical, égale au produit de la péſanteur de la voûte par ſon bras de levier, qui ſeroit alors EF — YF $= x - \frac{m}{2}$, ſeroit $= acx - \frac{acm}{2}$, & l'équation ſeroit $\frac{1}{2}px^2 = mps - acx + \frac{acm}{2}$; multipliant l'un & l'autre membre par 2, & diviſant, par p, elle devient $x^2 = 2ms - \frac{2acx}{p} + \frac{acm}{p}$, & en l'ordonnant, elle eſt $x^2 + \frac{2acx}{p} = 2ms + \frac{acm}{p}$. Faiſant $p \,.\, a :: c \,.\, \frac{ac}{p}$ que je nomme l, elle ſe réduit à $x^2 + 2lx = 2ms + lm$; ajoutant l^2 de part & d'autre, on a $f^2 + 2lx + l^2 = l^2 + 2ms + lm$, dont la racine eſt $x + l = \sqrt{l^2 + 2ms + lm}$, & enfin $x = \sqrt{l^2 + 2ms + lm} - l$. Cette formule donne la conſtruction décrite ci-devant.

Recherches pour une nouvelle ſolution ſans aucune hypotheſe, mais ſeulement par des conſéquences tirées de l'expérience des fractures de voûtes compoſées de vouſſoirs aſſemblés ſans aucune liaiſon que celle de leur coupe, poſées ſur des piédroits trop foibles.

On a dit ci-devant que l'expérience des fractures des voûtes de maçonnerie de moilons ou de briques qui ont fait corps, nous faiſoit voir qu'elles ſe fendoient ordinairement vers le milieu des reins, lorſque les piédroits étoient trop foibles; il n'en eſt pas de même des voûtes de pierres de taille, dont les vouſſoirs ſont ſans liaiſon. M. Daniſy a fait ſur cela pluſieurs expériences avec des modeles de petites voûtes, pour connoître où ſe font les ouvertures des fractions des voûtes au moment de leur deſtruction, lorſque les piédroits cédent à l'effort de leur pouſſée par trop de foibleſſe, ou lorſqu'étant de force ſuffiſante pour y réſiſter, on charge la voûte de quelque nouveau poids, qui en augmente la pouſſée au point de renverſer les piédroits : comme ces expériences ſont curieuſes, & qu'elles peuvent être utiles pour la recherche de la ſolution du problême dont il eſt queſtion, je vais les rapporter telles qu'elles ſont dans l'extrait de l'aſſemblée publique de l'académie de Montpellier, en 1732.

Fig. 235. 1°. Il fit faire une petite voûte de plâtre en plein ceintre compoſée de ſept vouſſoirs, telle qu'elle eſt repréſentée à la fig. 235, dont la baſe des piédroits LM, *lm* n'étoit guere plus grande que celle qu'ils auroient dû avoir dans l'état d'équilibre. Ayant chargé la clef d'un petit poids, la voûte ſe fendoit aux deux joints GI, *gi* vers l'intrados, & aux joints EF, *ef* des premiers vouſſoirs de la retombée, tandis que les deux autres vouſſoirs BC & *dc* étoient ſerrés les uns contre les autres, comme s'ils n'avoient été que d'une ſeule piece, de même que les piédroits H *h*, avec les retombées A *a*. De cette expérience, il a tiré le moyen de trouver la quantité de vouſſoirs qui demeurent comme collés enſemble; en menant du ſommet du joint de la clef G ou *g*, une tangente à l'arc de la doële GF, ou *gf*, tous les vouſſoirs qu'elle traverſe ne ſe ſéparent point au moment des fractures. La raiſon en eſt ſans doute



doute qu'il n'y a point d'interruption de vuide entre le point d'appui ſupérieur G & l'inférieur F.

C'eſt ainſi que M. Couplet a démontré au mémoire de 1730, dont on a parlé ci-devant, qu'en ſuppoſant que les vouſſoirs ne puiſſent point gliſſer les uns contre les autres, la voûte ne caſſera point ſi la corde AB de la moitié de l'extrados ne coupe point l'intrados, mais qu'elle ſe trouve dans l'épaiſſeur de la voûte, comme à la fig. 241. La raiſon eſt que la charge du ſommet A, telle qu'elle puiſſe être, communiquera directement ſans interruption au couſſinet B, ſuivant la ligne droite AFB qui ſe trouve dans l'épaiſſeur de la voûte. Mais s'il y a de l'interruption dans la direction, comme ſi l'arc de doële paſſoit en D, il eſt clair que la charge A pouſſant en AD, & la réſiſtance du piédroit en BD, l'angle ADB peut s'ouvrir, par conſéquent il peut s'y faire une fraction. La même raiſon prouve qu'il ne pourra s'en faire entre les points A & D, B & D, parce que la communication de la charge au point de réſiſtance eſt directe; deſorte que les vouſſoirs qui ſont entre deux ne doivent pas ſe ſéparer. *Fig.* 241.

D'où je tire une conſéquence, que le point d'appui L du piédroit étant donné, on peut déterminer quelle eſt la quantité de vouſſoirs des premieres retombées qui demeureront collées au piédroit au moment de la fraction; car ſi l'on tire du point L une tangente à l'arc de la doële, ſi elle le touche en F, il ne ſe fera point de fraction dans l'intervalle LF; par conſéquent le vouſſoir A, & pluſieurs autres s'il y en a, reſteront collés au piédroit H. *Fig.* 235.

La ſeconde expérience de M. Daniſy, qui eſt du nombre de celles qu'il fit voir à l'aſſemblée publique en 1732, ſe fit ſur cinq petits modeles d'arceaux, dont l'un étoit en plein ceintre compoſé de quinze vouſſoirs, tel qu'on l'a repréſenté à moitié à la fig. 236. L'ayant chargé ſur la clef, il s'ouvrit comme le précédent aux deux côtés de cette clef en dedans & en dehors des joints du deſſus du 2e, 3e & 4e vouſſoirs; deſorte qu'il ſe faiſoit trois ouvertures aux reins, au lieu d'une ſeule qu'on voyoit dans l'arceau précédent, ce qui rend la recherche de la pouſſée plus difficile, parce qu'elle eſt compoſée de plus de parties, dans leſquelles on ne trouve plus les points d'appui à la doële & à l'extrados, mais ſeulement du ſeul côté de la doële, où les leviers tirés de l'un à l'autre, étant multipliés,

ſe confondroient avec l'arc de cercle, ce qui peut mener un ſcrutateur fort loin.

Fig. 238. Le ſecond modele qu'il montra à l'aſſemblée étoit de ſeize vouſſoirs, ſurmonté & ſans clef, c'eſt-à-dire dont le ſommet étoit traverſé par un joint, enſorte que les vouſſoirs étoient en nombre pair de huit de chaque côté. Cet arceau s'ouvrit en une ſeule fente au milieu, & en trois autres à chaque côté de ſuite en dehors des reins, de même que le précédent; la premiere de ces fentes étoit au lit de deſſus du ſecond vouſſoir, de ſorte qu'il en reſtoit deux collés au piédroit, comme à l'arceau précédent en plein ceintre de quinze vouſſoirs.

Fig. 237. Le troiſieme modele d'arceau étoit ſurbaiſſé, compoſé de treize vouſſoirs; il s'ouvrit, comme le premier & le ſecond, aux deux joints de la clef, & en deux fentes à chaque rein, l'une au lit de deſſus, l'autre au lit de deſſous du troiſieme vouſſoir, & il en reſtoit deux de chaque côté collés au piédroit, comme dans les deux arceaux précédens. Et pour montrer que les voûtes ne ſe fendoient pas conſtamment aux mêmes endroits, mais ſelon qu'elles étoient plus ou moins chargées d'un côté

Fig. 239. que de l'autre; il fit voir un quatrieme modele, qui étoit un arc rampant de dix huit vouſſoirs; celui-ci s'ouvrit à l'extrados, aux lits de deſſus & de deſſous du troiſieme vouſſoir de la naiſſance inférieure, & à l'intrados entre le ſeptieme & le huitieme vouſſoir, & enfin à l'extrados du lit de deſſus du quatrieme vouſſoir de la naiſſance ſupérieure, leſquels quatre vouſſoirs étant plus minces que ceux de la naiſſance inférieure, n'occupoient à la doële qu'un intervalle à peu près égal à celui des deux de l'autre impoſte.

Fig. 240. Le cinquieme & dernier modele que M. Daniſy fit voir, étoit une platebande de neuf clavaux, qui ne s'ouvrit qu'aux deux joints de la clef en deſſous, comme à toutes les voûtes qui n'étoient pas rampantes, & en dehors entre le ſommier & le premier clavau. M. Daniſy fit enſuite voir par une expérience, que plus la clef eſt large, moins la pouſſée de la voûte eſt grande: car ſi l'on ſubſtitue à trois ou à pluſieurs vouſſoirs une ſeule clef qui occupe tout l'intervalle qu'ils rempliſſoient, & qui ſoit égale à leur ſomme, on verra que la voûte, qui n'auroit pu ſe ſoutenir après avoir un peu diminué de la force des piédroits, ſe ſoutiendra cependant encore lorſqu'on y aura mis cette clef, quoiqu'elle ſoit auſſi peſante que l'étoient les

vouſſoirs, non dans l'état d'équilibre, mais lorſqu'ils ſurpaſſoient la réſiſtance des piédroits. D'où l'on tire naturellement une conſéquence que nous avons établie ci-devant pour une choſe conſtante, que ſi la voûte étoit toute d'une piece, la pouſſée deviendroit nulle.

Après avoir fait des expériences ſur les fractions des voûtes, M. Daniſy en fit ſur celles de leurs piédroits, lorſqu'ils étoient trop foibles pour réſiſter à la pouſſée des vouſſoirs; il produiſit un modele de voûte dont les piédroits étoient de pluſieurs pieces, par le moyen duquel il fit voir que lorſque les piédroits ſont foibles & fort hauts, ils ne ſe ſéparent pas toujours au rez-de-chauſſée, mais qu'ils ſe fendent entre le rez-de-chauſſée & l'impoſte; d'où il conclut que ſi les piédroits doivent ſe fendre vers le milieu, il faut que le contre-fort dont on le fortifie ſoit élevé au-deſſus de ce point: la choſe eſt claire; mais il n'eſt pas ſi aiſé qu'il eſt dit dans l'extrait dont je parle, de déterminer préciſément cet endroit, du moins je n'en ſens pas la facilité, parce que l'auteur nous a caché les moyens de l'appercevoir.

Je crois au contraire qu'elle n'eſt facile à déterminer que lorſque la hauteur du contrefort eſt donnée, parce que ſon ſommet ſert d'appui à la partie ſupérieure du piédroit, au moment que la pouſſée de la voûte commence à le faire ſurplomber du côté du contre-fort, en le faiſant taluder en dedans; alors la partie rompue compriſe entre l'impoſte & la fracture du piédroit, peut être conſidérée comme un levier qui s'appuie ſur le ſommet du contre-fort, lequel levier étant pouſſé par le bout de l'impoſte en dehors, eſt repouſſé par l'autre bout en ſens contraire au dedans des piédroits.

De toutes ces expériences M. Daniſy a tiré une regle pour déterminer l'épaiſſeur néceſſaire à la baſe des piédroits qui ſont à-plomb par dedans & par dehors, pour qu'ils ne ſoient pas renverſés par l'effort de la pouſſée de la voûte, dans laquelle regle il n'a aucun égard à la hauteur des piédroits, parce qu'il les fortifie plus qu'il n'eſt néceſſaire, de crainte que *quelque accident ne renverſe* ceux qui ſeroient faits *ſuivant la rigueur du calcul:* auſſi ne la donne-t-il pas pour être *dans la rigueur géométrique*, mais ſeulement parce qu'elle lui ſemble commode dans la pratique pour les ouvriers, en ce qu'elle ne *demande d'autre connoiſſance*

que les regles ordinaires de l'arithmétique, l'extraction de la racine quarrée & le toisé.

Après ce préliminaire on ne doit pas être surpris qu'il ait dit qu'en suivant sa regle *il ne faut pas s'embarrasser de la hauteur que les piédroits doivent avoir.* Le problême dont il m'a fait part, & que j'ai donné ci-devant, prouve évidemment qu'il n'est pas du sentiment que la hauteur d'un piédroit n'influe en rien sur l'épaisseur qu'il doit avoir pour résister à une poussée constante; il s'explique même clairement sur cette regle dans la lettre qu'il m'a fait l'honneur de m'écrire. « J'y ai pris, » dit-il, certaines licences qui pourroient vous faire juger que » je me suis trop écarté de la rigueur géométrique; je dois » vous avertir que j'ai cru devoir le faire ainsi en faveur des » ouvriers qui préferent des pratiques aisées, quoique moins » géométriques, aux méthodes plus exactes. C'est dans cette idée qu'il a apparemment supprimé l'effort vertical pour fortifier le piédroit au delà du nécessaire, & qu'il confond dans l'usage les inégalement surbaissés, ou plus ou moins surhaussés sur un même diametre horisontal.

Fig. 235. Si l'on est curieux de voir cette regle, qui n'est susceptible d'aucune démonstration, par toutes ces raisons, la voici tirée mot à mot de l'extrait cité. « Elle consiste à mener en quel- » que part de la ligne oblique GF, une ligne à-plomb GI, & » une horisontale, FI, pour avoir le triangle FIG. On toisera » ensuite la surface FE *e f* avec celle des murs qui sont bâtis » sur cet arc FE *e f*; on en multipliera la moitié par la ligne » horisontale FI; on divisera le produit par le double de l'obli- » que FG, & on tirera ensuite la racine quarrée du quotient. » Pour les platebandes, on prendra ce nombre trois fois, pour » les arcs surbaissés deux fois & demi, pour les arcs en plein- » ceintre deux & un quart, & pour les surmontés deux fois, » & ce sera l'épaisseur que M. Danisy estime qu'il faut donner » aux piédroits des voûtes pour une parfaite solidité, *sans s'em-* » *barrasser de la hauteur que ces piédroits doivent avoir.* En voici la construction avec la regle & le compas.

Fig. 242. « Après avoir tracé en grand sur un mur, ou en petit sur le pa- » pier, l'épure de l'arceau ABCDE, les ouvriers diviseront cet » arceau en deux également par la ligne KM à-plomb, qu'ils » prolongeront jusqu'en L, qui rencontre le plus haut GH du » mur FGHI qui est soutenu par l'arceau. De l'extrêmité C

„ de la clef à l'extrados, & du point d'atouchement N, ils „ meneront la ligne NO; ils feront PL parallele à NC, & „ par le point O ils abaisseront la perpendiculaire OQ sur „ l'oblique PL; il faudra ensuite porter la ligne OQ de A en „ R sur l'horisontale FI; il faudra encore porter de A en T „ la partie PS, moitié de PM, & par le point V, milieu de „ RT, décrire avec une ouverture de compas égale à RV, le „ demi-cercle RXT. Par le point A on menera la ligne à plomb „ AX, & ce sera cette longueur AX qu'on prendra trois fois „ pour les platebandes, deux fois & demi pour les arcs sur- „ baissés, deux & un quart pour ceux à plein-ceintre, & deux „ fois pour les gothiques ou à tiers-point; si on porte cette „ valeur de A en F, AF sera l'épaisseur qu'on peut donner au „ piédroit, & quoiqu'on pût absolument la donner moindre, „ c'est toujours hasarder, & il vaut beaucoup mieux les faire „ trop forts que trop foibles ». *Fig. 242.*

Quoique les expériences dont ont vient de parler ne paroissent pas suffisantes pour fournir les moyens d'en tirer une regle générale pour la poussée des voûtes, voici ce qu'on pourroit tirer de celle de la fig. 235, où la voûte en plein-ceintre ne s'est ouverte qu'aux deux côtés de la clef & aux deux reins, où l'on verra que l'équation qui en résulte est différente de celle qui semble avoir donné la construction de la regle de M. Danisy.

PROBLEME VII.

Trouver l'épaisseur nécessaire aux piédroits d'une voûte qui ne doit se fendre qu'en quatre endroits, au moment de sa destruction, comme celle de la fig. 235, suivant l'expérience.

Soient nommées les données FI $=a$, GI $=b$, FG $=d$, la ligne LZ tirée perpendiculairement du point L sur FI prolongée $=$ FM $=h$, LM $=x$, supposons la pesanteur du piédroit exprimée par la surface du rectangle MZ $=hx$. Pour réduire les deux efforts N & I en un seul, il faut multiplier le poids de la moitié de la clef, & celui de la partie FEGI de la voûte, chacun par sa distance du point F, & diviser le produit par la somme de ces deux poids; le quotient donne le point C sur la ligne FG dans quelqu'endroit qu'il puisse être. Soient nommés ces deux poids, qui seront justement la pesanteur de la moi- *Fig. 235.*

Fig. 235. tié de l'arc FE$ef=q$; ſoit tiré du point C la ligne CQ parallele à GI. Il n'eſt pas néceſſaire dans la pratique de faire cette opération, comme on le verra dans la ſuite, mais il faut la ſuppoſer faite pour réſoudre le problême par analyſe.

Le poids q multiplié par CF exprime l'effort de la peſanteur de la moitié de l'arc FEef, ſuivant la direction oblique CF. Cet effort $q \times CF$ ſe décompoſe en deux autres, dont l'un eſt horiſontal ſuivant FQ, & l'autre vertical ſuivant CQ, parce que CF peut être regardée comme la diagonale d'un parallelograme dont FQ & CQ ſeroient les côtés. Il ſe décompoſe de façon que l'effort total $q \times CF$ au point F, doit être égal à l'effort horiſontal & à l'effort vertical pris enſemble & réunis au même point F, & que ces trois efforts doivent être entre eux comme les lignes CF, FQ, CQ.

Ces deux conditions ſont remplies en exprimant l'effort total par $q \times CF$, l'horiſontal par $q \times \frac{\overline{FQ}^2}{CF}$, le vertical par $q \times \frac{\overline{CQ}^2}{CF}$, où l'on voit que ces trois efforts conſervent le rapport demandé, & que l'effort total eſt égal aux deux autres, à cauſe du triangle rectangle CQF qui donne $\overline{CF}^2 = \overline{FQ}^2 + \overline{CQ}^2$. Mais les triangles ſemblables FQC, FIG, donneront CF, FQ, CQ = GF, FI, IG; mettant donc à la place de CF, FQ, CQ, leurs proportionnelles GF, FI, IG, les expreſſions précédentes deviendront $q \times GF$. $q \times \frac{\overline{FI}^2}{GF}$. $q \times \frac{\overline{GI}^2}{GF}$, dans leſquelles les mêmes relations ſont obſervées.

A préſent ſi l'on conſidere que l'effort horiſontal, agiſſant contre le levier LF au point F pour le faire tourner ſur le point L du côté de Z, eſt appliqué au bras du levier LZ, ſon énergie ſera $= q \times \frac{\overline{FI}^2}{GF} \times LZ = q \times \frac{a^2}{d} \times h = \frac{a^2 qh}{d}$. Cette énergie tend à renverſer le piédroit. L'effort vertical au contraire tend à affermir le piédroit, & agiſſant en F pour faire tourner le levier LF ſur le point L du côté de M, il eſt appliqué au bras du levier LM; ſon énergie ſera donc $q \times \frac{\overline{GI}^2}{GF} \times LM = q \times \frac{b^2}{d} \times x = \frac{b^2}{d} qx$. La différence de l'effort horiſontal, qui renverſe le piédroit, à l'effort vertical qui l'aſſure, eſt donc préciſément la

235.

236.

237.

238.

239.

240.

241.

242.

243.

force restante pour agir contre le piédroit ; cette force est $\frac{a^2qh}{d} - \frac{b^2qx}{d}$. Le piédroit pour lui résister oppose son effort, & cet effort est égal au produit de son poids par la perpendiculaire abaissée du point L sur la direction du centre de gravité ; il est donc $hx \times \frac{1}{2}$ LM $= \frac{1}{2}hx^2$. Pour entretenir l'équilibre, l'effort du piédroit doit être égal à celui qui lui est contraire, d'où résulte cette équation $\frac{1}{2}hx^2 = \frac{a^2qh}{d} - \frac{b^2qx}{d}$. Multipliant l'un & l'autre membre par 2, & transposant pour l'ordonner, elle devient $hx^2 + \frac{2b^2}{d}qx = \frac{2a^2qh}{d}$. Divisant par h, elle est $x^2 + \frac{2b^2qx}{hd} = \frac{2a^2q}{d}$. Ajoutant de part & d'autre le quarré de la moitié du coefficient du second terme, elle se change en $x^2 + \frac{2b^2qx}{dh} + \frac{b^4q^2}{d^2h^2} = \frac{b^4q^2}{d^2h^2} + \frac{2a^2q}{d}$, dont la racine est $x + \frac{b^2}{dh}q = \sqrt{\frac{b^4}{d^2h^2}q^2 + \frac{2a^2q}{d}}$.

Cette formule enseigne qu'il faut prendre la surface de l'arc FE*ef*, multiplier sa moitié par la quatrieme proportionnelle à FG & à GI, diviser ce second produit par le quarré de la hauteur du piédroit, ajouter ce quotient au produit formé suivant la premiere regle, tirer la racine quarrée de cette somme, & enfin retrancher de cette racine le produit de la surface de la moitié de l'arc FE*ef*, par la quatrieme proportionnelle à FG & à GI divisé par la hauteur du piédroit. Ce qui reste est l'épaisseur qu'il faut donner aux piédroits d'une voûte à plein-ceintre, dont les voussoirs sont en nombre impair.

Si l'on fait attention à la conduite que l'on a tenue pour résoudre ce problême, on remarquera aisément que l'on a décomposé l'effort total de la voûte sur le point où se fait l'ouverture aux reins en deux autres, dont l'un est horisontal & l'autre vertical ; que l'horisontal se fait suivant FI, ligne comprise entre le point de rupture & la verticale abaissée de l'extrémité de la clef, que le vertical se fait suivant GI, ligne verticale abaissée de l'extrêmité de la clef jusqu'à la rencontre de l'horisontale ; que ces deux efforts sont comme les deux lignes FI, GI, & enfin que l'effort horisontal tend à renverser le piédroit, & le vertical à l'affermir.

Corollaire I.

D'où il ſuit, 1°. que plus la clef eſt large moins la pouſſée de la voûte eſt grande, parce que dans ce cas la ligne FI diminue plus à proportion que la ligne GI, c'eſt-à-dire, que l'effort horiſontal devient moindre à proportion que le vertical.

Corollaire II.

2°. Que la peſanteur de la voûte, la clef, la diſtance & la hauteur des piédroits reſtant les mêmes, l'effort horiſontal ne change plus, puiſqu'il n'y a que le vertical qui varie ſelon que la voûte differe plus ou moins de celle en plein ceintre, c'eſt-à-dire ſelon que l'arc eſt ſurbaiſſé ou ſurhauſſé; & que dans les ſurbaiſſés l'effort vertical qui agit pour le piédroit étant moindre, les piédroits demandent plus d'épaiſſeur, & au contraire les ſurhauſſés en demandent moins.

Le défaut d'explication de l'énoncé de la regle de M. Daniſy ayant donné occaſion de chercher la route qu'il avoit pu tenir pour venir à ſa conſtruction, on a trouvé qu'on ne le pouvoit que par un faux raiſonnement, qui donnoit $\overline{LM}^2 = q \times \frac{FI}{2FG}$, dont la racine quarrée, qui eſt $LM = \sqrt{q \times \frac{FI}{2FG}}$, donne préciſément cette conſtruction ; mais on a vu ci-devant qu'on ne doit pas penſer que ce ſoit par inadvertence, mais parce qu'il a ſupprimé l'effort vertical du piédroit, pour qu'il en réſultât une plus grande épaiſſeur.

De la pouſſée des voûtes compoſées, & de pluſieurs ſimples qu'on peut conſidérer comme compoſées.

Les auteurs qui ont travaillé à réſoudre le problême de la pouſſée des voûtes, n'ont fait attention qu'à celle des berceaux & des platebandes, c'eſt-à-dire aux cylindriques & aux planes, ſans faire aucune mention de celle des autres eſpeces dont les ſurfaces intérieures ſont de différentes figures ſimples, comme les ſphériques, ſphéroïdes, coniques, annulaires & hélicoïdes; ni aux voûtes qui ſont compoſées de pluſieurs portions des corps ſimples, raſſemblées ſous différens angles,

angles, & ſuivant différentes directions, ce qui méritoit cependant d'être mis en queſtion, parce que les berceaux ſimples ne ſont pas les voûtes les plus uſitées dans les bâtimens civils. Je vais tâcher de ſuppléer à cette omiſſion, autant qu'il eſt néceſſaire pour la pratique, en rapportant toutes ſortes de voûtes aux cylindriques par des conſéquences tirées de la ſpéculation & de l'expérience. Quoiqu'il ſoit du bon ordre d'aller du ſimple au composé, j'examinerai les voûtes compoſées avant les ſimples, parce que je dois conſidérer les ſimples comme compoſées de petites parties cylindriques, ſemblables à celles des voûtes d'arête & en arc de cloître.

De la pouſſée des voûtes d'arête.

Une voûte d'arête (comme nous l'avons dit au commencement de ce 3ᵉ tome) eſt un compoſé de deux ſurfaces de demi-cylindres : APBD dont le ceintre eſt A *h* P, & ADBP dont le ceintre eſt PHB, qui ſe croiſent ſur une même hauteur d'impoſte & de clef, ce qui forme quatre portions de cylindres ſéparées par les arêtes de leurs interſections, & l'on ſous-diviſe encore chacune de ces portions en deux parties égales qu'on appelle *pandantifs*; nous appellons *travée* cet aſſemblage de huit pandantifs, dont les deux contigus en retour ſont un quart de travée. Plan. 112, *Fig.* 244.

Si l'on conſidere chacun de ces pandantifs à part comme un triangle cylindrique dont l'axe eſt horiſontal, & qui eſt appuyé ſur une de ſes pointes poſée ſur un pilier que nous appellons piédroit; il eſt clair que l'effort de ſa peſanteur qui pouſſe le piédroit ſe fera ſuivant l'arc elliptique qui ſeroit la ſection de ce triangle cylindrique par ſon centre de gravité. Ainſi conſidérant cette ſurface courbe dans ſa projection *m* PC, ou MPC, on diviſera le côté droit & horiſontal *m* C, ou MC, en deux également en *n*, ou en N; la pouſſée du pandantif ſur le piédroit *b* P *a x* ſe fera ſuivant cette direction *n* P. D'où il ſuit que pour trouver la direction de la pouſſée commune aux deux pandantifs joints enſemble & appuyés ſur le point commun P, il faut prolonger les directions *n* P en *q* & NP en *r*, chercher l'épaiſſeur du piédroit qui convient au ceintre & à la charge de l'arc elliptique ſur *n* P & NP, & porter cette épaiſ-

Fig. 244. ſeur en *q* & en *r*; enſuite par ces points *q* & *r* mener des paralleles aux directions pour former le parallelograme P*ryq*; la ligne P*y* ſera la valeur de la pouſſée du quart de travée de la voûte d'arête, ſuivant cette hypotheſe.

Mais ſi l'on fait attention que les lits des vouſſoirs ſont paralleles aux axes de chacune des portions de cylindre qui font les pandantifs, on reconnoîtra que la direction de leur pouſſée ſera déterminée par les perpendiculaires aux plans des lits, ce qui en diminue l'effort, parce que l'angle du concours des deux puiſſances *m*PM, eſt moins aigu que celui des deux précédentes *n*PN, ſuivant les propriétés des mouvemens compoſés, démontrées dans les traités de méchanique; ainſi nous abandonnons cette premiere hypotheſe, pour conſidérer les pandantifs comme une ſuite d'arcs circulaires ou elliptiques paralleles entre eux, qui vont toujours en diminuant, & qui tendent à ſe redreſſer ſuivant une direction qui eſt dans un plan perpendiculaire à l'axe; en effet une voûte d'arête dont l'appareil ſeroit par joints de tête de ſuite en déliaiſon, quoiqu'un peu moins ſolide, n'en ſubſiſteroit pas moins, pourvu que les enfourchemens fuſſent faits en bonne coupe ſur leurs lits.

Soit (fig. 244) APBD la projection horiſontale d'une voûte d'arête compoſée de deux berceaux inégaux qui ſe croiſent, leſquels forment quatre lunettes, dont les oppoſées au ſommet ACP, DCB ſont égales, & celles qui ſont de ſuite ACP, PCB inégales, l'une étroite & ſurhauſſée ſuivant le profil A*h*P, & l'autre large & ſurbaiſſée PHB. On cherchera, par les problêmes précédens, l'épaiſſeur du piédroit qui convient à chacun de ces berceaux; s'il n'y a point de biais, on portera la ligne trouvée pour cette épaiſſeur ſur la prolongation des côtés, & s'il y a du biais, on la portera ſur la prolongation de l'arc droit; par exemple, la meſure de l'épaiſſeur P*a* ſur AP prolongé en *a*, pour la pouſſée de l'arc doubleau A*h*P, & l'épaiſſeur P*b* ſur BP prolongé en P*b*, pour la pouſſée de l'arc doubleau BHP; enſuite par les points *a* & *b* on menera des paralleles aux côtés oppoſés, leſquelles ſe croiſeront en *x*, le rectangle P*bxa* ſera la ſurface de la baſe du piédroit ou pilier néceſſaire pour réſiſter à la pouſſée du quart de la voûte d'arête APBD, que j'appellee un quart de travée, parce qu'elle eſt compoſée de deux pandantifs, qui ſont deux

triangles cylindriques, dont les projections sont les triangles rectilignes m PC, MPC. *Fig.* 244.

Si l'on fait attention que tout l'effort de la poussée se fait sur le point P, on reconnoîtra premierement, qu'il est chargé de toute la pesanteur des deux pandantifs qui le pressent verticalement, & tendent à écraser la matiere dont le piédroit est construit. Secondement, que l'effort horisontal de la poussée se fait suivant la diagonale Px. D'où il suit que les prismes triangulaires du piédroit, qui ont pour base les triangles Pbx & Pax, ne lui sont nécessaires que pour empêcher que l'angle P ne soit écrasé, & pour contenir la charge dans sa direction verticale, afin que le piédroit ne s'incline pas vers a ni vers b; de sorte que supposant deux barres de fer de force suffisante, l'une posée verticalement pour soutenir le fardeau, l'autre en situation inclinée suivant la tangente du joint extrême, pour résister à la poussée de l'arête dont la projection est CP, il n'en faudroit pas davantage pour soutenir ce quart de travée, si le fond étoit impénétrable, & l'équilibre parfait; c'est une spéculation dont l'exécution est impossible, mais qui n'est pas inutile pour donner une juste idée du sujet.

SECOND CAS.

Lorsqu'il y a deux travées de voûtes de suite sur le même alignement.

Soient deux quarts de travées APCM, BPCD (fig. 245), c'est-à-dire quatre pandantifs, dont les projections sont les triangles APM, MPC, CPD & DPB; il est clair, par la construction précédente, que les diagonales Pd, Pm des deux parallelogrammes PQma & PQdb, exprimeront les épaisseurs nécessaires pour contenir la poussée de chacun des quarts de travée, & qu'ainsi un pilier triangulaire Pdm seroit suffisant pour contenir la poussée des deux quarts de travée; mais comme toute leur charge porteroit sur le point P, l'angle de ce piédroit seroit écrasé par cette charge, ou s'enfonceroit dans le sol, pour peu qu'il ne fût pas suffisamment solide; c'est pourquoi il convient d'ajouter au prisme triangulaire Pdm les deux triangles aPm & bPd pour le fortifier, & le rendre propre à soutenir le poids de la voûte. Je dis seu- *Fig.* 245.

Fig. 245. lement pour ce sujet, & non pour n'être pas jetté à droite ou à gauche, comme au cas précédent, parce qu'ici les deux arcs de formerets sur AP & BP, étant diamétralement opposés, demeureront en équilibre si leurs diametres & leurs charges sont égales; & si elles sont inégales, la poussée qui se fera d'un côté plus que de l'autre sera la différence des deux efforts. Ainsi en ce cas, il faut indispensablement quelque épaisseur de piédroit en P, mais dans la pratique il convient toujours qu'il y en ait, quand même les formerets seroient égaux, parce que toute la charge tombant sur un angle P, il seroit difficile qu'il fût de pierre d'une assez forte consistance, ou sur un fond assez dur, pour qu'elle ne fût pas écrasée par la charge, ou qu'elle ne s'enfonçât un peu dans le sol de la fondation, auquel cas le moindre mouvement romproit tout l'équilibre.

REMARQUE.

Fig. 250, & 250. Par cette raison, les architectes divisent ordinairement les travées des voûtes d'arête par un ornement en saillie qu'ils appellent *arc doubleau*, *efgi*, parce qu'il double cette partie de voûte, lequel arc occupe en largeur celle d'un pilastre D*ef*K, ou d'une perche qui lui sert de base, qui fait par conséquent un pan K*efl* au lieu de l'angle *d*P*m*. Cet arc doubleau, dans l'architecture moderne, est une arcade cylindrique, c'est-à-dire une portion de berceau simple qu'on orne de panneaux ravallés, dans lesquels on place à propos des ornemens de sculpture, comme des rosons, des bas-reliefs, &c. Dans l'architecture gothique, l'arc doubleau est, comme les autres nervures d'ogives, tiercerons, liernes, &c. une partie fort saillante profilée en moulures de doucines opposées, avec des quart-de-ronds, baguettes, &c. mais beaucoup moins large que dans l'architecture moderne, parce que sa base n'est posée que sur une perche, & même souvent elle porte à faux sur un cul-de-lampe.

TROSIEME CAS.

Lorsqu'il y a trois travées de suite en retour d'un angle droit.

Dans une grande partie de nos églises qui sont voûtées en voûtes d'arête sur un plan en croix latine, il se trouve à la

croiſée des bras avec la nef une ſuite de trois travées en retour, qui ſont appuyées à moitié ſur des piliers angulaires; celle du milieu eſt exactement quarrée, lorſque les bras ſont de même largeur que la nef; mais lorſqu'ils ſont plus étroits, elle devient barlongue, comme ſont ordinairement les autres travées, un peu plus ou moins, ſelon qu'elle differe des autres en largeur, c'eſt-à-dire ſelon que les bras ſont plus étroits que la nef. Ordinairement les travées extrêmes des deux côtés de la croiſée ſont égales, parce qu'on fait les bras égaux en largeur à la nef; mais comme ils peuvent ne pas l'être, nous choiſirons ce cas pour rendre la conſtruction plus générale.

Ayant trouvé par la conſtruction du cas précédent la diagonale P x qui exprime le réſultat de la pouſſée des deux travées de ſuite FA, AB, on cherchera par le premier cas la pouſſée de la travée GB qui ſera P y; puis par les points y & x, on menera des paralleles aux côtés oppoſés qui ſe croiſeront en z; la diagonale P z exprimera la pouſſée des trois travées réunies à une ſeule direction. On tirera enſuite du point z des perpendiculaires $z\,i$, $z\,k$ aux côtés PF, PG; le quarré P$f\,z$G ſera la ſurface de la baſe du pilier que l'on cherche. *Fig. 246.*

REMARQUE.

Quoiqu'il y ait des exemples de cette conſtruction, ils ſont cependant aſſez rares; on coupe ordinairement par un petit pan $a\,r$ l'angle a P r d'encoignure, pour donner plus de force à la naiſſance de la travée du milieu, comme on voit à la fig. ✠, à côté de la fig. 246. Les bons architectes ne voûtent guere le milieu de la croiſée en voûte d'arête, mais plutôt en cul-de-four, parce que ſi le ceintre primitif de la nef eſt circulaire, les arêtes de la croiſée deviennent fort ſurbaiſſées, & rendent cette partie de voûte trop foible, laquelle étant ordinairement plus chargée de charpente que les autres, a beſoin au contraire de plus force. *Fig. ✠, au haut de la planche 112.*

Il eſt aiſé de voir que lorſque les travées extrêmes ſont inégales, les côtés i P & k P du pilier deviennent inégaux, & que ſi les trois travées étoient égales entre elles, il n'y auroit que celle du milieu qui agiroit pour renverſer le pilier, parce que

les deux extrêmes étant exactement opposées l'une à l'autre, le contrebalanceroient & demeureroient en équilibre, si leur épaisseur & leur charge étoient parfaitement égales ; si elles sont inégales, la poussée des extrêmes se fera suivant une diagonale P*u*, qui ne sera plus dans la direction de l'arête DP, & qui sera d'autant plus ou moins grande que l'angle de leurs ogives ou arêtes EPC sera plus ou moins obtus.

QUATRIEME CAS.

Lorsqu'il y a quatre travées, ou plus, autour d'un pilier.

Fig. 247. Il est clair que lorsque les pandantifs d'une voûte d'arête sont égaux entre eux & diamétralement opposés, les efforts de leurs poussées se détruisent mutuellement, & par conséquent qu'ils n'agissent plus sur le piédroit que par la charge de leur pesanteur qui fait effort pour l'écraser ; c'est dans ce cas où l'on reconnoît, encore plus que dans les précédens, la nécessité de séparer les travées par des arcs doubleaux qui ayent une certaine largeur, suffisante pour donner au pilier l'épaisseur qui lui est nécessaire pour soutenir le poids de huit pandantifs dont il doit être chargé, ce que l'on ne peut déterminer que par l'usage & l'expérience de la pierre de taille qu'on y emploie, qui est plus ou moins forte à la charge, c'est-à-dire qui peut ou ne peut pas être écrasée, & par la connoissance que l'on doit avoir de la pesanteur absolue des huit parties de voûtes que le pilier doit soutenir, lesquelles peuvent être plus ou moins épaisses, & chargées de charpente ou d'autre chose ; s'il se trouvoit de l'inégalité dans les pandantifs opposés, alors l'épaisseur du pilier seroit déterminée par la différence des deux lignes qui expriment la poussée horisontale, qu'on peut trouver par les problêmes précédens.

On sait que pour trouver la pesanteur absolue de chaque pandantif, & de tous ceux qui chargent un pilier, il faut en faire le toisé & le multiplier par la pesanteur des matériaux, connue par l'expérience & réduite en pieds cubes; mais la maniere de toiser ces pandantifs avec une certaine exactitude n'est connue que depuis peu ; c'est à M. Senès, de l'Académie des Sciences de Montpellier, ingénieur en chef du canal de

Cette, au Rhône, que nous la devons; on la trouvera dans les mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, (années 1719 & 1721), avec ses démonstrations; on peut y avoir recours pour opérer avec une grande justesse. Si cependant l'on veut se contenter d'une opération moins parfaite, laquelle peut être suffisante pour le sujet dont il s'agit, il n'y a qu'à faire le développement d'un pandantif considéré dans le milieu de son épaisseur, de la même maniere que nous avons donné pour en faire les panneaux de doële, mesurer chacune de ses parties comme autant de trapezes, & la premiere à la naissance comme un triangle; ajouter toutes ces surfaces ensemble & les multiplier par l'épaisseur commune. Le produit multiplié par le nombre de livres que pese un pied cube, donnera la pesanteur absolue de la voûte. Nous verrons ci-après la maniere de trouver le poids d'un pied cube de chaque espece de matériaux, en cas qu'on ne le connoisse pas & qu'on n'ait pas des tables des poids sur lesquelles on puisse compter.

Soit, par exemple, le pandantif *m* PC qu'on veut mesurer, on rectifiera la moitié du ceintre du formeret P*h*, qu'on portera développé sur PA prolongé en *mp* avec ses divisions 1, 2, 3, 4, étendues aux points 1^a, 2^a, 3^a, *m*, par lesquels on menera des paralleles indéfinies à la ligne de projection de la clef *m*C; puis par les points 1^r, 2^r, 3^r, où la projection de l'arête coupe les lignes provenant des points 1, 2, 3, 4, du formeret P*h*, ou par les points 1e, 2e, 3e, du formeret suivant PH, on menera des paralleles à P*p*, qui couperont les perpendiculaires à la même ligne aux points 1^d, 2^d, 3^d, C, par lesquels on tracera à la main la courbe *p*C, qui sera le développement de l'arête du pandantif. Le triangle mixte *pm*C sera la surface de la doële du pandantif, si l'arc *h*P est pris à la doële, & celle du milieu de la voûte, si cet arc est pris au milieu: ainsi multipliant cette surface par l'épaisseur de la voûte, on aura le toisé de son cube, lequel multiplié par le nombre de livres de la pesanteur d'un pied cube de la pierre dont il est fait, donnera la pesanteur absolue de la voûte. Il faut observer que cette opération donne un peu trop, parce que les naissances des pandantifs qui se pénetrent, retranchent la pointe de la naissance. *Fig.* 247.

REMARQUE.

On fait ufage de cette conftruction lorfque l'on eft obligé de voûter fur des piliers. 1°. dans les endroits où l'on ne peut trouver la hauteur qui feroit néceffaire pour ne faire qu'un ceintre qui comprenne toute la largeur du bâtiment. 2°. Lorfque les murs ne font pas d'une épaiffeur fuffifante pour réfifter à la pouffée d'une voûte d'un grand diametre, parce qu'on la diminue dans le rapport des hauteurs & des diametres. 3°. Enfin, pour pouvoir faire des voûtes de peu d'épaiffeur & de moins de furface, foit par raifon de charge ou par raifon de ménagement de dépenfe. C'eft par ces raifons que l'on a fait ainfi des bas côtés doubles dans une partie de nos anciennes églifes, comme à Notre-Dame de Paris, &c, & dans les grandes falles de la plupart des monafteres, & des anciens édifices.

Explication démonftrative.

On peut fans doute confidérer un quart de travée de voûte d'arête *m* PMC, & chaque pandantif en particulier, comme une fuite de plufieurs tranches de berceaux coupés verticalement par des plans perpendiculaires à leurs axes : or il eft vifible que chacune de ces tranches étant pofée dans fa partie inférieure fur l'arcade que forment les vouffoirs d'enfourchement, fuivant l'arête où fe fait la jonction des deux pandantifs contigus, elle fait effort par fa charge pour faire dreffer cet arc d'ogive, & par conféquent pouffe ainfi médiatement le piédroit pour le renverfer. Il eft auffi vifible que les arcades des arcs doubleaux pouffent chacune immédiatement ce même piédroits en différentes directions, qui font ordinairement entre elles un angle droit, d'où il réfulte, fuivant les principes de la méchanique, des mouvemens compofés; enforte que la direction qui réfultera de celle des deux puiffances qui pouffent, fera la diagonale d'un rectangle dont les longueurs des côtés feront entre elles comme ces puiffances. Or comme toutes les arcades des vouffoirs font paralleles entre elles dans chaque pandantif, il réfultera auffi que le concours de leur direction fe réduira à une troifieme, qui fera auffi dans le même plan que celle du concours des arcs doubleaux.

Si

Si l'on fait préſentement attention que les pouſſées de toutes ces arcades inégales ſont relatives à leurs retombées, qui ſont les ſinus ou les ſinus verſes de chacun de ces arcs, comme il a été démontré ci-devant, on reconnoîtra que les triangles rectilignes *m*PC, MPC, qui ſont les projections des deux pandantifs contigus, contiennent tous ces ſinus verſes, par conſéquent que les longueurs qui donnent l'épaiſſeur du piédroit pour chacune de ces arcades, formeront un triangle ſemblable à celui de la projection horiſontale; donc ſuppoſant les côtés P*a* & P*b* trouvés ſuivant les problêmes de la pouſſée des arcs doubleaux, le parallelograme P*bx*, ſemblable à celui de la projection C*m*PM, ſera la baſe du pilier qui doit ſoutenir la pouſſée du quart de travée de voûte d'arête donné, ce qu'il falloit trouver. *Fig.* 244.

REMARQUE.

Il faut remarquer que par cette compoſition & diſpoſition de portions de berceaux qui ſe croiſent, il réſulte une voûte dont la ſurface eſt moindre que celle du berceau ſimple qui couvriroit le même eſpace du rectangle DAPB; parce que chacun des pandantifs eſt moindre que la huitieme partie d'un tel berceau, quoiqu'il le paroiſſe ainſi dans ſa projection. Pour en connoître la différence, il n'y a qu'à faire le développement d'un de ces pandantifs, comme on vient de l'enſeigner pour le pandantif P*m*C, ou ſon égal A*m*C, où l'on voit que la courbe $p\ 2^d$ C, qui termine un des côtés de la ſurface développée, eſt concave, & toute au dedans de la corde *p* C, par conſéquent que le triangle mixte P*m*C eſt moindre que la moitié du parallelogramme *me*, qui eſt le développement de la projection *m*E, laquelle exprime le quart du berceau qui couvriroit l'eſpace horiſontal APBD; donc la ſurface d'un pandantif d'une travée de voûte d'arête eſt moindre que la huitieme partie du berceau, & par conſéquent les huit pandantifs dont elle eſt compoſée font enſemble une ſurface conſidérablement plus petite que celle d'un berceau de même hauteur, qui ſeroit à la place d'une voûte d'arête, ce qu'il falloit prouver.

On va voir le contraire dans les voûtes en arcs de cloître; cependant chacun des pandantifs pouſſe plus, c'eſt-à-dire fait

plus d'effort pour renverſer le piédroit que la portion de berceau en continuation PCM, qui ſeroit ſon complément, quoique plus grand en ſurface de près d'un tiers, puiſqu'il contient plus de deux fois le ſegment de développement p1C; la raiſon eſt que les vouſſoirs pouſſent d'autant plus qu'ils approchent de la clef, & d'autant moins qu'il approchent de l'impoſte; en effet on verra ci après que juſqu'à la hauteur du quart de cercle P 1, ils ne pouſſent point du tout, étant retenus par le ſeul frottement de leurs lits, ils ſe ſoutiennent les uns ſur les autres ſans gliſſer juſqu'à 22 & même juſqu'à 25 degrés; on remarque auſſi qu'au-deſſus juſqu'à 45 degrés ils pouſſent fort peu, puiſque ce n'eſt qu'à cette hauteur que les voûtes ſe fendent.

Fig. 248. Ainſi (à la fig. 248) ſi l'on mene par le point 2 du ceintre bH, une parallele à l'impoſte Ab, elle coupera la diagonale AC au point a^2, & le côté Ad au point x; ſi par le point a^2 on tire $a^2 q^2$ parallele au côté Ad, il eſt évident que le trapeze $x a^2$Cd eſt plus grand que le triangle $a^2 p^2$C, de tout le parallelogramme $x a^2 q^2 d$, lequel étant conſidéré dans la projection d'un pandantif ACd, exprimera la différence en excès de la pouſſée du pandantif de la voûte d'arête ſur le triangle cylindrique qui ſeroit ſon complément pour achever le demi-berceau qui couvriroit tout l'eſpace AbCd. Or ce complément du pandantif eſt juſtement le pan d'une voûte en arc de cloître, qui couvriroit le même eſpace. Secondement, on a vu, par le développement du pandantif DAIS, que ſa ſurface eſt moindre que celle du développement du pan de l'arc de cloître de l'arc bAIS; cependant ſi le demi berceau étoit complet ſur l'impoſte Ab, le parallelogramme Axb ſeroit la baſe totale de ſon piédroit. Or nous diſons que la moitié de Axb eſt celle de la portion d'arc de cloître, qui eſt plus grande que la moitié de la doële; donc l'autre moitié Afx, qui eſt égale à la baſe Afxb, étant néceſſaire pour ſoutenir la pouſſée d'une moindre partie de doële, il ſuit que cette moindre partie, qui eſt le pandantif, pouſſe plus en général que le pan de l'arc de cloître; ce qui eſt exprimé à la fig. 244, par le rapport de Px à Pb ou à Pa, & dans celle-ci par celui de Ae à bx ou Af.

De la pouſſée des voûtes en arc de cloître.

Les voûtes en arc de cloître peuvent être conſidérées comme les complémens des voûtes d'arête, ainſi que nous venons de l'expliquer ; car ſuppoſant un demi-berceau ſur *d b* (fig. 248) coupé diagonalement ſur AC, & la naiſſance ou l'impoſte du demi-berceau ſur A *b*; le triangle AC *d* ſera la projection d'un pandantif, & AC *b* celle d'un pan de voûte en arc de cloître. D'où il ſuit que, puiſque le pandantif eſt une portion de berceau moindre que la moitié du demi-berceau ſur *d b*, comme on vient de le montrer, le pan de la voûte en arc de cloître, qui en eſt le complément, ſera plus grand que cette moitié, quoiqu'il paroiſſe égal dans la projection, où le triangle A *b* C eſt égal au triangle A *d* C. Fig. 248.

La raiſon de cette fauſſe apparence a été donnée au ſecond Livre, lorſque nous avons parlé des effets de la projection, qui racourcit d'autant plus les objets qu'ils ſont moins inclinés au plan de deſcription; or il eſt clair par le profil *b* 1 2 H que la partie *b* 1 étant moins inclinée à la baſe *b* C de ce profil que la partie 3 H, qui lui eſt preſque parallele, elle ſera auſſi plus racourcie par la projection; par conſéquent la ſurface de la voûte ſur A *b* C ſera plus grande que ſon complément au demi-cylindre ſur AC *d*, qui a ſes parties plus éloignées de l'impoſte A *b*. Cette vérité paroît évidemment dans le développement du demi-berceau tracé en ADS *b*, où le triangle mixte AISD eſt la ſurface développée du pandantif, & l'autre AIS *b* celle du pan de l'arc de cloître. De cette derniere conſidération, il ſuit que quoique le pan d'un arc de cloître ſoit plus grand que le pandantif de la voûte d'arête qui eſt ſon complément, il pouſſera cependant beaucoup moins, parce que ſon centre de gravité ſera plus près de l'impoſte que celui du pandantif.

Au reſte on ne peut comparer la pouſſée de ces deux voûtes, parce que l'une pouſſe ſur une ligne & l'autre ſur un point ; le pandantif de la voûte d'arête fait tout ſon effort ſur le point A pour renverſer le piédroit, & le pan d'arc de cloître le fait ſur toute la ligne A *b* qu'il pouſſe inégalement, enſorte que ſon mouvement virtuel décrit une ſurface triangulaire A *b x*. En effet c'eſt ici tout le contraire du pandantif, il pouſſe tout

Fig. 248. au point A, & le pan d'arc de cloître n'y pousse point encore; c'est de ce point qu'il commence à pousser de plus en plus vers *b*, dans le rapport des longueurs des retombées de chaque rang vertical de ses voussoirs, compris entre l'imposte A*b* & l'arc de section elliptique AL*h* sur AC. D'où il suit que le plan d'arc de cloître sur A*b*C n'a besoin que de la moitié de la surface de la base du piédroit qui seroit nécessaire pour résister à la poussée du demi-berceau sur C*d*A*b*, dont le piédroit devroit être le parallelogramme A*fx b*, supposant l'épaisseur A*f* ou *b x* trouvée par les problêmes précédens.

Ainsi toute l'épaisseur A*fx* que l'on a coutume de donner au piédroit, c'est-à-dire à la base d'un mur de faces paralleles entre elles, laquelle est le parallelogramme A*fxb*, est superflue pour résister à la poussée de la voûte en arc de cloître, de même que le triangle A*gy*, moitié du parallelogramme A*y*, qui répond à l'autre pan A*d*; & à plus forte raison le quarré restant à la jonction des deux murs en *g*A*fe*, qui est totalement inutile, parce que les deux pans d'arcs de cloître n'ont aucune détermination de poussée de ce côté, lequel au contraire étoit le seul où poussoient les voûtes d'arête, comme nous l'avons dit ci-devant. Cette partie surperflue de la jonction des deux murs diminuera à mesure que l'angle des murs sera plus ouvert, & augmentera d'autant plus qu'il sera plus aigu.

Fig. 249. Ainsi supposant une voûte d'arête sur un pentagone régulier DBGFE, comme par exemple une guérite (fig. 249), cette partie de jonction des murs devient le trapezoïde I*n*F*o*, qui est plus petit, toutes choses égales, que le quarré *gf* de la fig. 248. D'où il suit que ne prenant pour la base des piédroits que les parties triangulaires qui sont nécessaires pour résister à la poussée d'une voûte établie sur un polygone, le contour de ces piédroits sera d'un nombre des côtés double de celui sur lequel est établie la voûte en arc de cloître: par exemple ici ce sera une décagone EAFMGLB, &c, qui peut être ou ne pas être régulier, suivant que la poussée du milieu d'un pan AP aura été trouvée plus ou moins grande par les problêmes précédens, touchant celle des berceaux simples, dont le demi-diametre de l'arc droit seroit RC. D'où il suit que les bases des piédroits à faces paralleles entre elles EF, KI: FG, IH, d'un mur qui envelopperoit le polygone,

feroient plus de moitié plus grandes qu'il ne faut de la quantité de tous les trapezoïdes, comme *o* F *n* l, &c, qui restent aux angles du polygone au-delà des triangles AF*o*, FM*n*, qui sont égaux à ceux des bases des piédroits ARF, MF*m*, nécessaires pour contenir la poussée de chaque pan d'arc de cloître. *Fig.* 248.

Présentement si l'on veut diminuer de moitié la plus grande épaisseur *b x* (fig. 248) pour faire un mur à faces paralleles A*b*, NO, faisant *bo*=*ox*, il est évident qu'on aura la même surface de base dans le parallelogramme AO que dans le triangle A*xb*, & que le triangle M*x*O qu'on supprime est remplacé par son égal NAM, qui sera la base d'un contrefort en prisme triangulaire, lequel appuie le piédroit en coin tronqué AMO*b*, considéré comme un massif de maçonnerie qui peut être retenu par ce contrefort ; & si l'on y ajoute le triangle à la diagonale KNA pour le fortifier, on peut compter que la force d'un tel piédroit seroit suffisante pour résister à la poussée de la voûte.

Cependant, quoique la base ajoutée KMA soit plus grande que la retranchée M*x*O, il sera de la prudence d'épaissir le piédroit qui sera fait en mur de faces paralleles entre elles, un peu au-delà de la moitié *b* O de l'épaisseur primitive *bx*, lorsque le polygone sera d'un petit nombre de côtés, comme de 4, & encore plus de 3, où l'angle AMK du contrefort est trop aigu; de sorte qu'il est fort foible, considéré comme une partie ajoutée, quoiqu'il soit en effet une partie de mur continue. Cet angle AMK s'ouvrira d'autant plus que le polygone voûté en arc de cloître sera d'un plus grand nombre de côtés, de sorte que la partie ajoutée y deviendra suffisante pour remplacer la pointe du piédroit retranchée, considérant toujours les piédroits & la voûte comme une masse de maçonnerie ou de pierres de taille bien liées entre elles, qui ne font qu'un corps; car si on les considéroit comme sans liaison latérale, ces contreforts ne pourroient jamais remplacer la force du levier venant de l'éloignement du point d'appui *x*, qui seroit nécessaire pour résister à la poussée de l'arc du milieu C*b*, considéré comme une arcade détachée, qui pourroit se séparer du reste du pan de l'arc de cloître, parce que cet éloignement *x* donne la longueur du bras du levier nécessaire pour résister à l'effort de la poussée.

De la pouſſée des voûtes ſphériques & ſphéroïdes.

Fig. 252. Si un polygone, ou une portion ABP (fig. 252), voûtée en arc de cloître, a un grand nombre de côtés de peu de largeur à la naiſſance, comme A 1; 1, 2; 2, 3; 3, 4, &c. il eſt évident que la figure d'une telle voûte approcheroit beaucoup de celle d'une ſphérique, ſi l'arc droit étoit circulaire, ou d'une ſphéroïde, ſi l'arc droit étoit elliptique, ſurhauſſé, ou ſurbaiſſé. Si le nombre de ces côtés étoit du double ou du triple plus grand, les côtés ou pans de la voûte deviendroient ſi petits qu'ils ſeroient ſenſiblement confondus avec le cercle dans lequel le polygone ſeroit inſcrit, & la voûte approcheroit d'autant plus de la ſphérique, que ces rangs de vouſſoirs ſe rétréciroient en approchant de la clef, où il ſeroit impoſſible d'y appercevoir aucune différence, comme on en peut juger par le développement d'un pan tracé à la fig. 253. D'où il ſuit qu'on peut conſidérer les voûtes ſphériques & ſphéroïdes, comme compoſées de pluſieurs pans d'arcs de cloître. Suivant cette hypotheſe, on reconnoîtra que ces ſortes de voûtes pouſſent plus de la moitié moins que les berceaux ſimples, de même ceintre, diametre & épaiſſeur, ou charge, & par conſéquent qu'en ne donnant à leurs piédroits que la moitié de celle des berceaux conditionnés de même, ils ſeront encore plus forts qu'il n'eſt néceſſaire pour les mettre en équilibre avec la pouſſée.

Pour faire ſentir la juſteſſe de ce raiſonnement, qui eſt fondé ſur celui que nous venons de faire touchant la voûte ſur pentagone de la fig. 249, nous avons tracé à la fig. 252 les baſes triangulaires $1q2$, $2u3$, $3t4$, &c, qui répondent à chaque pan du polygone inſcrit dans le cercle A 3 B, tels qu'ils devroient être à la rigueur: or ſi l'on veut faire un piédroit d'épaiſſeur uniforme, à moitié de la primitive A d, diviſée en deux également en x par un arc de cercle concentrique xkX, il eſt clair que les triangles retranchés par cet arc, comme fqg, iuk, ltr, &c, ſont plus petits en ſurface que ceux qu'on ajoute entre les piédroits triangulaires en $g2i$, $k3l$, $r4n$, &c, dans le rapport du rayon Cg au rayon Cq; par conſéquent ces pieces triangulaires, qui ſont autant de baſes de contreforts, ſont auſſi plus fortes qu'il n'eſt néceſſaire pour butter les

piédroits en coins tronqués 1 *fg* 2, 2 *ik* 3, 3 *lr* 4, &c, & remplacent avec avantage les prifmes triangulaires retranchés en *fqg*, *iuk*, &c.

De la pouffée des voûtes annulaires.

Le même raifonnement qui nous a fervi à rapporter les voûtes fphériques & fphéroïdes aux arcs de cloître, peut nous fervir auffi à rapporter les voûtes annulaires, partie aux arcs de cloître, partie aux voûtes d'arête; en effet fi l'on fuppofe, au lieu d'un anneau circulaire ou elliptique, un anneau tournant autour d'un polygone d'un grand nombre de côtés extrêmement petits, on reconnoîtra que la partie concave fera une fuite de pans d'arcs de cloître tronqués à la clef, & que la partie convexe entre le noyau & la clef fera une fuite de panaches de voûtes d'arête qui s'élargiffent depuis l'impofte du noyau jufqu'à la clef, autant que les pans oppofés concaves fe retréciffent depuis l'impofte du mur jufqu'à la clef. Ainfi confidérant les joints montans dans un plan vertical dirigé au centre du noyau, l'efpace que deux de ces plans enfermeront ne fera pas un triangle cylindrique terminé à la clef, comme dans les voûtes fphériques, mais un trapeze cylindrique, par exemple *ab*N*n*, dont le côté *n*N eft plus petit que l'oppofé *ab* dans le rapport des diftances C*n*, C*a* du centre du noyau à l'impofte concave & à l'impofte convexe. *Fig.* 251.

Ce trapeze cylindrique doit être divifé en deux parties par rapport à la pouffée de la voûte, l'une depuis l'impofte concave *ab* jufqu'à la clef LS, qui fait effort pour renverfer le piédroit *amb*, l'autre depuis l'impofte convexe du noyau *n*N jufqu'à la même clef LS, lequel trapeze agit contre le noyau *n*NO. Comme l'une de ces parties *ab*SL fe rétrécit en montant, il eft clair qu'elle a moins de furface, & par conféquent moins de pefanteur qu'un berceau droit qui feroit établi fur l'impofte *ab*; par conféquent elle pouffe moins qu'un tel berceau, dont la projection de la furface feroit le rectangle *abtq*, laquelle eft plus grande que le trapeze *a*L*b*S des deux triangles *qa*L, *fbt*.

Or comme les pouffées des voûtes de même ceintre & de même hauteur & épaiffeur, font relatives à leurs projections horifontales, il fuit que la pouffée du demi berceau fera à la

Fig. 251. pouſſée du demi-pan annulaire, à peu près comme le parallelogramme *q b* au trapeze *a* LS *b* ; & la ligne qui exprimera l'épaiſſeur du piédroit convenable au demi-berceau ſera à celle qui convient au pan annulaire, comme *ab* eſt à KF, menée par le milieu K du demi-diametre *a* L parallelement à *a b*. D'où il ſuit que pour trouver l'épaiſſeur du piédroit du mur concave, il faut faire cette analogie: C *a*. *ab* : : CK. KF; c'eſt-à-dire, comme la longueur du rayon du noyau, plus le diametre de l'arc droit de la voûte annulaire, eſt à une petite diſtance priſe à volonté à l'impoſte concave : ainſi le rayon du noyau, plus les trois quarts du diametre de l'arc droit de la voûte, eſt à un quatrieme terme qui ſera la corde KF, laquelle étant trouvée, on fera cette ſeconde analogie : comme *ab* eſt à *a y*, trouvé pour l'épaiſſeur du piédroit d'un demi-berceau ſur la même longueur d'impoſte, ainſi KF ſera à un quatrieme terme *a x*, qui ſera l'épaiſſeur du piédroit concave de la voûte annulaire.

J'ai dit que ce rapport n'étoit qu'un à peu près, mais il faut remarquer que la différence qu'il peut y avoir tourne à l'avantage de la ſolidité du piédroit concave, parce que les parties triangulaires, qui ſont l'excès du berceau droit ſur l'annulaire, étant plus éloignées de l'impoſte, pouſſent plus que leurs parties égales intérieures *a r* L, *b* 5 S, qui ſont compriſes dans le trapeze, comme nous l'avons dit en parlant des voûtes d'arête.

Par un ſemblable raiſonnement on trouvera, au contraire, que la pouſſée de la partie convexe de la voûte ſur ſon noyau ſera plus grande que celle d'un demi-berceau poſé ſur l'impoſte *n* N, de la valeur de celle des deux triangles *n* L V & NS *u*, dont la projection *n* LSN de la demi-voûte annulaire excede la cylindrique droite; ainſi ayant diviſé le demi-diametre de l'arc droit L *n* en deux également en G, & tiré G *g* parallele à *n* N, on aura la pouſſée du berceau à celle du pan annulaire, comme *n* N à G *g*.

Il faut remarquer que cette augmentation de pouſſée eſt bien récompenſée par la force de la figure du piédroit convexe qui ſe reſſerre par cette preſſion de la circonférence au centre, lorſque le noyau eſt d'un petit diametre : c'eſt pourquoi il eſt des cas où l'on ne doit ý avoir aucun égard ; mais ſi le noyau eſt vuide & d'un grand diametre, comme il arrive aux berceaux des bas côtés d'une égliſe, tournant autour d'un chevet qui a quelquefois 30 pieds de diametre, alors il eſt bon d'y faire

faire attention, parce que la convexité du mur qui ſert de piédroit à la voûte annulaire, n'eſt pas aſſez conſidérable pour en augmenter la force, mais auſſi alors la différence de la pouſſée diminue. D'où il ſuit que ſi le rayon du noyau eſt fort grand, eu égard à celui du mur du piédroit concave, la voûte annulaire pouſſera à peu près autant que celle d'un berceau droit de même ceintre, diametre & charge, parce que la voûte annulaire approchera d'autant plus de la cylindrique droite, qu'il y aura moins de différence entre le rayon du noyau & celui de la grande circonférence concave de l'anneau.

De la pouſſée des berceaux tournans & rampans.

Nous avons fait remarquer au ſecond tome, que les berceaux tournans & rampans ne different des annulaires qu'en ce qu'ils s'élevent en tournant ſur une hélice dont le développement, c'eſt-à-dire la rectification, eſt une ligne droite inclinée à l'horiſon; ainſi conſidérant les rayons du noyau de la vis & du contour de la tour ronde dans laquelle le berceau fait ſa circonvolution, comme très-grand & peu différent l'un de l'autre, on peut rapporter la pouſſée d'un berceau tournant & rampant à celle d'un ſimple berceau droit en deſcente, biais par ſes têtes de montée & de deſcente, faiſant un angle avec un autre berceau qui lui eſt ajouté; telle ſeroit en effet une vis à petits pans ſur ſa projection horiſontale.

D'où il ſuit premierement que tout ce que nous venons de dire de la pouſſée des voûtes horiſontales ſur le noyau, convient aux voûtes en vis. Secondement, qu'à celles-ci il y a une pouſſée de plus à conſidérer, qui eſt celle d'un poids poſé ſur un plan incliné, parce que tous les lits des vouſſoirs ſont effectivement inclinés à l'horiſon ſuivant deux directions inégales, l'une qui tend à faire gliſſer le poids des vouſſoirs ſuivant une hélice qui eſt d'autant plus ou moins inclinée à l'horiſon qu'elle approche ou s'éloigne de l'axe vertical de la vis totale, l'autre qui tend à la faire gliſſer de la circonférence du ceintre vertical du berceau tournant autour du noyau, au centre de ce même ceintre.

Ainſi la pouſſée de ces ſortes de voûtes eſt compoſée de celle du berceau horiſontal de même ceintre, diametre &

charge, & de celle d'un ſemblable berceau incliné à l'horiſon: or l'on ſait par les principes de la méchanique, que la force d'un poids poſé ſur un plan incliné ſuppoſé poli, eſt à celle qu'il faut pour l'y ſoutenir, comme la longueur du plan eſt à ſa hauteur; mais comme les lits des pierres ſont grenus & raboteux, il n'eſt néceſſaire d'avoir égard à cette inclinaiſon que lorſqu'elle eſt au-deſſus du quart de l'angle droit, parce qu'à l'inclinaiſon de deg. $22\frac{1}{2}$, les lits ne gliſſent pas les uns ſur les autres, le frottement les en empêche, & ils gliſſeront d'autant moins que les directions changeront continuellement autour de la vis; & comme dans la pratique les hélices d'un eſcalier à vis du côté concave de la tour ne ſont guere plus inclinés que ſuivant cet angle conſidéré dans les directions des tangentes des petites parties de l'hélice; il ſuit que dans la pratique il ſuffit d'y avoir un peu d'égard, ſans s'inquiéter ſur l'effet que l'inclinaiſon peut produire lorſque la baſe eſt bien appuyée; & pour ſavoir ſur quoi on doit ſe régler, ſuppoſant qu'il n'y eût pas de frottement, il n'y a qu'à ſe rappeller ce théoreme de méchanique, qui démontre que ſi une puiſſance ſoutient un poids par le moyen d'une vis, elle ſera à ce poids comme la hauteur de la vis eſt à l'hypoténuſe du triangle de ſon développement, c'eſt-à-dire que la peſanteur ou pouſſée de la voûte ſur des impoſtes où elle pourroit gliſſer, exprimée par la ſurface de ſon profil, ſera à l'épaiſſeur ou ſurface du pied de la vis, comme l'hypoténuſe du triangle de développement eſt à ſa hauteur.

De la pouſſée des voûtes coniques.

On peut trouver quelque rapport des voûtes coniques aux berceaux, en ſuppoſant une voûte en canoniere, dont le diametre du ceintre de face ſeroit très-petit en comparaiſon de la longueur de l'axe du cône; car ſi le concours des côtés du cône étoit infiniment loin de la face, la voûte ne ſeroit plus ſenſiblement différente d'un berceau. Sans chercher des exemples de voûtes inuſitées, on peut conſidérer la voûte de l'eſcalier du Vatican, qui eſt peu reſſerrée dans ſa longueur, comme un berceau ordinaire, & l'on auroit pu en chercher la pouſſée ſur cette comparaiſon; le peu d'erreur qui en auroit réſulté auroit été à l'avantage de la ſolidité des piédroits. On peut

encore trouver un rapport des voûtes coniques aux berceaux ſous une autre conſidération, en les comparant aux arcs de cloître. Une trompe ſur le coin, par exemple, fig. 254, peut être conſidérée comme un compoſé de deux pans d'arc de cloître ASN, BSN, dont le ceintre de face eſt ſurmonté, non ſuivant un arc elliptique, comme aux berceaux ordinaires, mais ſuivant un arc droit parabolique; l'angle rentrant de ces deux portions de berceaux qui ſe feroit au milieu, ſeroit en effet peu ſenſible vers la clef. *Fig. 254.*

Il y a cependant deux différences eſſentielles des voûtes coniques aux berceaux, l'une que les ceintres paralleles entre eux & perpendiculaires à la naiſſance de l'impoſte, font des courbes ſemblables, mais d'inégale grandeur, qui vont toujours en diminuant depuis la face juſqu'au fond de la trompe; au lieu qu'au berceau parabolique ce ſont des portions inégales d'une même courbe de ceintre. La ſeconde, que dans les trompes les joints de lit à la doële concourent tous au même point S du ſommet, & que dans les portions d'arcs de cloître, ils ſont tous paralleles entre eux. Ainſi les lits des vouſſoirs des voûtes coniques ont une double inclinaiſon, l'une vers l'axe, comme les voûtes cylindriques, l'autre vers le ſommet du cône, qui diviſe & diminue un peu l'effort de la pouſſée, parce qu'elle diminue la charge qui ſe jette en partie vers le ſommet du cône, plus ou moins, ſelon que les joints tranſverſaux ſont faits ou dans les plans verticaux, ou par des ſurfaces coniques; alors il eſt évident que ces voûtes pouſſent moins que les pans des voûtes en arc de cloître.

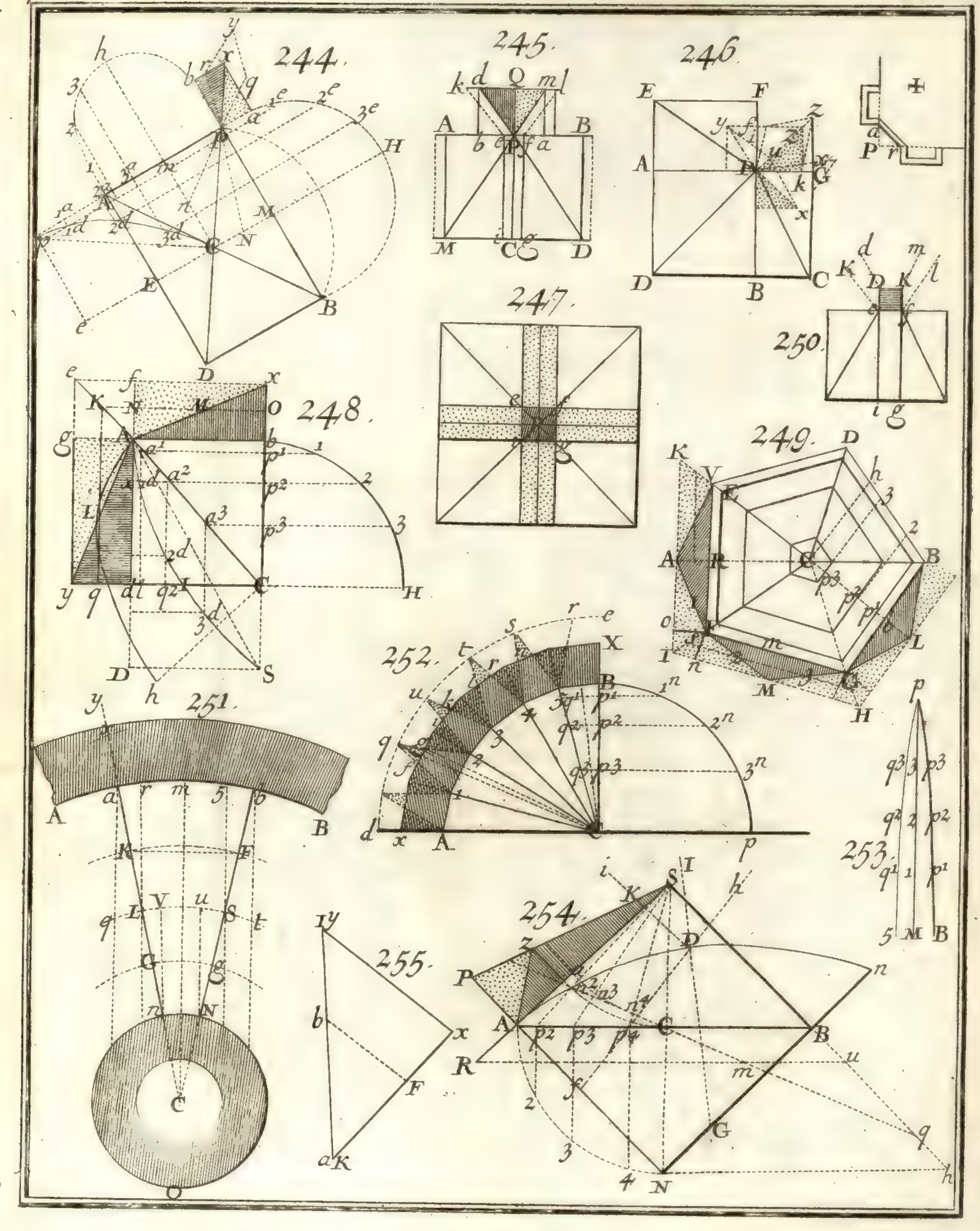
Nous avons montré ci-devant que la pouſſée de ces pans n'étoit que la moitié de celle d'un demi-berceau complet, qui ſeroit élevé ſur la même impoſte; par conſéquent la pouſſée d'une demi-voûte conique ſur même impoſte & de même ceintre & épaiſſeur, pouſſera encore beaucoup moins qu'un pan d'arc de cloître qui couvriroit le même eſpace. Pour en venir à la pratique, nous chercherons premierement la pouſſée d'une trompe ſur le coin (fig. 254), en conſidérant ſon ceintre parabolique de face AFN, comme un ceintre de berceau ſurhauſſé, dont on trouvera l'épaiſſeur des piédroits par les problêmes précédens. Par exemple, ſuivant la premiere hypotheſe d'un ſeul coin au ſommet, on diviſera l'arc A *n* au milieu en D, par où l'on menera une perpendiculaire à cet

Fig. 254. arc (par le probl. XXVI du II livre, tome I, page 228) en cherchant le foyer f de la parabole, comme à cette propoſition, ou bien au trait de la page 271 du tome II. De ce point f par le point D, on tirera l'indéfinie fh, & par le même point D une parallele à l'axe AN de la parabole, comme Ki, puis on diviſera l'angle iDh en deux également par une ligne IDG qui coupera la verticale nN au point G, lequel tiendra lieu du point C des fig. 214 & 217 de la planche 109, pour trouver par ſon moyen la pouſſée horiſontale, par exemple PA, qui détermine l'épaiſſeur du piédroit ſuivant la direction de la face de la trompe.

Ayant trouvé le point P, on tirera au ſommet S du cône la ligne PS, laquelle formera le triangle APS, qui eſt la ſurface de la baſe du piédroit indiſpenſable, à laquelle cependant il faut ajouter quelque peu d'épaiſſeur vers S, parce qu'on ne peut y faire dans la pratique un angle aigu, qui ne pourroit ſubſiſter.

Préſentement, ſi au lieu d'une trompe ſur le coin, il s'agit d'une trompe droite dont il faut trouver la ſurface des piédroits, on doit conſidérer que la pouſſée des voûtes agiſſant toujours ſuivant des perpendiculaires aux lits & aux piédroits, & que la face d'une trompe droite étant oblique à ſes piédroits, on ne peut opérer comme on vient de faire à la trompe ſur le coin, dont les faces leur étoient perpendiculaires; c'eſt pourquoi il faut faire la projection des joints de lits comme dans les traits pour la coupe des vouſſoirs, par exemple Sp^2, Sp^3, Sp^4; puis du point C, on menera une perpendiculaire ſur Sp^4, qu'elle coupera en un point n^4, d'où l'on tirera une perpendiculaire ſur Sp^3, qu'elle coupera en n^3, &c.

Pour abréger & rendre l'opération plus ſimple, on peut du ſommet S pour centre, & SC pour rayon, décrire un arc Ca, qui coupera le piédroit SA au point a, & qui ſera la ſomme de toutes les petites perpendiculaires qu'on peut tirer à toutes les projections des joints de lit poſſibles. On menera enſuite par les points a & C une ligne aq, qui coupera le côté oppoſé SB prolongé en q, & qu'on diviſera en deux également en m, par où on menera Ru parallele à AB; la ligne aq ſera le grand axe d'une ellipſe, dont la moyenne proportionnelle entre Rm, & mu donnera l'autre demi-axe, & la portion de cette ellipſe compriſe entre l'impoſte au point a & la verticale éle-


244.
245.
246.
247.
248.
249.
250.
251.
252.
253.
254.
255.

vée ſur le milieu C ſera le ceintre dont il faut faire uſage, comme de celui d'un berceau, pour trouver l'épaiſſeur du piédroit *a z*, qui donnera le point *z* par un des problêmes précédens, duquel on tirera des lignes *z* S au ſommet S, & *z* A à la face AB; le triangle A *z* S ſera la ſurface de la baſe du piédroit que l'on cherche, à laquelle il faut ajouter quelqu'épaiſſeur en S & en A, par la raiſon que nous avons donné ci-deſſus deſſus en parlant du piédroit de la trompe ſur le coin. *Fig. 254.*

REMARQUE.

Les baſes des piédroits en triangle tombent plus ſouvent en pratique aux trompes qu'aux autres voûtes, parce qu'elles ſervent ſouvent à occuper les eſpaces qui reſtent entre les figures curvilignes & les rectilignes, ou entre des rectilignes de différentes directions, ce qui arrive quelquefois dans les diſpoſitions des plans des édifices.

Après avoir parlé des précautions néceſſaires pour donner aux piédroits la force de réſiſter à la pouſſée des voûtes, il ne nous reſte plus, pour achever cet ouvrage, qu'à voir celles qui ſont néceſſaires pour que la charpente des ceintres ſur leſquels on les éleve ſoit ſuffiſante pour en ſoutenir la peſanteur pendant qu'on les conſtruit, juſqu'à ce que la clef y ſoit miſe pour les décharger de ce fardeau; c'eſt ce que nous allons examiner.

SECOND APENDICE.

De la force des ceintres de charpente pour la conſtruction des voûtes.

Nous devons à M. Couplet, de l'Académie des Sciences, la méthode de trouver la charge des voûtes ſur leurs ceintres, & à M. Pitot celle de trouver la force de ces ceintres, ſuivant l'arrangement qu'on donne aux pieces de bois qui les compoſent. Je vais faire un extrait de leurs mémoires, inſérés dans ceux de l'Académie des années 1726 & 1729, que je vais réduire à trois problêmes.

PROBLEME I.

Trouver la pesanteur spécifique des matériaux des voûtes, sans être obligé d'en façonner quelque partie en cube.

Ayant pris au hasard un morceau de pierre ou de brique de figure quelconque, de la même espece qu'on veut employer, on la pesera dans l'air, après quoi on la repesera dans l'eau en la plongeant dans un seau, & la tenant pendue à un des bras de la balance, on verra par le poids qu on mettra dans l'autre bassin qui sera dehors, combien elle pese moins dans l'eau que dans l'air, & l'on fera cette analogie. Comme la différence des poids dans l'air & dans l'eau est à la pesanteur de la pierre; ainsi 72 livres, pesanteur d'un pied cube d'eau, est à la pesanteur d'un pied cube de pierre. La démonstration en est sensible.

La différence des poids, qui est la diminution de celui de la pierre pesée dans l'eau, est constamment égale au poids d'un même volume d'eau que celui de la pierre; or il est évident que le poids d'un volume quelconque d'eau est au poids d'un même volume de pierre, comme la pesanteur d'un pied cube d'eau est à celle d'un pied cube de la même pierre; donc ces termes sont en proportion géométrique.

Pour rendre la chose plus sensible, on peut ajouter ici un exemple; soit une pierre dont le pied cube pese 144 livres, ce qui est assez ordinaire, car la pierre légere de Saint-Leu pesant 115 livres & celle de Liais 165, la pesanteur moyenne est 140: si l'on suppose que le morceau pris au hasard contient le volume d'un pied cube, il pesera en l'air 144 livres & dans l'eau 72 livres de moins, c'est-à-dire qu'il ne pesera que 72 liv. parce qu'il occupera un volume d'eau d'un pied cube, qui pese 72 livres. Or il est évident que 72 livres, qui est la différence du poids de la pierre, est à 144 livres, pesanteur du volume du cube donné, comme 72 livres, poids d'un pied cube d'eau, que la pierre occupe quand elle y est plongée, est à 144 livres, poids du cube de la pierre; ou si la pierre donnée n'est que d'un demi pied cube, elle ne pesera dans l'eau que 36 livres: or la diminution de 36 livres est à la pesanteur de 72 livres dans l'air, comme 72 livres, poids du pied cube d'eau, est à

144 livres, poids du cube de la pierre, ce qu'on apperçoit clairement.

Cette maniere de chercher la pesanteur des matériaux est commode & très-utile; car quoiqu'on ait des tables du poids de plusieurs sortes de matieres, on n'y en trouve pas de toutes les especes; or l'on sait que les pierres de presque toutes les carrieres sont inégalement pesantes, & qu'il y a une différence très-considérable entre les plus légeres & les plus pesantes; car sans parler de la pierre ponce, qui n'est commune qu'en certains cantons d'Italie, où on l'emploie à faire des voûtes, & d'un tuf extrêmement poreux & léger, qu'on trouve dans les Alpes, & communément à Briançon, il y a 135 livres de différence par pied cube du marbre à la pierre de Saint-Leu, c'est-à-dire plus du double de la plus légere; de sorte qu'il faut augmenter aussi plus du double de la force des ceintres destinés à former des voûtes des matériaux de cette espece. Cela supposé, il sera facile de trouver quelle sera la pesanteur absolue d'une voûte qu'on se propose de faire, puisqu'il n'y a qu'à la toiser & la cuber suivant les regles de la géométrie; mais parce que les ceintres ne sont pas chargés de toute sa pesanteur, il faut chercher la diminution du poids qui est soutenu par les piédroits.

PROBLEME II.

La pesanteur absolue d'une voûte en berceau en plein ceintre & d'égale épaisseur, étant donnée, trouver celle dont les ceintres de charpente sont chargés avant que la clef y soit mise.

Soit (fig. 256) le quart de cercle AGB la moitié de la voûte, dont BD est l'épaisseur; soit AC le rayon vertical passant par le milieu de la clef, divisé en deux également en F; on menera par ce point l'horisontale FG, qui coupera l'arc AB au point G, par où & par le centre C on tirera l'inclinée CH. Je dis, 1°. que la seule partie AGHE chargera les ceintres, & que la partie BGDH ne les charge aucunement, dans la supposition que les voussoirs soient infiniment polis & sans liaison. 2°. Que cette partie AGHE ne chargera les ceintres que d'environ les deux tiers de la pesanteur absolue. La démonstration de cette proposition, dont la solution est due à M. Couplet, consiste dans un calcul algébrique trop long pour Pl. 113, *Fig.* 256.

Fig. 256. être répété dans un petit ouvrage de pratique; les curieux pourront la voir dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de l'année 1729 : nous nous contenterons d'en indiquer le fondement. Supposant l'arc AGB divisé en voussoirs B 1 ; 1, 2 ; 2 G, &c, on peut imaginer qu'ils font effort sur les ceintres, ou comme des corps libres qui ne tendent en bas que par leur seule pesanteur, ou comme des corps chargés par le poids des voussoirs supérieurs, qui ajoutent une nouvelle détermination à la pesanteur des voussoirs inférieurs pour les faire remonter.

M. Couplet montre que la premiere hypothese est impossible, parce que les voussoirs supérieurs AGHE font effort pour faire remonter les inférieurs BDHG sur leurs joints, par la propriété des efforts des poids tombans sur un plan incliné ; sur ce principe il trouve que le tiers de la voûte au-dessus des impostes BD ne charge en aucune façon les ceintres, parce que les deux tiers au-dessus jusqu'à la clef font effort pour écarter du ceintre les premieres retombées. Secondement, il démontre que le restant du quart de cercle au dessus de AGHE ne pese sur les ceintres que suivant un rapport qu'il détermine par cette analogie. La pesanteur de tous les voussoirs AGHE est à la somme des efforts qu'ils font sur le ceintre, comme l'arc AG est à deux fois son sinus FG moins l'arc AG (: : AG. 2 FG — AG). D'où l'on tire pour la pratique que les ceintres ne sont chargés qu'environ des deux tiers du poids de la voûte au-dessus des retombées du premier tiers, qui ne les charge pas, c'est-à-dire qu'ils n'en soutiennent que les quatre neuviemes.

Supposant, par exemple, le rayon CA de 1000 parties, l'arc AG sera d'environ 1046, & son sinus 866, lequel doublé donne 1732, dont ôtant l'arc AG, 1046, il reste 686 : ainsi la pesanteur de tous les voussoirs en AG sera à la somme des efforts qu'ils font sur le ceintre : : AG (1046). 2 FG — AG = 686, & à peu près pour l'usage comme 3 est à 2. Ainsi, pour abréger dans la pratique, on cubera les deux tiers de la demi-voûte pour en trouver la pesanteur suivant la qualité des matériaux dont elle est faite, en multipliant les pieds cubes par le poids donné par quelques tables, ou trouvé par le problême ci-dessus ; on multipliera le produit par le double du sinus de 60 degrés, & de ce nouveau produit, on ôtera le premier

premier de la pesanteur de l'arc AG, le reste sera la charge que les ceintres doivent porter, & que l'on cherche. Il reste à présent à savoir faire usage de la connoissance de cette charge pour lui proportionner la grosseur & l'arrangement des pieces de bois qui composent les ceintres, afin qu'ils n'en soient pas écrasés avant que la clef de la voûte soient posée.

Observations sur l'arrangement & la composition des ceintres de charpente.

On trouve dans les livres de charpenterie & d'architecture différens arrangemens des pieces de bois qui composent les fermes des ceintres, suivant les différentes grandeurs de leurs parties; on en voit pour presque toutes les grandeurs de voûtes dans le traité des ponts & chaussées de M. Gautier, où l'on peut puiser des idées des arrangemens des pieces qui les composent. Nous ne nous proposons ici que quelques observations générales pour le choix. La premiere, c'est qu'il faut que leur force vienne de l'arrangement des pieces, & non pas de leur assemblage à tenons & mortoises, par des liens & des croix de Saint-André, &c, je veux dire que sans leurs secours, mais seulement par quelques légeres entailles d'embrevement pour appuis, & quelques moises qui assemblent les pieces essentielles sans les affoiblir par des grandes entailles, une ferme de ceintre soit capable de subsister sous le faix dont elle doit être chargée entre les deux fermes collatérales.

La seconde, que l'intervalle de ces fermes doit être proportionné à la pesanteur de la voûte, suivant laquelle elles peuvent être espacées depuis trois jusqu'à six ou sept pieds de milieu en milieu; c'est sur l'intervalle réglé que l'on doit calculer la force des ceintres. La troisieme que l'arrangement des pieces de bois qui composent les ceintres, aussi bien que leur grosseur, peut être différent suivant les largeurs & les épaisseurs des voûtes; lorsque le diametre de la voûte n'est que de deux ou trois toises, on peut se contenter de deux arbaletiers, & de quelques potelets pour soutenir les courbes posés perpendiculairement aux deux pieces droites; si le diametre de la voûte est plus grand jusqu'à 6 ou 7 toises, on peut y ajouter un arbaletier au-dessous de chaque côté, & assembler les quatre dans un poinçon.

Fig. 258. Mais si la voûte est plus large que de 6 à 7 toises, il convient de diviser chaque ferme de ceintre en deux parties par un entrait placé à la hauteur de 45 degrés, comme en GI; premierement, pour le fortifier en cet endroit où l'effort de la charge agit le plus entre la clef & l'imposte; secondement, pour n'être pas obligé d'employer des pieces de bois trop longues, & leur trouver des points d'appui en quelque façon communs à différentes directions, & enfin pour pouvoir lier la partie supérieure à l'inférieure par des moises qui embrassent solidement l'une & l'autre. Nous choisissons ici un exemple de ceintre moyen entre les plus grands & les plus petits, tel que le donne M. Pitot, parce que l'arrangement des pieces en est simple & excellent, ce qu'on peut voir à la fig. 258, pour le plein ceintre, & à la fig. 259, pour le surbaissé. Dans ce dernier on y voit les mêmes pieces qu'au premier, avec cette différence que les seconds arbaletiers KT, *k*V ne pouvant se contrebuter au poinçon, s'arcboutent mutuellement aux bouts d'une piece horisontale TV; alors ces arbaletiers perdent leur nom, ils s'appellent décharges.

La partie supérieure d'une ferme de ceintre plein est donc composée de deux arbaletiers KO, EQ de chaque côté du poinçon auquel ils s'assemblent, & où ils sont contrebutés par les deux autres du côté opposé, & de deux courbes GH, HI, qui s'appuient par le moyen des potelets posés quarrément sur les seconds arbaletiers. Cette partie supérieure du ceintre doit porter celle de la voûte qui charge le plus, laquelle est celle que nous avons considérée dans la premiere hypothese comme un seul coin tronqué, qui s'étend en un quart de cercle depuis 45 degrés de hauteur d'un côté jusqu'à l'autre; & comme le coin tend à écarter les parties inférieures, il décharge celles du ceintre de charpente qui doivent servir à les former jusqu'à la hauteur de l'angle de 30 degrés, comme nous l'avons dit ci-devant.

Cependant comme la partie inférieure du ceintre comprise au-dessous de l'entrait doit porter non-seulement la partie supérieure de la voûte jusqu'à ce que la clef y soit posée, & une petite partie au-dessous, mais aussi le poids de la charpente supérieure, elle a besoin d'une plus grande force. Il convient donc qu'elle soit composée d'autant de pieces de bois que la supérieure, lesquelles leur servent d'appui & de base, & qui, par une position moins inclinée à l'horison, auront beaucoup

plus de force que les ſupérieures correſpondantes, quand même elles ne ſeroient que de même groſſeur. Cette différence d'inclinaiſon & leur poſition les fait appeller, comme dans la charpente des combles, des *jambes de force*; ainſi à chaque arbaletier il faut une jambe de force pour le ſoutenir; celle qui eſt le plus près de la circonférence ſert à ſoutenir les courbes du ceintre par le moyen des potelets poſés quarrément, & aſſemblés à tenons & mortoiſes, comme dans la partie ſupérieure au-deſſus de l'entrait, ce que la fig. 258 exprime ſenſiblement. Les autres pieces qui embraſſent les courbes, le ſecond & le premier entrait, marquées, *mo*, *mo*, ſont des moiſes compoſées de deux pieces, une devant, l'autre derriere, échancrées pour ſerrer les jambes de force & les courbes, & ſe joindre par le moyen des boulons & des clavettes de fer.

De la force des pieces de bois, tirée de l'expérience.

Une piece de bois miſe debout porte autant de poids qu'il en faudroit pour la rompre ſi elle étoit tirée ſuivant ſa longueur, & l'on a trouvé par des expériences qu'un brin de chêne d'une ligne en quarré peut ſoutenir 50 livres avant que de ſe rompre: d'où il ſuit qu'il peut en porter autant étant poſé debout. Je ne trouve pas qu'on ait fait des expériences ſur une certaine longueur, mais au contraire qu'on n'y a point d'égard dans le calcul; il me ſemble cependant qu'une piece de bois bien à plomb & bien longue ne doit pas ſoutenir le même poids qu'une autre de même groſſeur & même poſition qui ſeroit très-courte; ma raiſon eſt fondée ſur la configuration des fibres du bois, qui ne ſont pas dirigés en lignes droites depuis le pied juſqu'au ſommet: cependant comme l'on n'y a pas trouvé de différence pour la force, & que par le moyen des moiſes on peut contenir les pieces de bois dans leur ſituation verticale ou inclinée, je ſuppoſe avec ceux qui ont fait des recherches ſur la force des bois par pluſieurs expériences, qu'on peut n'avoir aucun égard à la longueur des pieces, mais ſeulement à leur groſſeur; c'eſt pourquoi il ſuffira de meſurer leur baſe, & de la réduire en lignes quarrées.

Suivant cette hypotheſe, ayant meſuré la ſurface de la baſe de chaque piece de bois en lignes quarrées, on les multipliera

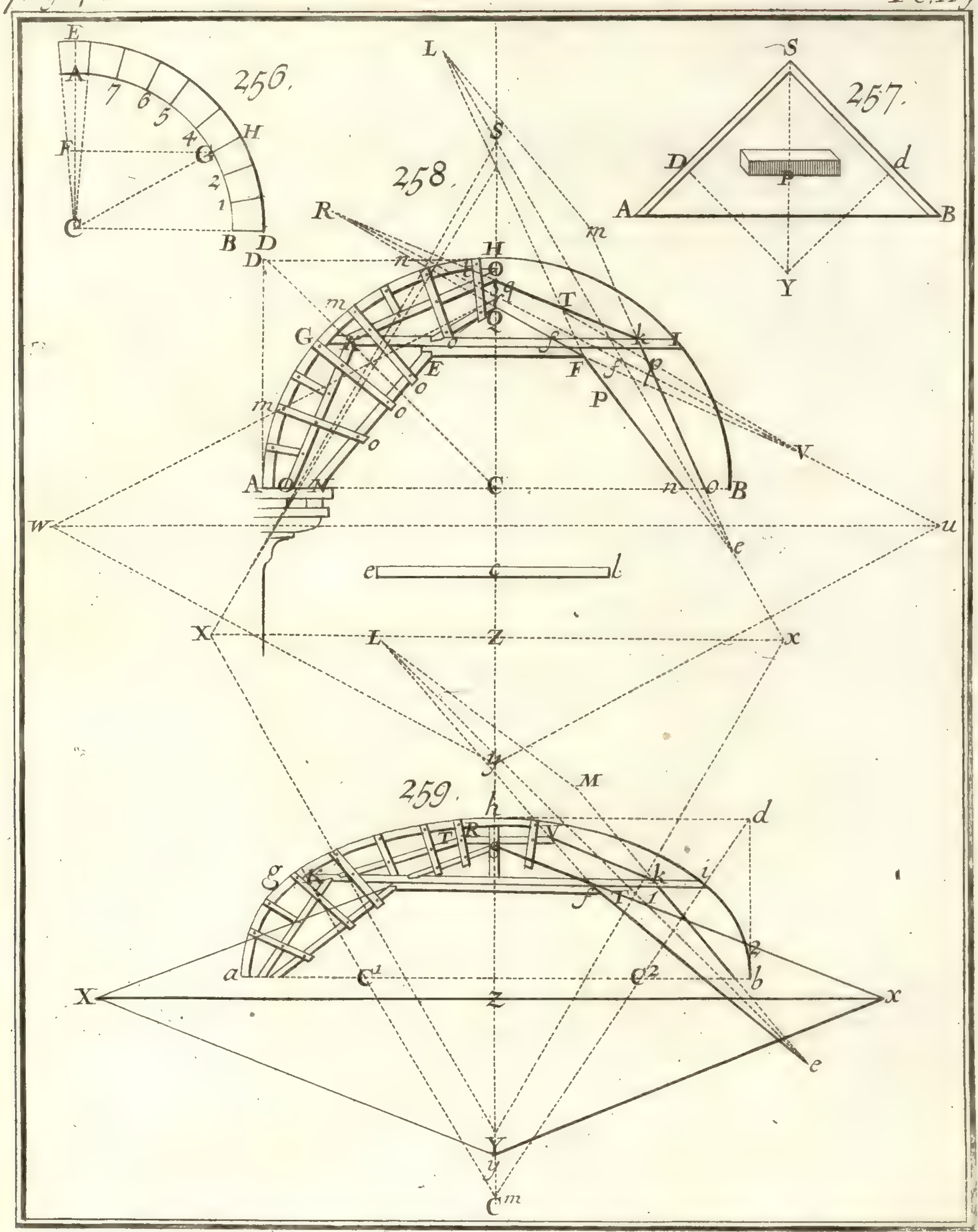
Fig. 259. Lorſque le ceintre eſt ſurbaiſſé, comme à la fig. 259, on operera préciſément de la même maniere pour la partie inférieure, qui eſt au-deſſous de l'entrait, comme la figure le fait voir. Il faudroit auſſi opérer de même pour la ſupérieure, ſi les arbaletiers étoient inclinés entre eux; mais comme on ne peut les faire tous buter contre le poinçon, on fait buter les deux pieces ſupérieures, qu'on appelle décharges, contre les bouts d'une piece horiſontale RV; de ſorte que par cette diſpoſition les principales pieces deviennent preſque toutes trois paralleles; ainſi prenant le concours au point S, on poſera de ſuite ſur la direction S*f* les trois meſures des forces de ces pieces; ſavoir, celle de S*f* en S 1, celle de VK en 1, 2, & celle de la courbe *hi* en 2 *x*; puis tirant par *x* l'horiſontale *x*X, qui coupera S*y* en Z, on fera SX égale à S*x*, & l'on achevera le parallelogramme SX*yx*, dont la diagonale S*y* exprime la force abſolue que l'on cherche pour la partie ſupérieure de ce ceintre. L'inférieure au-deſſous de l'entrait eſt la même qu'au plein ceintre.

PROBLEME III.

La peſanteur abſolue d'une voûte étant donnée, trouver la groſſeur de chaque piece de bois qui compoſe un ceintre ſuivant un arrangement donné.

Cette propoſition eſt une inverſe de la précédente; on prolongera les directions des pieces qui concourent pour en former des parallelogrammes avec des valeurs de forces arbitraires, avec leſquelles on opérera, comme ſi elles n'étoient pas ſuppoſées, enſuite on fera cette analogie: comme la valeur relative d'une diagonale eſt à la valeur de celle qu'on a donné à une des pieces, ainſi la peſanteur donnée que le ceintre doit porter ſera à la force que cette même piece de bois doit avoir, laquelle étant diviſée par 50 livres, donnera le nombre des lignes quarrées que la baſe de la piece doit avoir. La raiſon en eſt ſenſible, en ce que la diagonale étant donnée, la valeur de chaque côté l'eſt auſſi, & les figures de ſuppoſition & de réalité étant ſemblables, leurs côtés & leurs diagonales ſont proportionnels.

Il eſt viſible que les opérations de ces deux derniers problêmes, qui roulent ſur des triangles où il y a des côtés & des

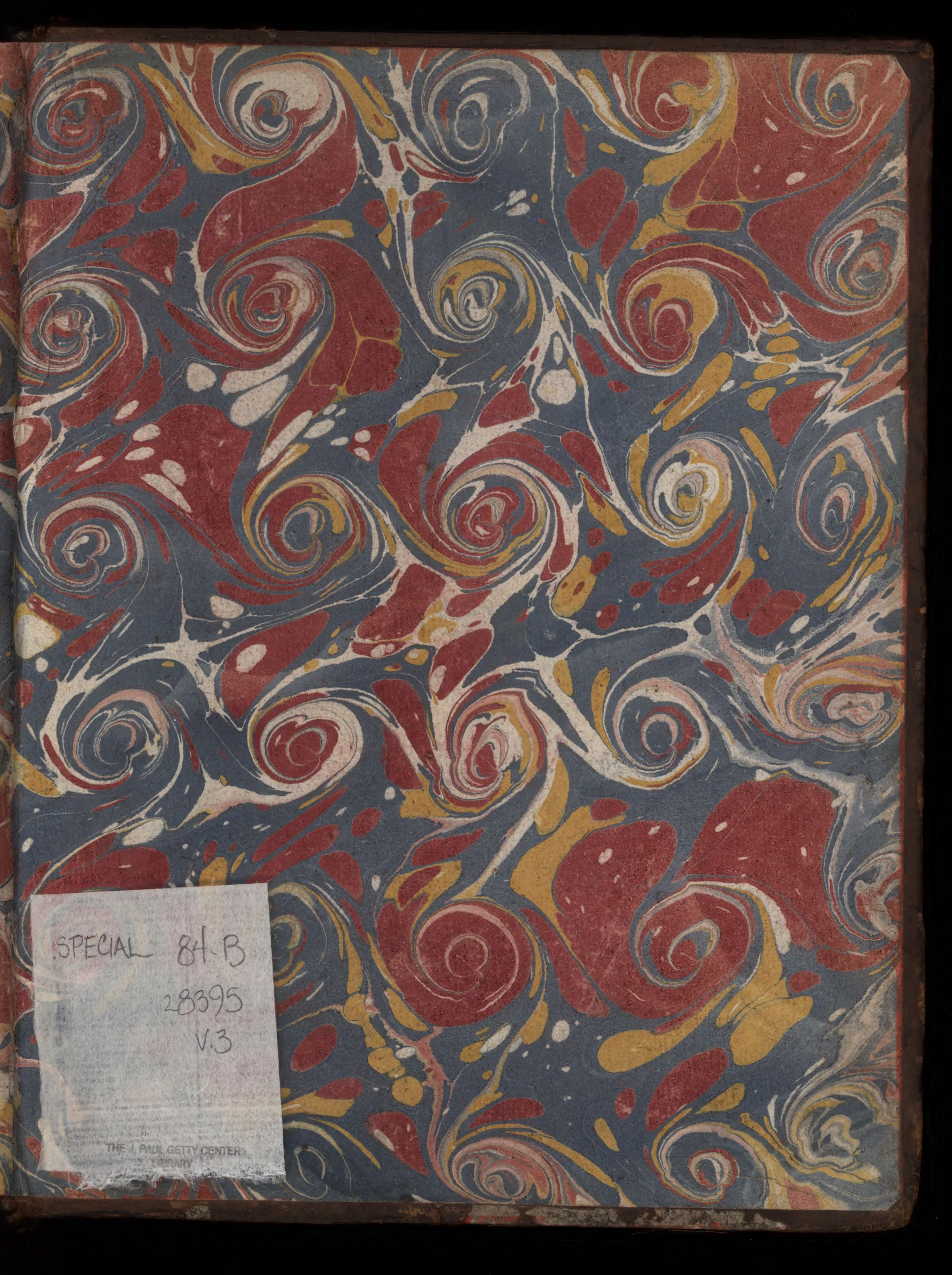

256.
257.
258.
259.

angles connus, peuvent être faites avec plus de précision par la trigonométrie; mais comme il convient d'augmenter toujours quelque chose aux forces des ceintres par précaution contre les défauts qui se trouvent dans les bois, il suffit de connoître à peu près le nécessaire pour y ajouter ce que la prudence exige pour plus de sûreté, particulierement lorsqu'il y a du risque de la vie des ouvriers & de la perte des matériaux, comme dans les ponts, où il y a encore un autre inconvénient à craindre, qui est celui de combler ou embarrasser le courant de l'eau.

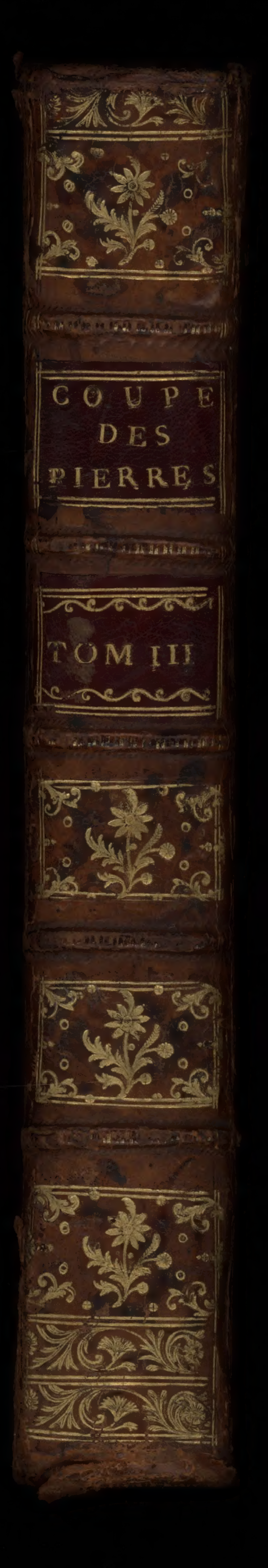
Lorsqu'on a posé la clef d'une voûte, il est certain que les ceintres sont déchargés virtuellement de leur fardeau; mais ils ne le sont pas encore actuellement, & même il n'est pas sûr, lorsque la voûte est d'un grand diametre, qu'elle subsiste en la déceintrant, si on n'a grand soin d'abaisser les ceintres par-tout également, parce que si l'affaissement se fait plutôt d'un côté que de l'autre, la courbe du contour de la doële se change; alors la direction des lits qui lui étoient perpendiculaires ne le sont plus, d'où il résulte qu'ils s'ouvrent en quelques endroits & se resserrent en d'autres, ce qui rompt l'équilibre, par un mouvement qui fait souvent effondrer la voûte, comme on l'a vu arriver dans de grands ouvrages. Il est donc de l'industrie de l'Architecte de faire ensorte, par le moyen des coins, des vis, ou d'autres machines, d'abaisser peu-à-peu les fermes des ceintres & à différentes reprises, pour donner le tems à la maçonnerie de s'afaisser également jusqu'à ce qu'elle se détache entierement des dosses, ensorte qu'on puisse les tirer sans démonter les fermes, parce que si l'on s'appercevoit qu'elle continuât de s'affaisser en quelques endroits, & qu'elle menaçât ruine, on auroit encore les moyens de la démolir pour y apporter remede sans perte de matériaux; c'est le dernier trait de prudence d'un bon Architecte, & le dernier conseil de cet ouvrage, qui a eu pour objet la régularité & la solidité des voûtes, afin qu'elles plaisent par la beauté de leur construction, & qu'elles durent long-tems par le seul artifice de la coupe & de l'arrangement de leurs parties, sans le secours du mortier & du ciment.

FIN DU TRAITE' DE STEREOTOMIE.








COUPE
DES
PIERRES
TOM III